ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
Рубцовский индустриальный институт
ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

А.С. Демидов
И.Ф. Дерюга
И.А. Сорокина
А.А. Кутумов

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для студентов всех форм обучения специальности 140211.65 «Электроснабжение»

Рубцовск 2011

УДК 531.1/3

Демидов А.С., Дерюга И.Ф., Сорокина И.А., Кутумов А.А. Техническая механика: Учебное пособие для студентов всех форм обучения специальности 140211.65 «Электроснабжение»/ Рубцовский индустриальный институт.- Рубцовск, 2011. - 427 с.

Содержит основные теоретические вопросы, рассматриваемые по курсу «Техническая механика» в рамках учебной программы. Предназначено в качестве рабочего материала при изучении данного курса.

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры «СиМ»
Рубцовского индустриального института
Протокол № 2 от 27.10.10 г.

Рецензент: к.т.н., профессор А.Н. Площаднов

Содержание

Раздел I
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1. Статика

Глава 2. Кинематика

Глава 3. Динамика

Раздел II
ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Раздел III
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Раздел IV
ДЕТАЛИ МАШИН

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее методическое пособие представляет собой краткий лекционный курс «Техническая механика», предназначенный для студентов всех форм обучения специальности 140211.65 «Электроснабжение».

В пособии содержатся необходимые теоретические сведения, в сочетании с примерами, согласно учебной программе вышеупомянутой специальности.

Данное учебное пособие рассчитано на активизацию самостоятельной работы студентов.

РАЗДЕЛ I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ГЛАВА 1. СТАТИКА

1.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел называется *механикой*.

Раздел механики, в котором рассматриваются общие понятия механики, законы и методы решения, называется *теоретической механикой*. Теоретическая механика имеет три раздела: статику, кинематику и динамику. Традиционно изучение теоретической механики начинают с раздела статики.

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются законы и условия равновесия материальных тел.

Учитывая относительный характер понятия равновесия, можно понимать под этим состоянием частный случай движения. В общем курсе статики изучаются только задачи о равновесии твердых (абсолютно твердых) тел.

Абсолютно твердым телом (абсолютно жестким) называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого остается всегда постоянным. Тело, которому можно сообщить любое перемещение, называется *свободным*. В противном случае – *несвободным*. Рассматриваемые в механике величины разделяются на *скалярные* и *векторные* величины.

Скалярные величины полностью характеризуются числовым значением, например, время – t (сек).

Векторные величины характеризуются числовым значением и направлением в пространстве, например, сила - характеризуется числовым значением или модулем силы, направлением и точкой приложения. Модуль силы оценивают путем сравнения с силой, принятой за единицу измерения.

Единица измерения силы в системе СИ - H (Ньютон). Графически сила изображается в виде вектора, обозначается как $\vec{F}$. Длина этого вектора (направленного отрезка) в выбранном масштабе соответствует модулю силы. Прямую, по которой направлен вектор силы, называют линией действия силы. Как правило, на произвольное тело действует не одна, а несколько сил.

Системой сил называют совокупность сил, действующих на данное тело (тела). Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, такая система сил называется плоской. В противном случае система сил будет пространственной.

Свойства силы (системы сил):

1) Система сил, обуславливающая нахождение свободного твердого тела в состоянии покоя, называется уравновешенной или эквивалентной нулю.

2) Если данная система сил эквивалентна одной силе, то такая сила будет являться равнодействующей данной системы.

3) Сила, равная равнодействующей по модулю и действующая противоположно равнодействующей, называется уравновешивающей силой.

4) Внешними считаются силы, которые действуют на тело (систему тел) извне. Внутренними силами считаются силы, с которыми части данного тела

(или данной системы) действуют друг на друга.

5) Сила, приложенная к телу в одной точке, называется *сосредоточенной*.

Силовая нагрузка, действующая на все или на некоторые примыкающие к друг другу точки данного объема или плоскости тела, называется *распределенной*.

Сосредоточенные силы могут представлять собой равнодействующую некоторых систем распределенных сил. К примеру, сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собой равнодействующую элементарных сил тяжести, действующую на его частицы. Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую центром тяжести.

6) Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются *сходящимися*, а систему, которую они образуют, называют *системой сходящихся сил*. Силы, линии действия которых параллельны друг другу, называют *параллельными*, а систему, которую они образуют, - *системой параллельных (антипараллельных) сил.*

7) Если систему сил, действующих на свободное твердое тело (тела), можно заменить другой системой сил, не изменяя при этом состояние покоя (движения) данного тела или данных тел, то такие системы сил будут называться *эквивалентными* друг другу.

Типовые задачи статики:

1. Преобразование системы сил, действующих на твердое тело (тела), в более простую, эквивалентную данной системе.
2. Определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело (тела).

1.1.2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ СТАТИКИ

1. Если на твердое тело действуют две силы, то тело будет находиться в равновесии только тогда, когда эти силы равны модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.
2. Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.
3. Действие силы на твердое тело не изменится, если перенести точку приложения данной силы вдоль её линии действия в любую точку тела.
4. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют *равнодействующую*, приложенную в этой точке и являющуюся диагональю параллелограмма, построенного на векторах этих сил, как на сторонах (правило параллелограмма).
5. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие (третий закон Ньютона).
6. Равновесие в некоторых случаях изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если его считать абсолютно твердым (отвердевшим).

1.1.3. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ

В предыдущем параграфе мы познакомились с понятием «свободное тело». Надо полагать, что в природе тел с такими характеристиками фактически не существует. Как правило, что - то препятствует перемещению данного тела.

Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют другие тела, называется *несвободным*.

В таком случае, все, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называется *связью*. Допустим, тело под действием приложенных внешних сил пытается осуществить перемещение. Этому перемещению препятствует связь, оказывая на тело силовое воздействие, называемое *силой реакции (реакцией связи)*, в полном соответствии с третим законом Ньютона.

Как и всякая другая силовая характеристика, реакция связи характеризуется своим значением, точкой приложения и направлением. Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную тому направлению, в котором она препятствует перемещению данного тела. Рассмотрим основные виды связей.

1. Реакция $\vec{N}$ гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел и приложена в точке касания (см. рис. 1.1, *а*). В том случае, если в месте контакта одна из соприкасающихся поверхностей вырождается при плоском рассмотрении в точку, то реакция $\vec{N}$ направляется по нормали к другой поверхности, рис. 1.1, *б*).

2. Связь, представленная в виде гибкой нерастяжимой нити. Реакция $\vec{T}$ направлена вдоль нити к точке подвеса, (см. рис.1.1, *в*, и рис.1.5).

3. Связь в виде цилиндрического шарнира. Реакция $\vec{R}$ может иметь любое направление в плоскости xOz, перпендикулярной оси шарнира y (рис.1.2).

4. Реакция сферического шарнира $\vec{R}$ может иметь любое направление в пространстве (рис. 1.3).

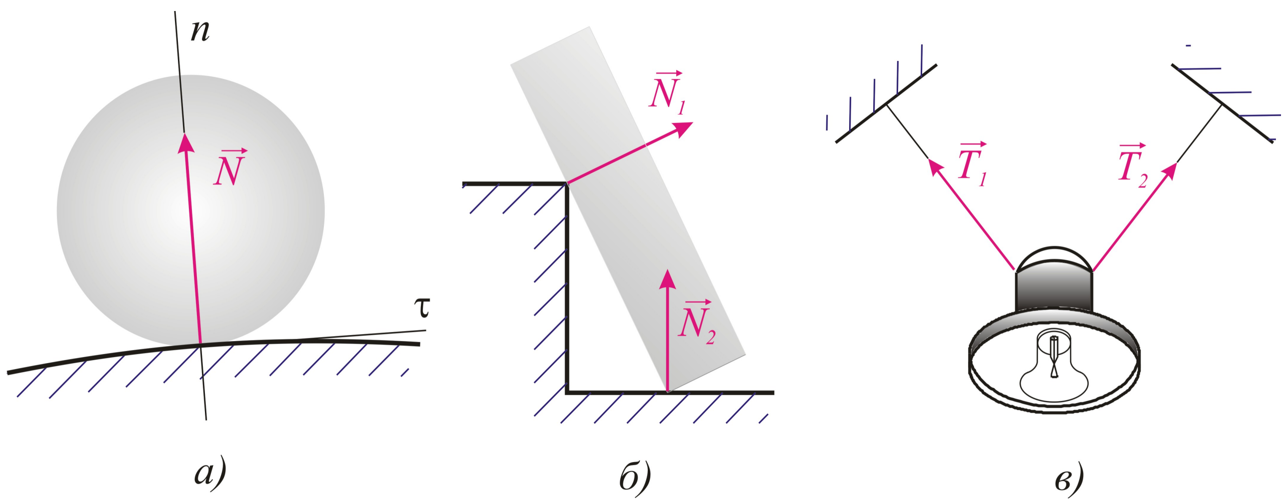


Рис. 1.1. Виды связей

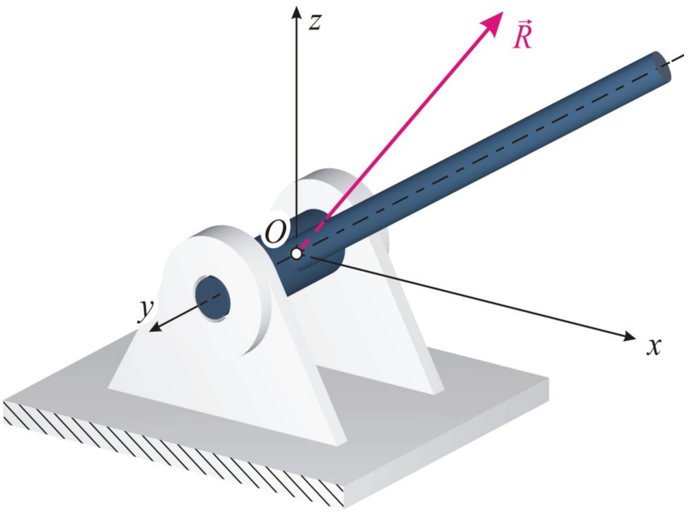


Рис. 1.2. Реакция цилиндрического шарнира

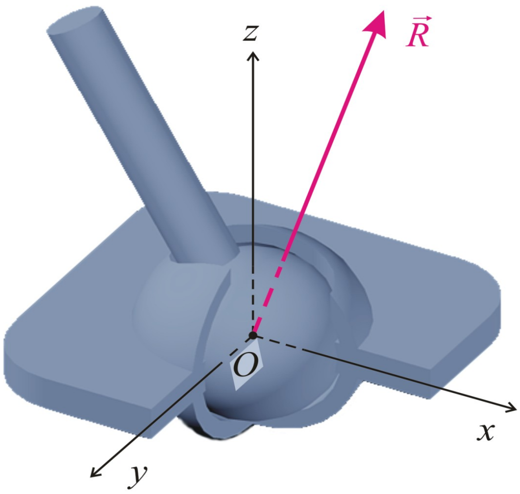


Рис. 1.3. Реакция сферического шарнира

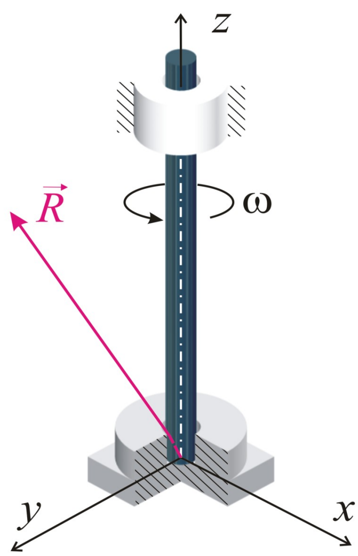


Рис. 1.4. Реакция подпятника в подшипниковом узле

5. Реакция невесомого шарнирно закрепленного прямолинейного стержня $\vec{N}$ направлена по оси стержня. Если стержень пытаются растянуть, она направлена к опорной поверхности $(\vec{N}_2)$; если стержень пытаются сжать – от опорной поверхности $(\vec{N}_1)$ (рис. 1.6). Принято считать стержень *невесомым*, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакции связей при решении задач статики обычно являются величинами неизвестными и подлежат определению.

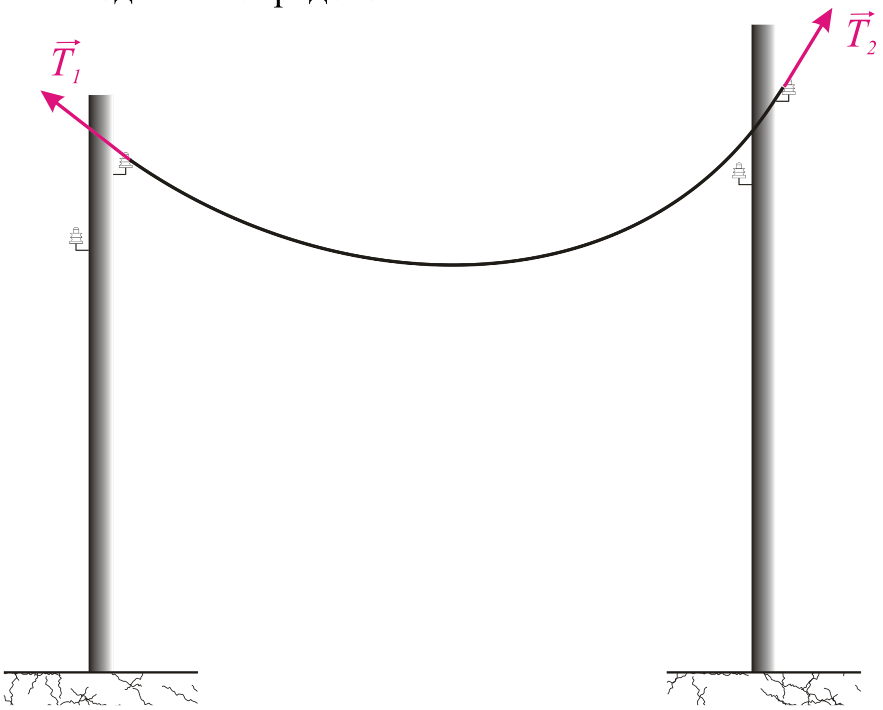


Рис. 1.5. Реакция гибкой связи

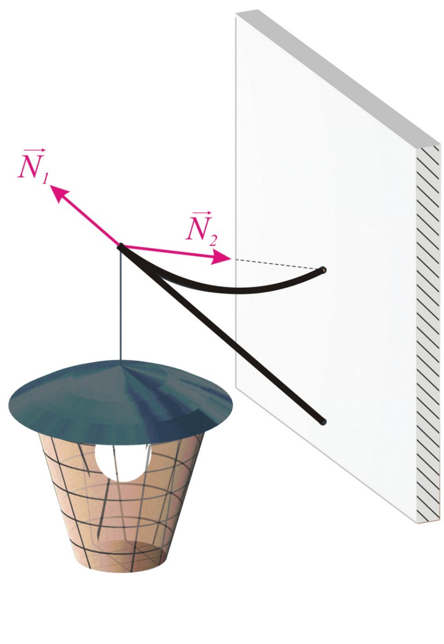


Рис. 1.6. Реакции шарнирных невесомых стержней

1.1.4. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛ

Величина силы $\vec{R}'$, равная геометрической сумме сил какой-либо системы, называется *главным вектором* этой системы сил. Не следует смешивать понятия равнодействующей системы сил $\vec{R}$ и главного вектора системы сил $\vec{R}'$. Для некоторых систем сил равнодействующей не существует, а геометрическую сумму (главный вектор) можно всегда определить. Для системы сходящихся сил понятие равнодействующей системы и главного вектора тождественно: $\vec{R} \equiv \vec{R}'$. С целью приведения системы сходящихся к более простому виду применяют геометрические и аналитические способы сложения этих сил. Рассмотрим геометрический способ сложения сходящихся сил на примере плоской системы сил.

1. Сложение двух сил. Геометрическая сумма $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ системы двух сходящихся сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (равнодействующая или главный вектор) находится по *правилу параллелограмма.* Модуль их равнодействующей $\vec{R}$ определяется по формулам:

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}, \tag{1.1}$$

или

$$R = F_1 \sin\alpha \cdot (\sin\gamma)^{-1}, \tag{1.1$'$}$$

или

$$R = F_2 \sin\alpha \cdot (\sin\beta)^{-1}; \tag{1.1$''$}$$

где $\measuredangle\alpha = (\vec{F}_1 \,\hat{}\, \vec{F}_2)$, $\measuredangle\beta = (\vec{F}_1 \,\hat{}\, \vec{R})$, $\measuredangle\gamma = (\vec{F}_2 \,\hat{}\, \vec{R})$ (рис.1.7).

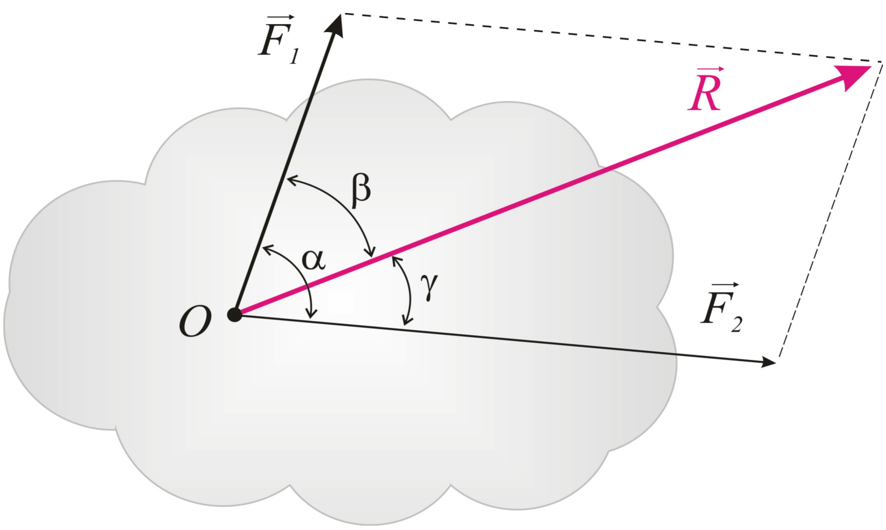


Рис. 1.7. Геометрический способ сложения в системе сходящихся сил - правило параллелограмма

2. Сложение системы сходящихся трех сил, не лежащих в одной плоскости. Геометрическая сумма $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ системы сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$, не лежащих в одной плоскости, определяется диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (правило параллелепипеда).

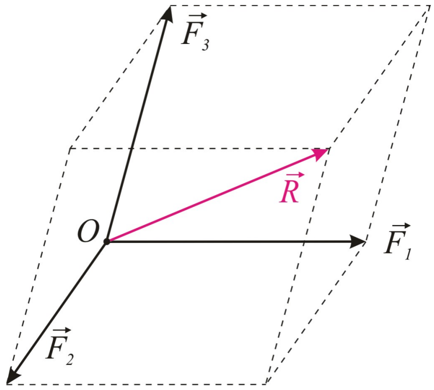


Рис. 1.8. Правило параллелепипеда

3. Сложение системы сил. Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется с помощью последовательного применения правила параллелограмма или построением силового многоугольника. Второй способ является более практичным. В этом случае для системы (например, сходящихся сил) откладывают от произвольной точки O вектор, изображающий в выбранном масштабе силу $\vec{F}_1$, от точки a - вектор, изображающий силу $\vec{F}_2$, от точки b - вектор изображающий силу $\vec{F}_3$ и т.д. От конца предпоследнего вектора откладываем вектор, отображающий силу. Соединив начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\vec{R}' \equiv \vec{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n, \quad \text{или} \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.2}$$

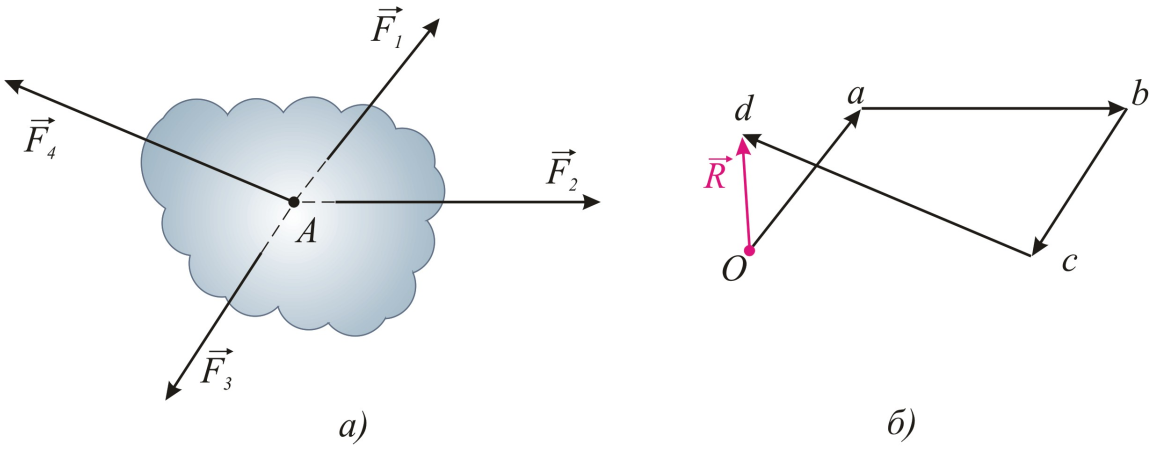


Рис. 1.9. Геометрический способ сложения плоской системы сходящихся сил:
а) расчётная схема; б) незамкнутый силовой многоугольник $(\vec{R} \neq 0)$

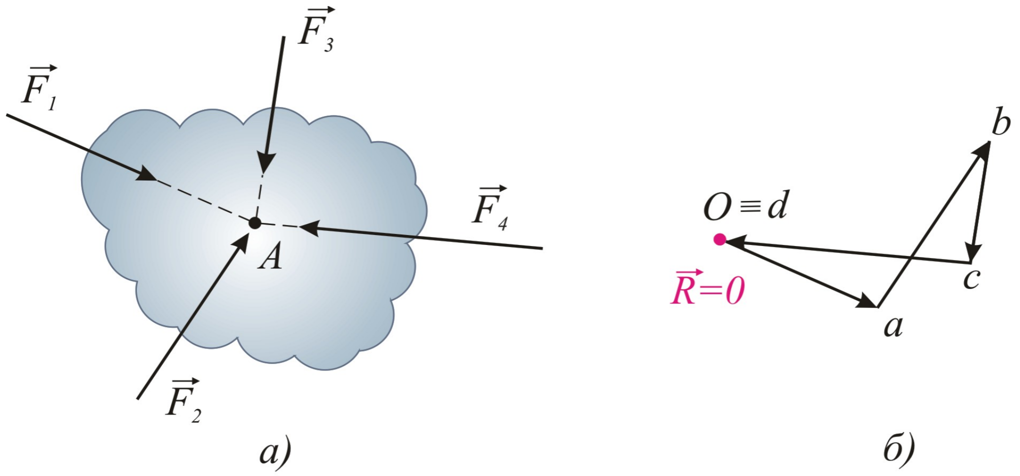


Рис. 1.10. Геометрический способ сложения плоской системы сходящихся сил: *а*) расчётная схема; *б*) замкнутый силовой многоугольник $(\vec{R}=0)$ (система является уравновешенной)

4. Равнодействующая сходящихся сил. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения линий действия. Следовательно, система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n)$ (рис. 1.9, *а*) имеет равнодействующую $\vec{R}$, равную главному вектору $\vec{R}^/$ и приложенную в точке A (или в любой точке, находящейся на линии действия силы $\vec{R}$, проведенной через точку A).

5. Разложение сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ **по направлениям** сводится к применению правил, обратных правилам параллелограмма и параллелепипеда (рис. 1.7 и рис. 1.8), соответственно.

1.1.5. ПРОЕКЦИЯ СИЛ НА ОСЬ

Проекция силы (вектора) на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Если этот угол острый - проекция положительная величина, тупой - отрицательная, прямой - равна 0 (рис. 1.11).

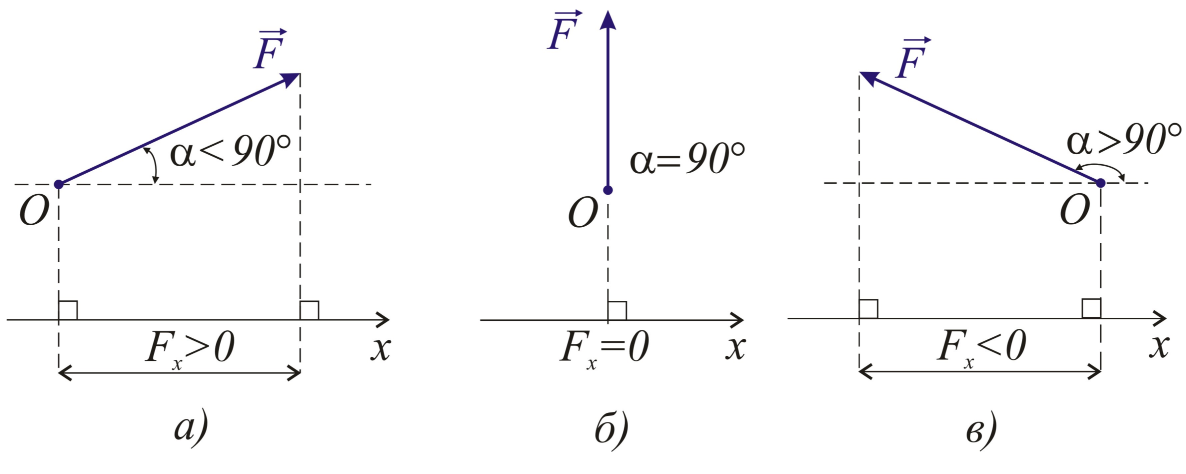


Рис. 1.11. Проекция вектора силы на ось

Проекцией силы на плоскость Oxy называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы F на эту плоскость. Для аналитического решения удобно задавать силу её проекциями на координатные оси: F_x, F_y, F_z.

Для трехмерного пространства модуль вектора силы определяется как

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \tag{1.3}$$

Положение данного вектора в пространственной системе оценивается при помощи направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}. \tag{1.3$'$}$$

Для двумерного пространства модуль силы определяется:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \tag{1.4}$$

а положение:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}. \tag{1.4$'$}$$

Аналитический способ сложения сходящихся сил основан на теореме о том, что проекция вектора суммы на любую ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на эту ось.

Отсюда следует, если $\vec{R}$ - равнодействующая системы сходящихся сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n)$, то $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

и

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \tag{1.5}$$

Зная R_x, R_y, R_z, модуль равнодействующей для трехмерного пространства можно определить по следующей формуле:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \tag{1.6}$$

Положение равнодействующей определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}, \tag{1.7}$$

где $\sphericalangle\alpha = (\vec{R}\,\hat{}\,Ox)$, $\sphericalangle\beta = (\vec{R}\,\hat{}\,Oy)$, $\sphericalangle\gamma = (\vec{R}\,\hat{}\,Oz)$.

Для двумерного пространства:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \tag{1.8}$$

а положение равнодействующей:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos\beta = \frac{R_y}{R}. \tag{1.9}$$

Если силы заданы в виде модулей, углов с осями, для применения аналитического метода сложения надо предварительно вычислить проекции этих сил на координатные оси.

Пример 1.1. Силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ представляют собой плоскую систему сходящихся сил, рис. 1.12. Определить графическим и аналитическим способом положение $\left(\sphericalangle\alpha = \vec{R} \wedge Ox\right)$ и модуль равнодействующей данной системы.

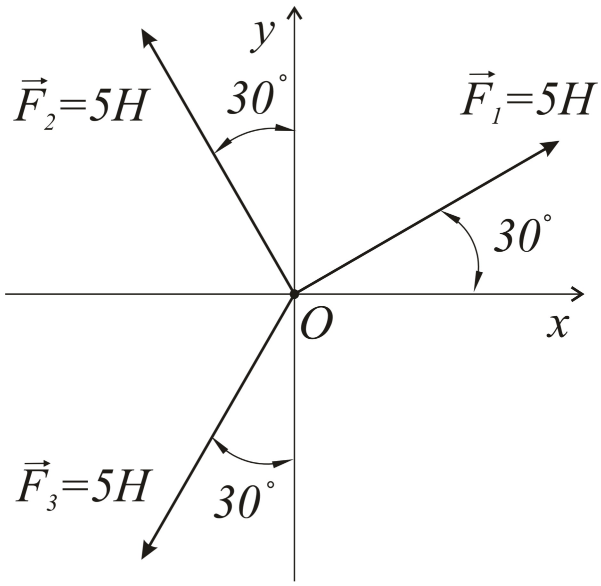


Рис. 1.12. К условию примера 1.1

Решение. 1. Для решения задачи графическим способом складываем, используя правило параллелограмма, векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$. Затем полученную векторную сумму $\left(\overrightarrow{F_1 + F_3}\right)$ сложим с вектором $\vec{F}_2$. Результат векторного сложения будет представлять собой вектор равнодействующей (главный вектор) системы сходящихся сил, рис.1.13, т.е.: $\vec{R} = \left(\overrightarrow{F_1 + F_3}\right) + \vec{F}_2$.

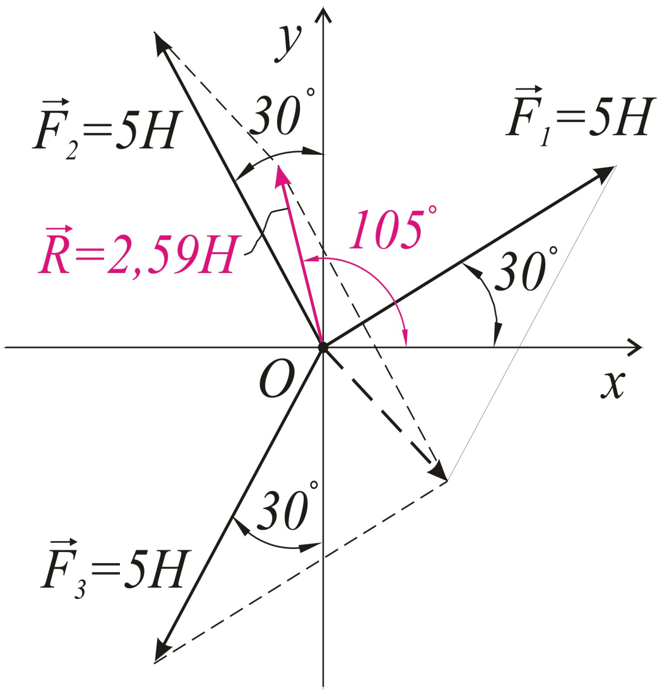


Рис. 1.13. Геометрический способ решения (пример 1.1)

Для определения модуля и положения вектора равнодействующей можно использовать механические способы измерений (транспортир+линейка) или электронные, с помощью соответствующего программного обеспечения.

В результате чего можно прийти к результату:

$\measuredangle\alpha=105^\circ$; $|R|\approx 2{,}59\,H$.

2. Решим эту же задачу аналитическим способом.

Пользуясь понятием проекции вектора силы на ось, определим проекции всех сил на оси x и y.

$F_{1x}=F_1\cdot\cos 30^\circ$; $F_{1y}=F_1\cdot\sin 30^\circ$;

$F_{2x}=-F_2\cdot\sin 30^\circ$; $F_{2y}=F_2\cdot\cos 30^\circ$;

$F_{3x}=-F_3\cdot\sin 30^\circ$; $F_{3y}=-F_3\cdot\cos 30^\circ$.

Суммы проекций всех сил на те или иные оси будут определять величины проекций равнодействующей на те же оси, т.е.:

$R_x=\sum F_{ix}=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=5\cdot\cos 30^\circ-5\cdot\sin 30^\circ-5\cdot\sin 30^\circ\Rightarrow\quad R_x=-0{,}4487\,H$.

$R_y=\sum F_{iy}=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=5\cdot\sin 30^\circ+5\cdot\cos 30^\circ-5\cdot\cos 30^\circ\Rightarrow\quad R_y=2{,}5\,H$.

После чего можно определить модуль равнодействующей:

$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{0{,}4487^2+2{,}5^2}\Rightarrow\quad R\approx 2{,}59\,H$.

Положение вектора равнодействующей определим при помощи направляющего косинуса:

$$\cos\alpha=\frac{R_x}{R}=\frac{-0{,}4487}{2{,}59}\Rightarrow\quad \measuredangle\alpha=\arccos\left(\frac{-0{,}4487}{2{,}59}\right)\Rightarrow\quad \measuredangle\alpha=105^\circ.$$

Порядок и результаты аналитического расчета можно интерпретировать графически, рис. 1.14.

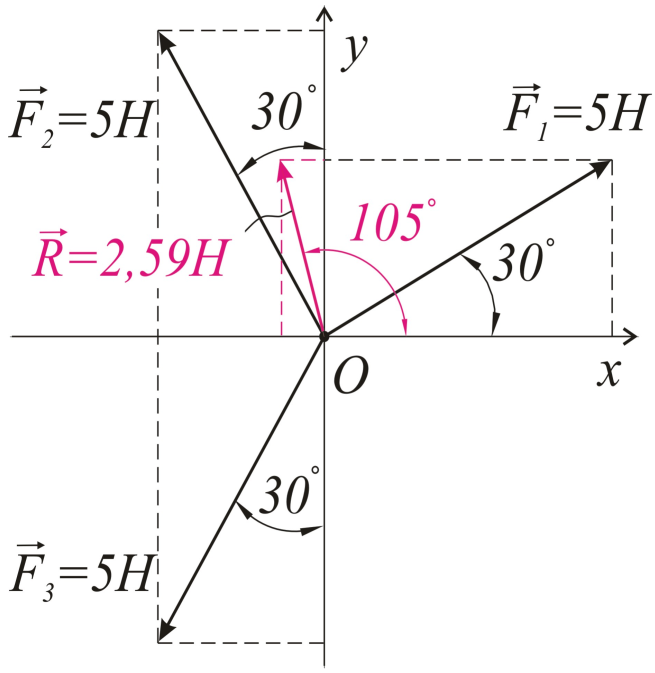


Рис.1.14. К аналитическому способу решения (пример 1.1)

Сравнивая результаты графического и аналитического способа, убеждаемся в их идентичности. Следует отметить, что аналитический способ позволяет получить более точные результаты.

1.1.6. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1. *Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.* Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут, т.е. чтобы модуль главного вектора $\vec{R}' \equiv \vec{R}$ данной системы сил был равным 0.

2. *Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил.*

Условие равновесия пространственной системы рассматривают в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz}=0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Т.е. для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил каждую координатную ось были равны 0.

Для плоской системы:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \end{cases}. \qquad (1.10')$$

Теорема о трех силах

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех не параллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Отметим, что обратной теоремы не существует, так как тело под действием трех сил может и не находиться в равновесии. Отсюда следует, что теорема выражает необходимое, но не достаточное условие равновесия системы сходящихся сил.

Пример 1.2. Шар *1* весом $16\,H$ и шар *2* связаны нитью, перекинутой через блок D, и удерживаются в равновесии, рис.1.15. Определить вес шара *2*, если угол $\alpha = 30^{\circ}$.

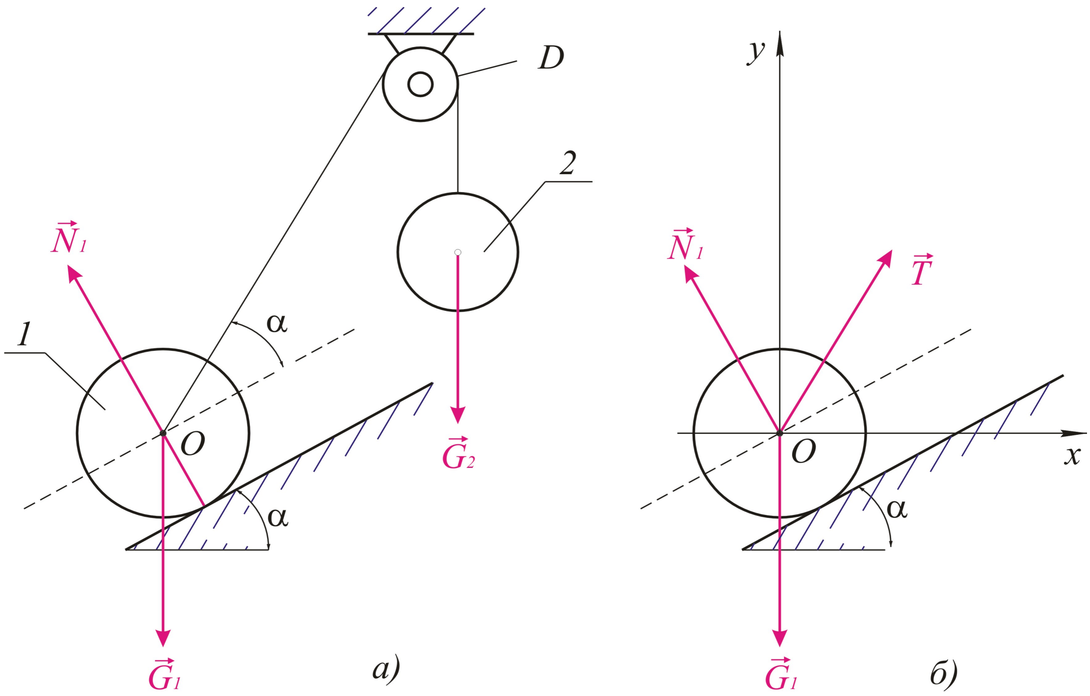


Рис.1.15. К примеру 1.2

Решение: Система является равновесной, т.е. находится в покое. Заменим шар *2* неизвестной силой натяжения $\vec{T}$, $\left(\left|\vec{T}\right|=\left|\vec{G}_2\right|\right)$ от его неизвестного веса $\vec{G}_2$ и перенесём точку её приложения по её линии действия в центр тяжести шара *1*. Изобразим все силы, действующие на шар *1*, см. рис. 1.15, *б)*. Так как линии действия сил $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{G}_2$ пересекаются в одной точке O, то данная система является плоской системой сходящихся сил, для которой аналитическими условиями равновесия будет система уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0 \end{cases}$$

Проведем через точку O оси x, y и составим данные уравнения применительно к нашей задаче.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0: \quad T\cdot\cos 2\alpha - N\cos 2\alpha=0 \Rightarrow T=N.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0: \quad -G_1+N\cdot\sin 2\alpha+T\sin 2\alpha=0.$$

Заменяя, согласно первому уравнению, N на T во втором уравнении, определим искомую величину веса $G_2=T$:

$$G_2=T=\frac{G_1}{2\sin 2\alpha}=\frac{16}{2\sin(2\cdot 30)^\circ}=9{,}238\,H.$$

Пример 1.3. Два груза весом $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ находятся в равновесии. Определить натяжение веревки BC, если известны вес груза $G_2=90\,H$ и углы $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$.

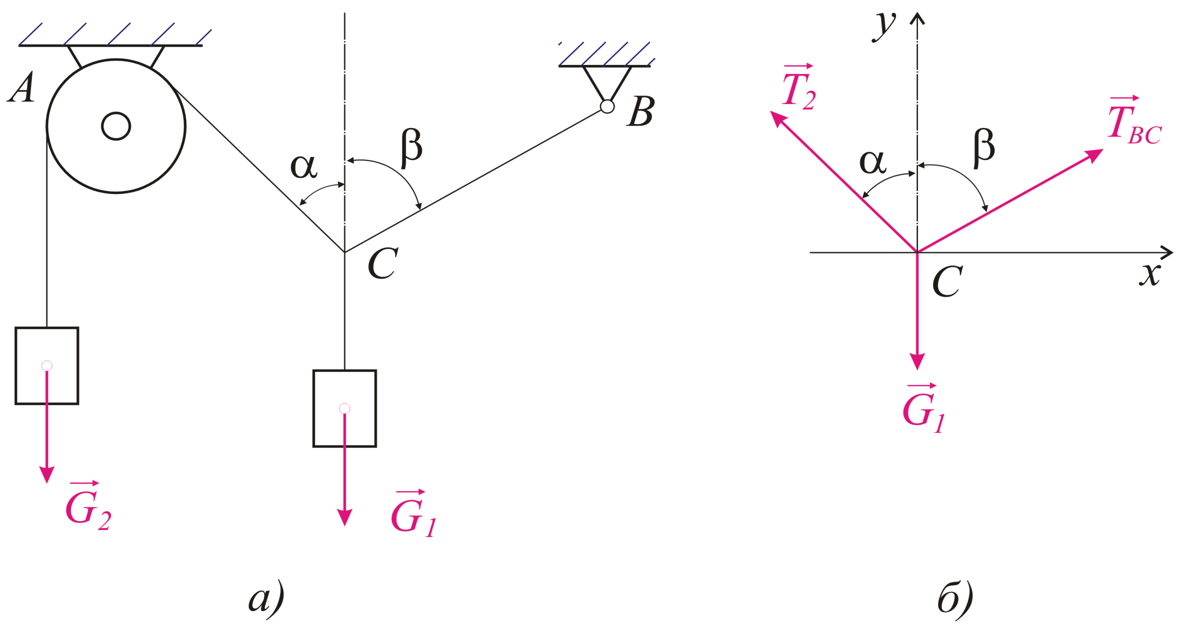


Рис.1.16. К примеру 1.3: *а*) исходная схема; *б*) расчётная схема

Решение: Заменим груз *2* неизвестной силой натяжения $\vec{T}_2$, $\left(\left|\vec{T}_2\right|=\left|\vec{G}_2\right|\right)$ и, отбросив опору B, приложим силу натяжения верёвки BC, обозначая её как $\vec{T}_{BC}$. В результате получим систему сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в точке C.

Для плоской системы сходящихся сил аналитическим условием равновесия является

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Проведем через точку C ось x и составим уравнение применительно к нашей задаче.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0: \quad -T_2 \cdot \sin\alpha + T_{BC} \sin\beta = 0 \Rightarrow T_{BC} = \frac{T_2 \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{90 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 73{,}485\ H.$$

(Второе уравнение не было использовано по причине отсутствия необходимости).

1.1.7. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Системой параллельных (антипараллельных) сил называется система, в которой линии действия сил, составляющих данную систему, параллельны.

Рассмотрим случай, когда система состоит из двух параллельных сил, направленных в одну сторону и $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$. Модуль равнодействующей в таком случае будет равен алгебраической сумме модулей этих сил, а равнодействующая делит расстояние между линиями действия данных сил на части, обратно пропорциональные этим силам, рис. 1.17, *а*). Таким образом:

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}. \tag{1.11}$$

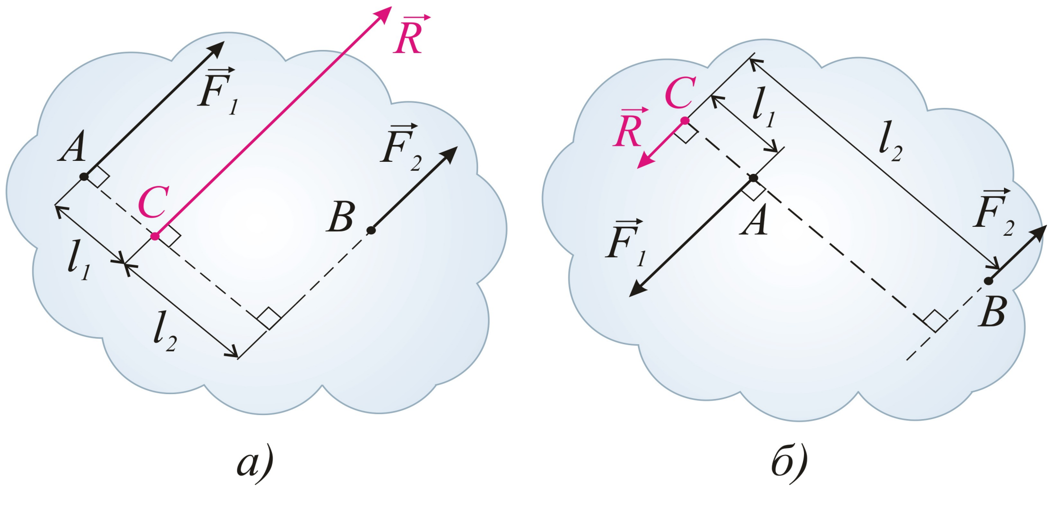


Рис.1.17. Определение положения равнодействующей системы:
а) двух параллельных сил; *б*) двух антипараллельных сил

Равнодействующая двух антипараллельных сил (примем $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$) равна по модулю разности модулей этих сил, расположена за большей силой и направлена в ту же сторону, рис.1.17, *б)*.

Линия действия равнодействующей и в этом случае отстоит от линий действия сил на расстояниях, обратно пропорциональных этим силам:

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}. \qquad (1.12)$$

Система двух антипараллельных сил, равных модулю, называется *системой пары сил*.

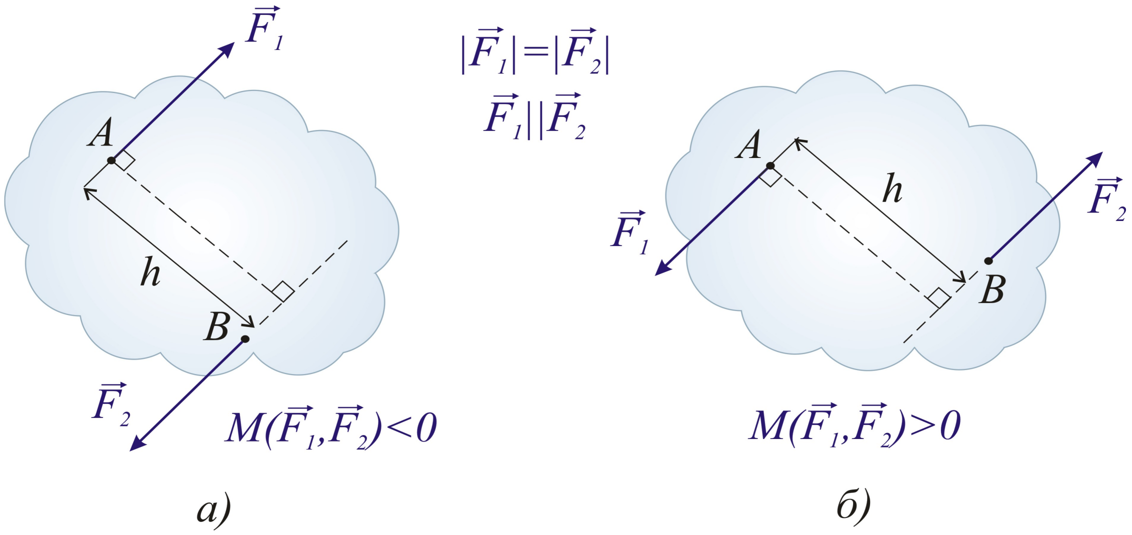


Рис 1.18. Система пары сил и правило знаков момента пары сил (силы): *а)* пара сил с положительным моментом; *б)* пара сил с отрицательным моментом

Расстояние h между линиями действия этих сил называется *плечом пары*. Так как две силы, равные по модулю и направленные в противоположные стороны, не лежат на одной линии действия, то твердое тело, к которому приложена пара, не находится в равновесии. Пара сил стремится повернуть твердое тело, к которому она приложена. Мерой действия пары сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ является алгебраическая величина, называемая *моментом* M. Момент пары сил равен по абсолютной величине произведению модуля одной из сил пары на плечо:

$$M = \pm\left|\vec{F}_i\right| \cdot h, \ [H \cdot м]. \qquad (1.13)$$

Правило знаков моментов

Если пара сил стремится повернуть своё плечо против часовой стрелки, то момент считается положительным, а если по часовой – отрицательным (рис.1.18). Момент, показанный на рис. 1.18, *а*, согласно правилу знаков, – отрицательный, на рис. 1.18, *б* - положительный.

Теория пар на плоскости состоит из четырёх положений.

1. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару,

относительно произвольной точки не зависит от выбора этой точки.

2. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскости её действия.

3. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны.

4. При сложении нескольких пар сил на плоскости получается равнодействующая пара, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар:

$$M = M_1 + \ldots + M_n \qquad \text{или} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} M_i . \tag{1.14}$$

Для равновесия твердого тела под действием системы пар сил, лежащих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов данных пар равнялась нулю:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0 . \tag{1.15}$$

Момент можно также представлять в виде традиционного вектора. В этом случае *моментом силы* $\vec{F}$ *относительно точки* O называется приложенный в точке O вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы $\vec{F}$ на плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и силу, в ту сторону, откуда эта сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, рис. 1.19. Согласно этому определению: $M_O(\vec{F}) = F \cdot h = 2\,\text{пл}.\,\Delta OAB = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки A, проведенный из центра O.

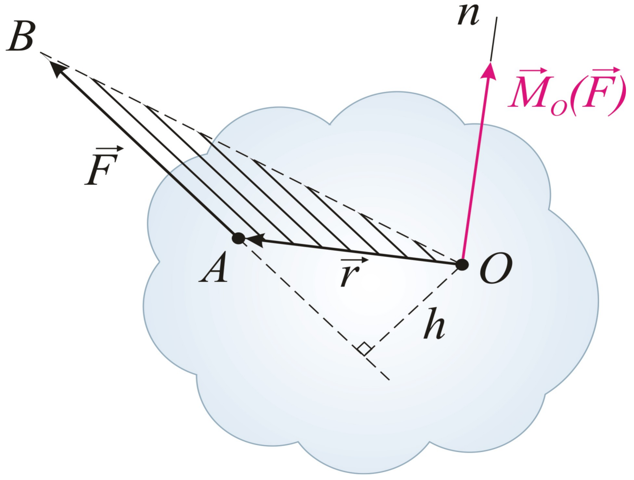


Рис. 1.19. Векторное представление момента пары (силы)

Здесь необходимо вспомнить определение векторного произведения «..векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, равный по модулю площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направленный перпендикулярно плоскости этих векторов в сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{a}$ к $\vec{b}$ видно происходящим против хода часовой стрелки». Согласно этому определению, вектор момента пары можно также представить, см. рис. 1.19.

Свойства момента:

Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии действия.

Момент силы относительно центра O равен 0, если линия действия силы проходит через центр O.

Теорема о параллельном переносе силы.

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда эта сила переносится.

Таким образом, можно использовать приведение силы к данной точке для преобразования произвольной системы сил в простейшую.

1.1.8. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ, ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим следующее определение:

Главным вектором $\vec{R}'$ называется векторная сумма сил, приложенных к твердому телу, или:

$$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \tag{1.16}$$

Проекции главного вектора $\vec{R}'$ на оси декартовых координат равны суммам проекций сил данной системы на эти же оси:

$$R'_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i x, \quad R'_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i y, \quad R'_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i z . \tag{1.17}$$

Модуль главного вектора можно определить как

$$\left|\vec{R}'\right| = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z} . \tag{1.18}$$

Направляющие косинусы главного вектора:

$$\cos\alpha = \cos(\vec{R}' \wedge Ox) = \frac{R'_x}{R'};$$
$$\cos\beta = \cos(\vec{R}' \wedge Oy) = \frac{R'_y}{R'}; \tag{1.19}$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{R}^{/} \wedge Oz) = \frac{R_z^{/}}{R^{/}}.$$

Отличие главного вектора $\vec{R}^{/}$ от равнодействующей $\vec{R}$ заключается в том, что равнодействующая $\vec{R}$ - это одна сила, эквивалентная данной системе сил, а главный вектор $\vec{R}^{/}$ эквивалентен данной системе сил только в совокупности с парой, момент которой равен M_O. *Главным моментом* M_O относительно центра O называется сумма моментов сил, приложенных к твердому телу, относительно этого центра:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_i). \tag{1.20}$$

Исходя из определения, $\vec{R}^{/}$ является статическим инвариантом системы, т.е. величина и направление главного вектора $\vec{R}^{/}$ не зависит от центра приведения системы. Главный момент M_O при перемене центра приведения меняется, то есть зависит от выбора точки приведения.

Например, главный момент плоской системы сил относительно нового центра приведения $O^{/}$ равен сумме главного момента этой системы сил относительно старого центра O и момента относительно нового центра главного вектора $\vec{R}^{/}$, приложенного в старом центре: $M_{O^{/}} = M_O + M_{O^{/}}(\vec{R}^{/})$.

Частные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости:

1. Главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю, т.е.: $\vec{R}^{/} = 0$ и $M_O \neq 0$ (рис. 1.20). Система сил приводится к паре, момент которой равен главному моменту. В этом случае момент системы сил не зависит от выбора центра приведения, т.е: $M_O = \sum M_{Oi}$.

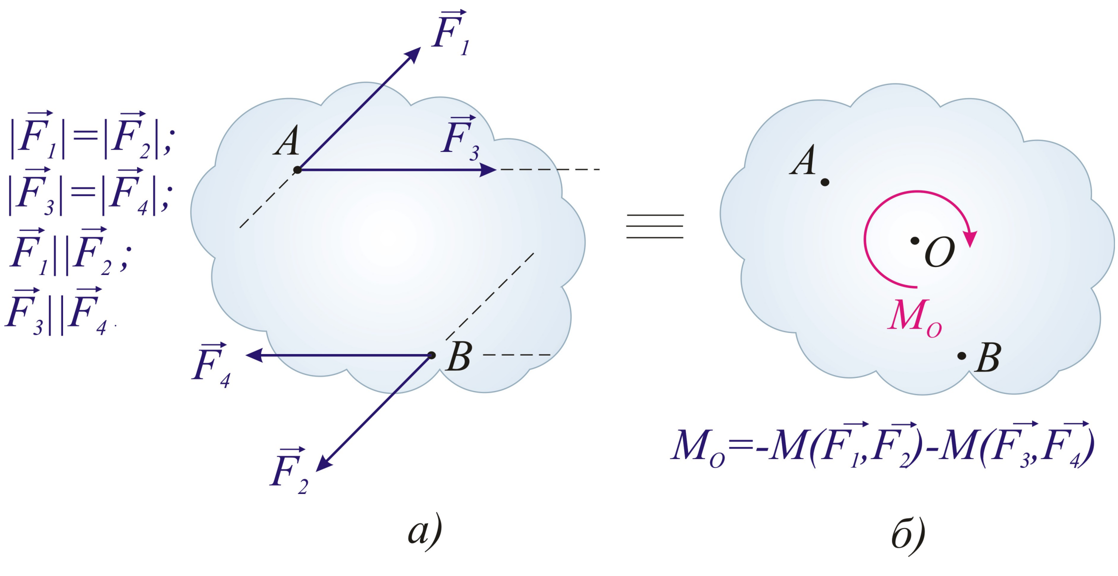


Рис. 1.20. Пример приведения плоской системы сил при $\vec{R}^{/} = 0$ и $M_O \neq 0$: *а*) исходная схема; *б*) система, эквивалентная исходной, приведённая к произвольному центру O

2. Главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю, т.е. $\vec{R}' \neq 0$ и $M_O = 0$ (рис. 1.21). Система сил приводится к равнодействующей $\vec{R} = \vec{R}'$, приложенной в центре приведения системы.

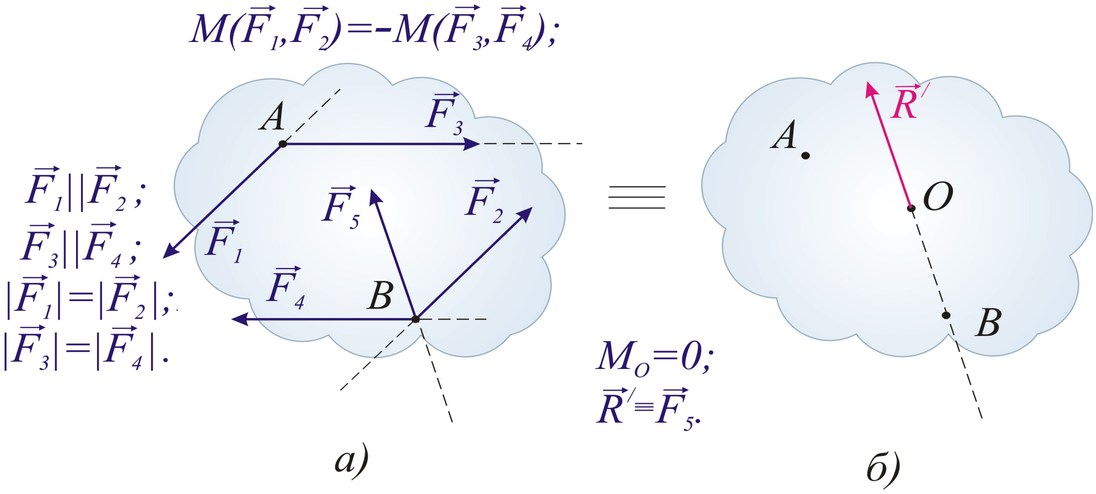


Рис. 1. 21. Пример приведения плоской системы сил при $\vec{R}' \neq 0$ и $M_O = 0$: *а*) исходная схема; *б*) система, эквивалентная исходной, приведённая к центру O, лежащему на линии действия главного вектора

3. Главный вектор и главный момент системы не равны 0, т.е. $\vec{R}' \neq 0$ и $M_O \neq 0$ (рис. 1.22). Система сил приводится к равнодействующей $|\vec{R}| = |\vec{R}'|$, линия действия которой отстоит от линии действия главного вектора $\vec{R}'$ на расстоянии $h = M_O / |\vec{R}'|$.

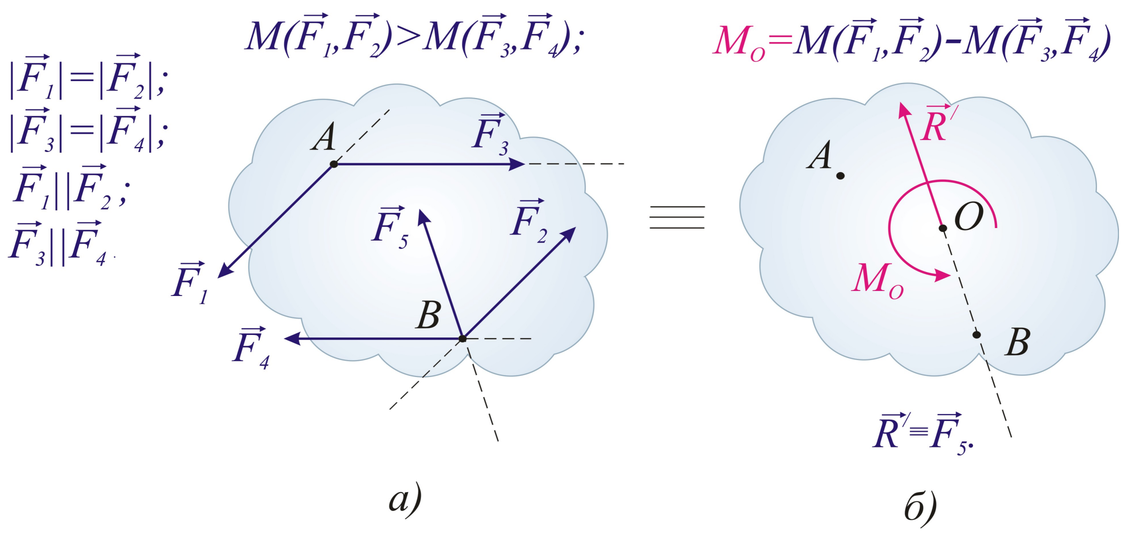


Рис. 1. 22. Пример приведения плоской системы сил при $\vec{R}' \neq 0$ и $M_O \neq 0$: *а*) исходная система; *б*) система, эквивалентная исходной, приведённая к центру O, лежащему на линии действия главного вектора

Положение линии действии равнодействующей $\vec{R}$ должно быть таким, чтобы знак момента равнодействующей $\vec{R}$ относительно центра приведения

O совпадал со знаком главного момента системы сил M_O относительно центра O. Главный вектор $\vec{R}^{/}$ и равнодействующая $\vec{R}$ равны по модулю и параллельны (рис. 1.23).

4. Главный вектор и главный момент равны нулю: $\vec{R}^{/}=0$ и $M_O=0$. В таком случае твердое тело, к которому приложена такая система сил, будет находиться в состоянии равновесия.

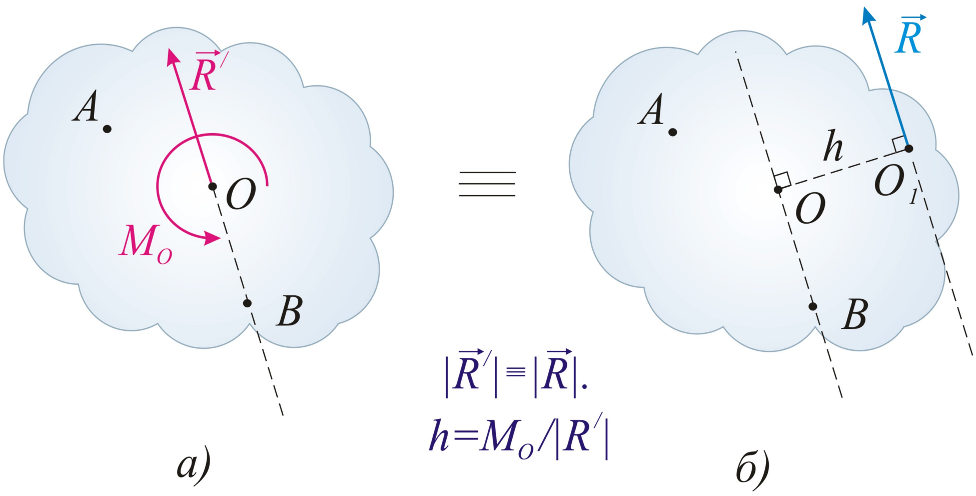


Рис. 1.23. Определение положения равнодействующей произвольной плоской системы сил, где $\vec{R}^{/}\neq 0$ и $M_O\neq 0$: *а*) система, эквивалентная исходной, приведённая к центру O, лежащему на линии действия главного вектора; *б*) система, эквивалентная исходной, приведенная к центру O_1, отстоящему от O на растоянии $h\perp\vec{R}^{/}$ и определяющему положение линии действия равнодействующей $\vec{R}$, параллельной линии действия главного вектора $\vec{R}^{/}$

Теорема Вариньона для произвольной плоской системы сил. Если система сил приводится к равнодействующей, рис.1.24, то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен сумме моментов данных сил относительно той же точки:

$$M_O(\vec{R})=\sum M_O(\vec{F}_i). \tag{1.21}$$

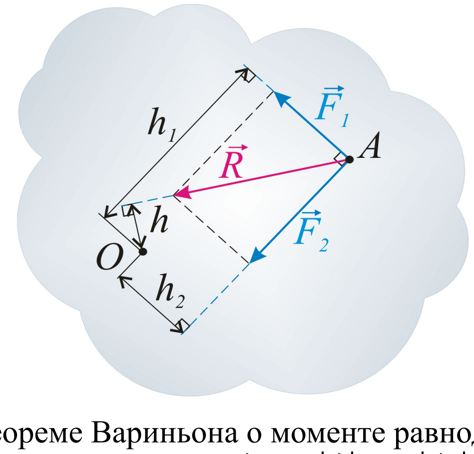


Рис. 1.24. К теореме Вариньона о моменте равнодействующей относительно точки: $M_O(\vec{R})=h\cdot|\vec{R}|=h_1\cdot|\vec{F}_1|-h_2\cdot|\vec{F}_2|$

Теорема о параллельном переносе силы

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить из исходной точки в любую другую точку тела, добавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда эта сила переносится (рис. 1.25).

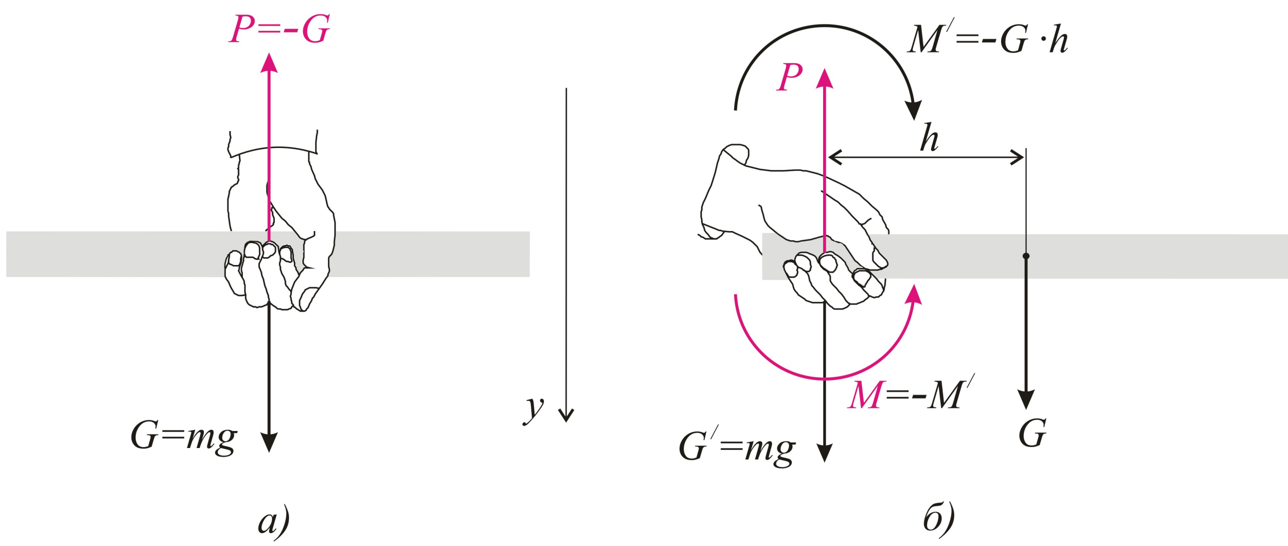


Рис. 1.25. К теореме о параллельном переносе силы

На практике часто используют приведение силы к данной точке с целью приведения произвольной системы сил к простейшей, эквивалентной исходной.

1.1.9. РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил оси и сумма моментов этих сил относительно произвольно выбранной точки O равнялась нулю:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_y = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} . \qquad (1.22)$$

В уравнениях (1.22) оси, относительно которых составляются уравнения проекций, не должны быть параллельны друг другу.

Возможны другие варианты рассматриваемых систем уравнений равновесия, например:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}. \tag{1.23}$$

При этом необходимо учесть, что ось, относительно которой составляется уравнение проекций, не должна быть расположена перпендикулярно прямой, проходящей через две точки, относительно которой составляются уравнения моментов. Можно применить следующие условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_C(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}. \tag{1.24}$$

Выражения (1.24) можно использовать в случае, если эти три точки не лежат на одной прямой.

Условия равновесия твердого тела под действием плоской системы параллельных сил будут следующими:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_x = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}. \tag{1.25}$$

Причем в этом случае ось x не должна быть перпендикулярной к рассматриваемым силам.

Пример 1.4. Пользуясь уравнениями равновесия для плоской произвольной системы сил, определить опорные реакции жесткой заделки A.

Решение. Упрощаем исходную схему (рис.1.26) и приводим её к расчётной (рис.1.27).

Для этого линию действия силы P переносим на параллельную линию, проходящую через опору A.

Перенос осуществляем, согласно правилам теоретической механики, с добавлением соответствующего момента $M = P \cdot 1 = 5\,кН \cdot м$.

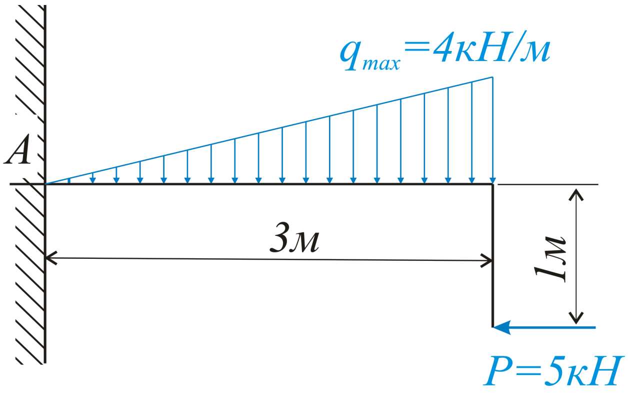


Рис. 1.26. К примеру 1.4. Исходная схема

Кроме этого, заменяем линейную распределённую нагрузку на сосредоточенный эквивалент Q, линия действия которого проходит через центр тяжести фигуры распределения (прямоугольного треугольника) и делит его основание l в пропорции $\frac{2}{3}l$ и $\frac{1}{3}l$. Величина эквивалента Q определяется площадью фигуры распределения (прямоугольного треугольника). Таким образом: $Q=\frac{1}{2}\cdot q_{max}\cdot l=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6\,кН$.

Проведем систему вспомогательных взаимно перпендикулярных осей x и y. Рассмотрим опору A.

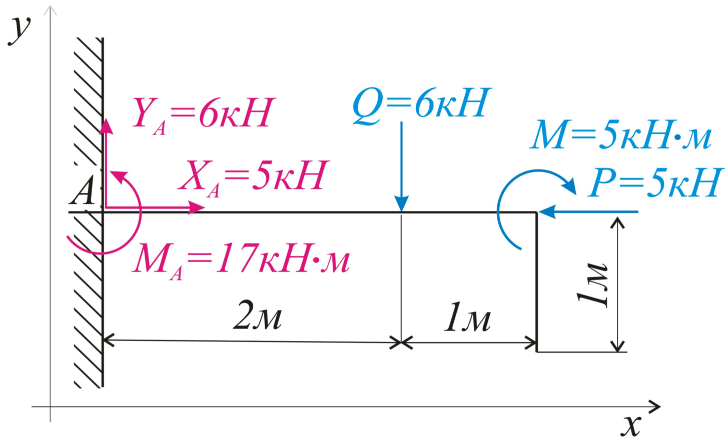


Рис. 1.27. К примеру 1.4. Расчётная схема

Данная опора представляет собой жёсткую заделку, запрещающую два линейных перемещения и одно угловое в плоскости чертежа. Обозначим реакции, препятствующие этим перемещениям, как X_A, Y_A, M_A. Определим эти реакции, используя уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил.

$$\left.\begin{array}{l} \sum X=0 \\ \sum Y=0 \\ \sum M_A(\vec{F}_i)=0 \end{array}\right\}.$$

Первое уравнение:

$\sum X=0\Rightarrow$

Определяем сумму проекций всех сил на ось x и приравниваем её к нулю.

$X_A - P = 0 \Rightarrow X_A = P \Rightarrow \quad X_A = 5\,кН$.

Второе уравнение:

Определяем сумму проекций всех сил на ось y и приравниваем её к нулю.

$Y_A - Q = 0 \Rightarrow Y_A = Q \Rightarrow \quad Y_A = 6\,кН$.

Третье уравнение.

Определяем сумму моментов всех сил относительно точки A и приравниваем её к нулю.

$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow \quad M_A - Q\cdot 2 - M = 0 \Rightarrow M_A = Q\cdot 2 + M = 6\cdot 2 + 5 \Rightarrow \; M_A = 17\,кН\cdot м$.

Таким образом, опорные реакции жесткой заделки составят:

$$X_A = 5\,kH;$$
$$Y_A = 6\,kH;$$
$$M_A = 17\,kH\cdot м.$$

Пример 1.5

Для балки, изображенной на рисунке, определить опорные реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$.

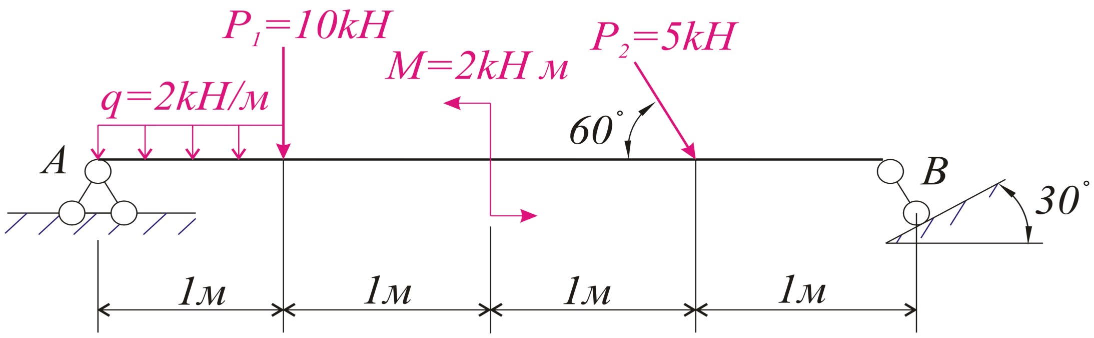


Рис. 1.28. К примеру 1.5. Исходная схема

Решение. Анализируем исходную схему. Согласно данным задания опора A - шарнирно-неподвижная, полная реакция которой R_A, может быть представлена в виде векторной суммы X_A и Y_A. Опора B - шарнирно подвижная, поэтому направление реакции R_B известно - оно перпендикулярно к наклонной поверхности.

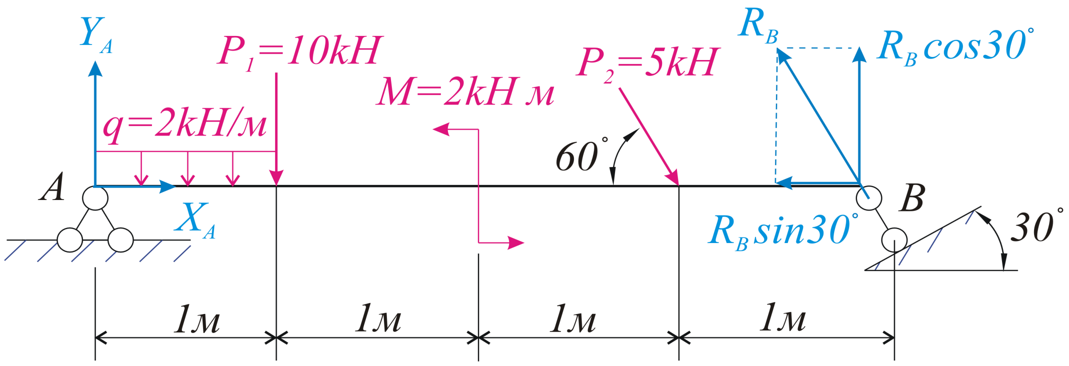


Рис. 1.29. К примеру 1.5. Исходная схема с приложенными неизвестными реакциями

Приведём исходную схему, рис.1.29 к расчётной, рис.1.30, заменяя наклонную силу P_2 (а также реакцию R_B) их горизонтальными и вертикальными составляющими, а также заменяя распределённую нагрузку сосредоточенным эквивалентом Q. Величина последнего равна площади фигуры распределения, а линия действия проходит через центр фигуры распределения.

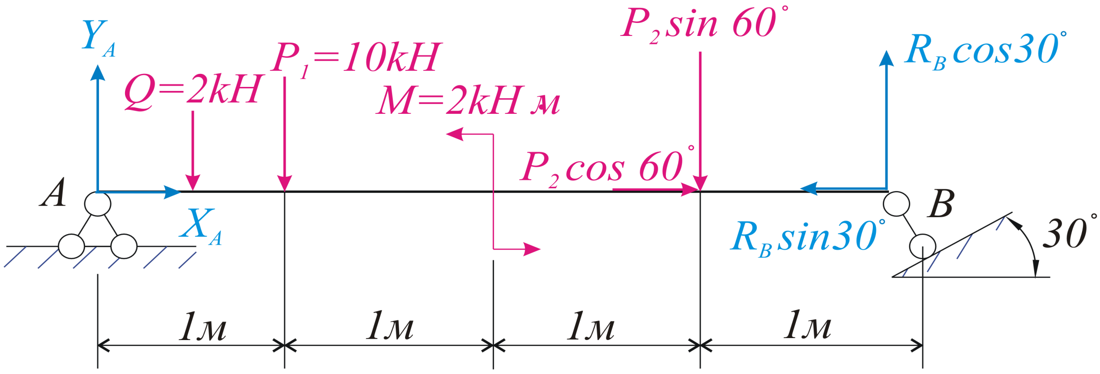


Рис. 1.30. К примеру 1.5. Расчётная схема

Полученная расчётная схема отображает плоскую произвольную систему сил, для которой должно выполняться условие статического равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_A(\vec{F}_i)=0 \\ \sum M_B(\vec{F}_i)=0 \cdot \\ \sum X=0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$\sum M_A(\vec{F}_i)=0.$$

$$-Q\cdot 0{,}5-P_1\cdot 1+M-P_2\cdot\sin 60^\circ\cdot 3+R_B\cdot\cos 30^\circ\cdot 4=0\Rightarrow$$

$$R_B=\frac{Q\cdot 0{,}5+P_1\cdot 1-M+P_2\cdot\sin 60^\circ\cdot 3}{4\cdot\cos 30^\circ}=\frac{2\cdot 0{,}5+10\cdot 1-2+5\cdot\sin 60^\circ\cdot 3}{4\cdot\cos 30^\circ}\Rightarrow$$

$$R_B\approx 6{,}35\ kH.$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$\sum M_B(\vec{F}_i)=0.$$

$$-Y_A\cdot 4+Q\cdot 3{,}5+P_1\cdot 3+M+P_2\cdot\sin 60^\circ\cdot 1=0\Rightarrow$$

$$Y_A=\frac{Q\cdot 3{,}5+P_1\cdot 3+M+P_2\cdot\sin 60^\circ\cdot 1}{4}=\frac{2\cdot 3{,}5+10\cdot 3+2+5\cdot\sin 60^\circ\cdot 1}{4}\Rightarrow$$

$$Y_A=10{,}83\ kH.$$

Рассмотрим третье уравнение:

$$\sum X=0.$$

$$X_A+P_2\cdot\cos 60^\circ-R_B\sin 30^\circ=0\Rightarrow$$

$$X_A=R_B\cdot\sin 30^\circ-P_2\cdot\cos 60^\circ=6{,}35\cdot\sin 30^\circ-5\cdot\cos 60^\circ\Rightarrow$$

$$X_A=0{,}675\ kH.$$

Выполним проверку, для этого используем дополнительное уравнение равновесия: $\sum Y=0$.

$$Y_A-Q-P_1-P_2\cdot\sin 60^\circ+R_B\cdot\cos 30^\circ=0\Rightarrow$$

$10{,}83-2-10-5\cdot\sin 60^\circ+6{,}35\cdot\cos 30^\circ=0 \Rightarrow \quad -5{,}5+5{,}5=0.$ *Истинно.*

В соответствии с правилами векторных сумм и учётом свойств опор покажем направления полных реакций $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$, рис. 1.31.

Значение $R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}=\sqrt{0{,}675^2+10{,}83^2}=10{,}85\,kH$.

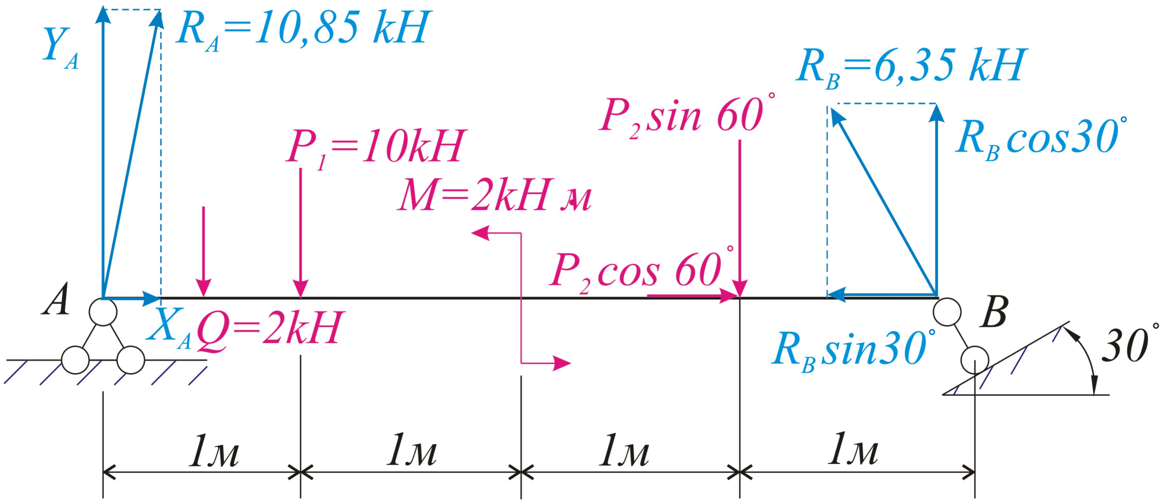


Рис.1.31. К результатам решения примера 1.5

1.1.10. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятую относительно точки O_1 пересечения этой оси с плоскостью:

$$M_z(\vec{F})=M_{O'}(\vec{F}_{xy}), \quad \text{или}$$
$$M_z(\vec{F})=\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|\cos\gamma, \tag{1.26}$$

где $M_z(\vec{F})$ - момент силы $\vec{F}$ относительно оси z; γ - угол между вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ и осью z или это угол между нормалями к плоскостям или угол между плоскостями $\Delta\,O\,A\,B$ и $\Delta\,O_1\,A_1\,B_1$. Момент силы относительно оси, также как и проекция вектора на ось, является скалярной величиной, значение которой можно определить по формуле:

$$M_z(\vec{F})=2\ \text{пл.}\Delta\,O_1\,A_1\,B_1=2\ \text{пл.}\Delta\,OAB\cos\gamma=\pm F_{xy}\,h_{xy}. \tag{1.27}$$

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси z имеет знак плюс, когда поворот, который стремится совершить сила $\vec{F}$, при взгляде с положительного конца оси, виден против хода часовой стрелки, и знак минус - при направлении по ходу часовой стрелки.

Свойства момента силы относительно оси:

1. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

2. Если линия действия силы параллельна оси, то момент относительно этой оси равен нулю.

3. Если вектор силы лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси, то момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между линией действия этой силы и осью.

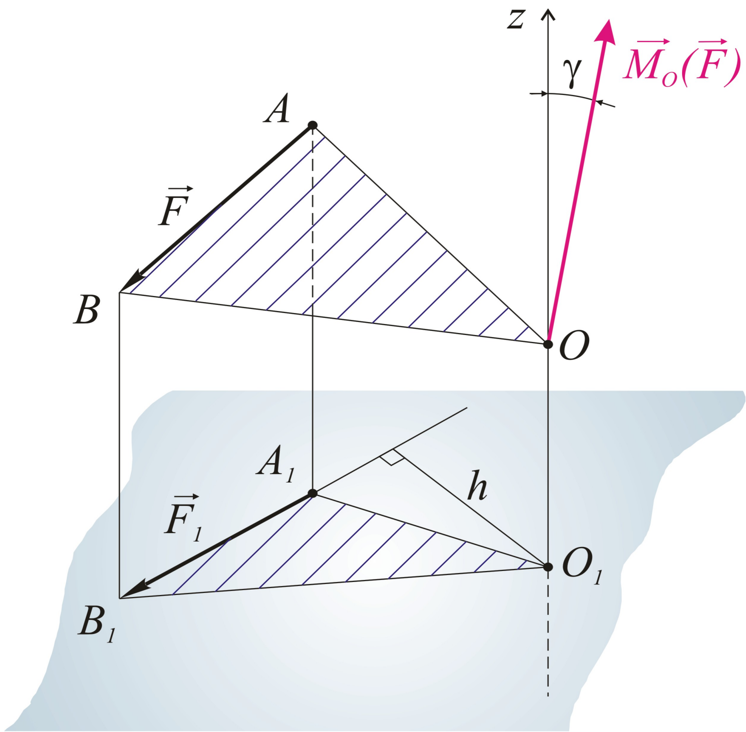


Рис. 1.32. К определению момента силы относительно оси

1.1.11. ТРЕНИЕ

Тело, неровностями поверхностей которого нельзя пренебречь, называется *шероховатым телом*.

Трение подразделяют на *трение покоя* и *трение движения*. Трение движения, в свою очередь, подразделяют на *трение скольжения, трение качения, трение качения с проскальзыванием.*

1.1.12. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

В случае, если одно тело стремится перемещаться по поверхности другого тела, в плоскости соприкосновения возникает сила сопротивления относительному скольжению, называемая *силой трения скольжения*. Законы трения скольжения можно сформулировать следующим образом:

1. Попытка перемещения одного тела по поверхности другого сопровождается возникновением силы трения, которая может принимать значения от нуля до величины, соответствующей предельной силе трения. Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его переместить.

2. Предельная сила трения $F_{пр}$ равна произведению статического

коэффициента трения на нормальную составляющую приложенных сил:

$$F_{пр}=f_0 N. \tag{1.28}$$

Статический коэффициент трения - безразмерная величина.

3. Значение f_0 в определенном диапазоне не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей, но зависит от материала тел, состояния трущихся поверхностей, температуры, наличия и рода смазки.

Значения некоторых коэффициентов трения скольжения:

$f_0=0{,}4\ldots0{,}7$ - дерево по дереву,

$f_0=0{,}15\ldots0{,}25$ - металл по металлу,

$f_0=0{,}027$ - металл по льду.

1.1.13. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Равновесие, имеющее место при $F_{пр}=f_0 N$, называется *предельным равновесием*.

Если $F_{пр}>f_0 N$, сила трения скольжения будет равна:

$$F_{тр}=f\,N, \tag{1.28$'$}$$

где f - динамический коэффициент трения скольжения.

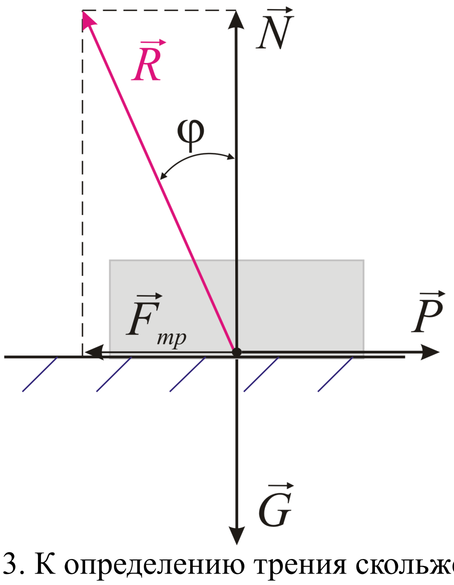


Рис.1.33. К определению трения скольжения

Нормальная реакция $\vec{N}$ опорной поверхности и сила трения $\vec{F}_{тр}$ дают равнодействующую $\vec{R}$, которая называется *полной реакцией опорной поверхности*.

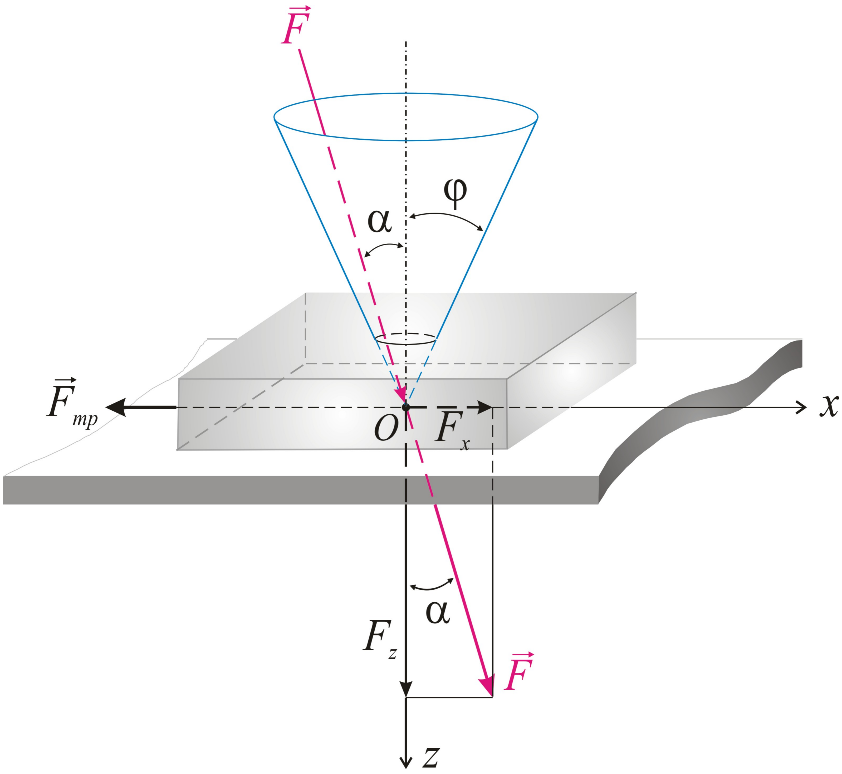


Рис. 1.34. Конус трения

Полная реакция $\vec{R}$ составляет с нормалью угол φ, который называется *углом трения*. Очевидно, что $f_0 = tg\,\varphi$. Если коэффициент трения одинаков по всем направлениям, то множество (геометрическое место) полных реакций образует круговой конус, который называется *конусом трения*.

Физический смысл конуса трения заключается в том, что если линия действия равнодействующей системы сил, приложенных к данному телу, лежащему на шероховатой поверхности, лежит внутри данной виртуальной конической поверхности, то под действием такой системы сил данное тело будет находиться в состоянии покоя.

1.1.14. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА НА НАКЛОННОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для того, чтобы тело на шероховатой поверхности находилось в равновесии под действием только собственного веса (рис. 1.35), необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$f \geqslant tg\,\varphi = tg\,\alpha. \qquad (1.29)$$

Сила трения в таком случае определяется как

$$F_{тр} = f \cdot G \cdot \cos\alpha, \qquad (1.30)$$

где $G = mg$ - вес тела.

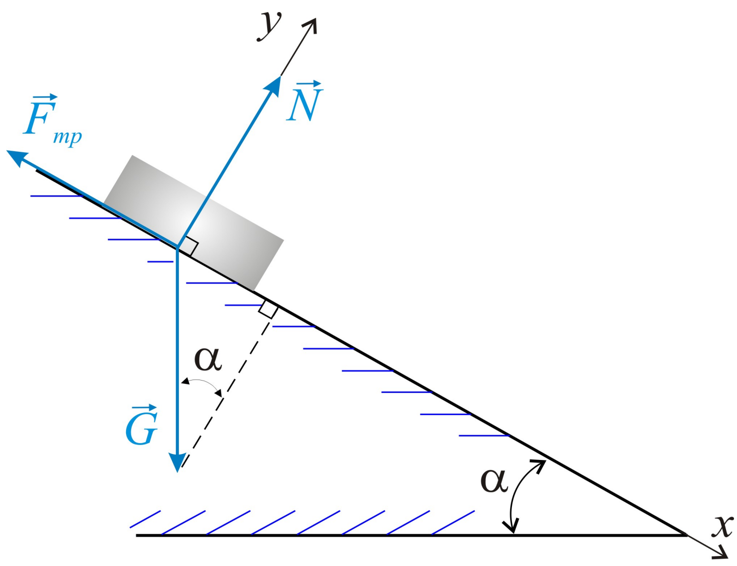


Рис. 1.35. К определению равновесия тела на наклонной шероховатой плоскости

1.1.15. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. Рассмотрим процесс качения цилиндра весом G и радиусом r по горизонтальной опорной поверхности. При приложении весьма малой силы F тело будет продолжать находиться в состоянии покоя. Под действием веса G происходит деформация цилиндра и опорной поверхности в области соприкосновения, при этом происходит перераспределение давлений на опорную поверхность, и полная реакция $N^{/}$ пройдет через точку $O^{/}$ и через точку C.

Составим уравнение равновесия для данной системы сил:

$$\sum M_{O'}\left(\vec{F}_i\right)=0 \Rightarrow$$

$$-F \cdot r + G \cdot k = 0. \tag{1.31}$$

Входящая в уравнение равновесия величина $F \cdot r$ называется *моментом качения* M. Величина $G \cdot k$, также входящая в уравнение, называется *моментом трения* $M_{тр}$. Максимальное значение плеча k - называется *коэффициентом трения качения*. Размерность - в единицах длины: $[м]$.

Некоторые значения коэффициентов трения качения, в [*см*]:
Мягкая сталь по мягкой стали.........................0,005
Закаленная сталь по закаленной стали...........0,001
Чугун по чугуну..0,005
Дерево по дереву...0,03...0,04
Резина по асфальту...0,24
Определяем силу, необходимую для того, чтобы начался процесс качения:

$$F = \frac{k \cdot G}{r}. \quad (1.32)$$

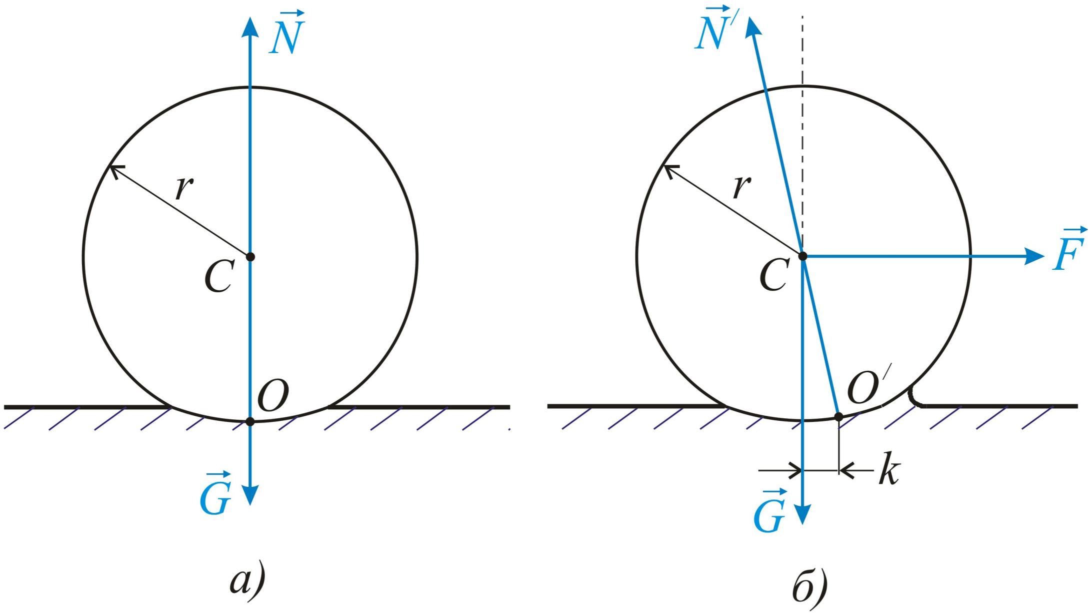


Рис. 1.36. К понятию трения качения: *а*) тело качения на шероховатой опорной поверхности под действием только силы тяжести, *б*) тело качения на шероховатой опорной поверхности, находящееся под действием силы тяжести и весьма малой силы $\vec{F}$, пытающейся осуществить процесс качения

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. $M > M_{тр}$ и $P < F_{тр}$ - только качение;
2. $M < M_{тр}$ и $P > F_{тр}$ - только скольжение;
3. $M > M_{тр}$ и $P > F_{тр}$ - качение с проскальзыванием;
4. $M < M_{тр}$ и $P < F_{тр}$ - состояние покоя.

1.1.16. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПОНЯТИЕ СТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Рассмотрим систему параллельных сил $\vec{F}_1, \ldots \vec{F}_n$, приложенных в точках $A_1, \ldots A_n$ (рис. 1.37). Такая система имеет равнодействующую, модуль которой

$$R = \sum F_k. \quad (1.33)$$

При повороте данной системы сил на некоторый угол α линии действия каждой из представленных сил будут сохранять свою параллельность, также поворачиваясь на угол α.

Модуль равнодействующей в таком случае будет оставаться величиной постоянной, но направление равнодействующей всякий раз будет меняться.

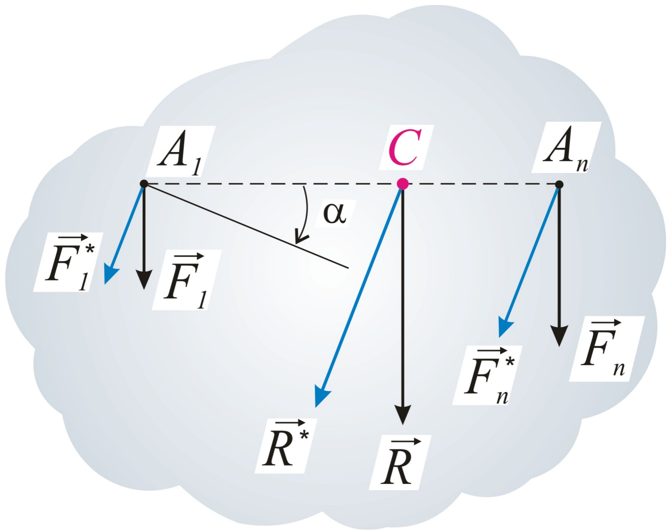


Рис. 1.37. К определению положения центра системы параллельных сил

Можно попытаться определить такую геометрическую точку C, через которую будет проходить линия действия равнодействующей системы при любых её углах поворота. Такая точка C называется *центром параллельных сил.*

Координаты центра параллельных сил определяются при помощи последовательного применения теоремы Вариньона относительно оси. В окончательном виде формулы для пространственной системы параллельных сил:

$$x_C = R^{-1} \cdot \sum F_k x_k; \quad y_C = R^{-1} \cdot \sum F_k y_k; \quad z_C = R^{-1} \cdot \sum F_k z_k. \qquad (1.34)$$

Стационарным силовым полем называется область, где на помещенную в неё материальную точку действует постоянная по времени сила, зависящая от положения точки.

Нестационарным силовым полем называется область, где на помещенную в неё материальную точку действует сила, изменяющаяся по времени и зависящая от положения точки.

В качестве примера стационарного силового поля может выступать поле сил притяжения к Земле и т.д.

На тело, находящееся в окрестности земной поверхности, действует сила тяжести, вектор которой направлен к геометрическому центру Земли.

Силы тяжести можно считать параллельными силами. В таком случае центр параллельных сил тяжести называется центром тяжести твердого тела. Равнодействующая сил тяжести $\vec{P}$ называется весом тела:

$$P = \sum p_k, \qquad (1.35)$$

где p_k - сила тяжести, действующая на k - элементарную частицу твердого тела.

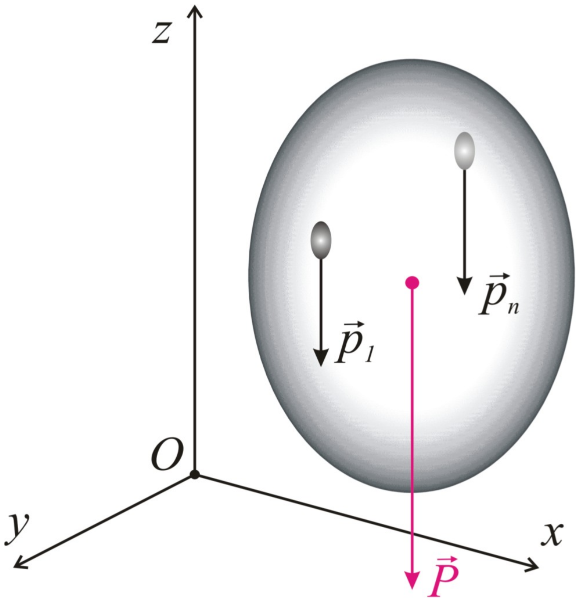


Рис. 1.38. К определению центра тяжести твердого тела

Координаты центра тяжести твердого тела C определяются по формулам:

$$x_C = P^{-1} \cdot \sum p_k x_k; \quad y_C = P^{-1} \cdot \sum p_k y_k; \quad z_C = P^{-1} \cdot \sum p_k z_k. \tag{1.36}$$

Координаты центра тяжести твердого однородного тела (центра тяжести объема) C могут быть выражены через элементарные объемы по формулам:

$$x_C = V^{-1} \cdot \sum V_k x_k; \quad y_C = V^{-1} \cdot \sum V_k y_k; \quad z_C = V^{-1} \cdot \sum V_k z_k. \tag{1.37}$$

При сложной форме твердого тела:

$$x_C = V^{-1} \cdot \int_V x\,dV; \quad y_C = V^{-1} \cdot \int_V y\,dV; \quad z_C = V^{-1} \cdot \int_V z\,dV. \tag{1.37$'$}$$

Координаты центра тяжести для тонкой однородной пластины (плоского тела) могут быть выражены через элементарные площади по формулам:

$$x_C = A^{-1} \cdot \sum A_k x_k; \quad y_C = A^{-1} \cdot \sum A_k y_k; \tag{1.38}$$

При сложной форме плоского твердого тела:

$$x_C = A^{-1} \cdot \int_A x\,dA; \quad y_C = A^{-1} \cdot \int_A y\,dA; \tag{1.38$'$}$$

Координаты центра тяжести для тела, состоящего из k тонких стержней:

$$x_C = L^{-1} \cdot \sum l_k x_k; \quad y_C = L^{-1} \cdot \sum l_k y_k; \quad z_C = L^{-1} \cdot \sum l_k z_k. \tag{1.39}$$

При сложной форме составляющих стержней:

$$x_C = L^{-1}\cdot\int_L x\,dl\,;\quad y_C = L^{-1}\cdot\int_L y\,dl\,;\quad z_C = L^{-1}\cdot\int_L z\,dl\,. \tag{1.39'}$$

Данные по площадям и объемам наиболее широко распространённых видов твердых тел систематизированы и приведены в различных справочниках.

Пример 1.6. Определить координаты центра тяжести C плоской фигуры, в системе осей xOy, рис.1.39.

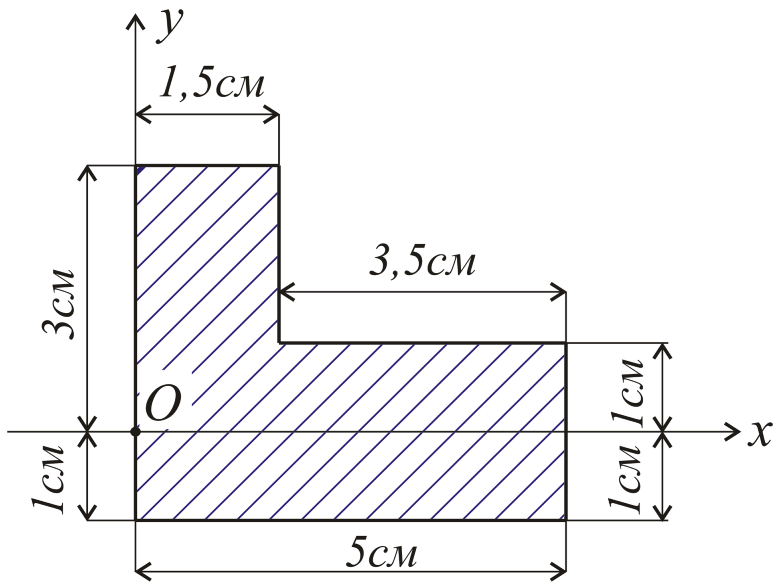


Рис.1.39. К условию примера 1.6

Решение. Рассмотрим сложную плоскую фигуру с площадью A как совокупность более простых плоских фигур $A_1,\ A_2,\ A_3$, рис.1.40.

В таком случае координаты центра тяжести, можно определить при помощи формул:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum(A_i\cdot x_i)}{\sum A_i} = \frac{A_1\cdot x_1 + A_2\cdot x_2 + A_3\cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4{,}5\cdot 0{,}75 + 5\cdot 2{,}5 + 3{,}5\cdot 3{,}25}{4{,}5 + 5 + 3{,}5} \approx 2{,}1\ см\,.$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum(A_i\cdot y_i)}{\sum A_i} = \frac{A_1\cdot y_1 + A_2\cdot y_2 + A_3\cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4{,}5\cdot 1{,}5 + 3{,}5\cdot 0{,}5 - 5\cdot 0{,}5}{4{,}5 + 5 + 3{,}5} \approx 0{,}46\,см\,.$$

Таким образом, центр тяжести C имеет координаты $(2{,}1\,;\ 0{,}46)$.

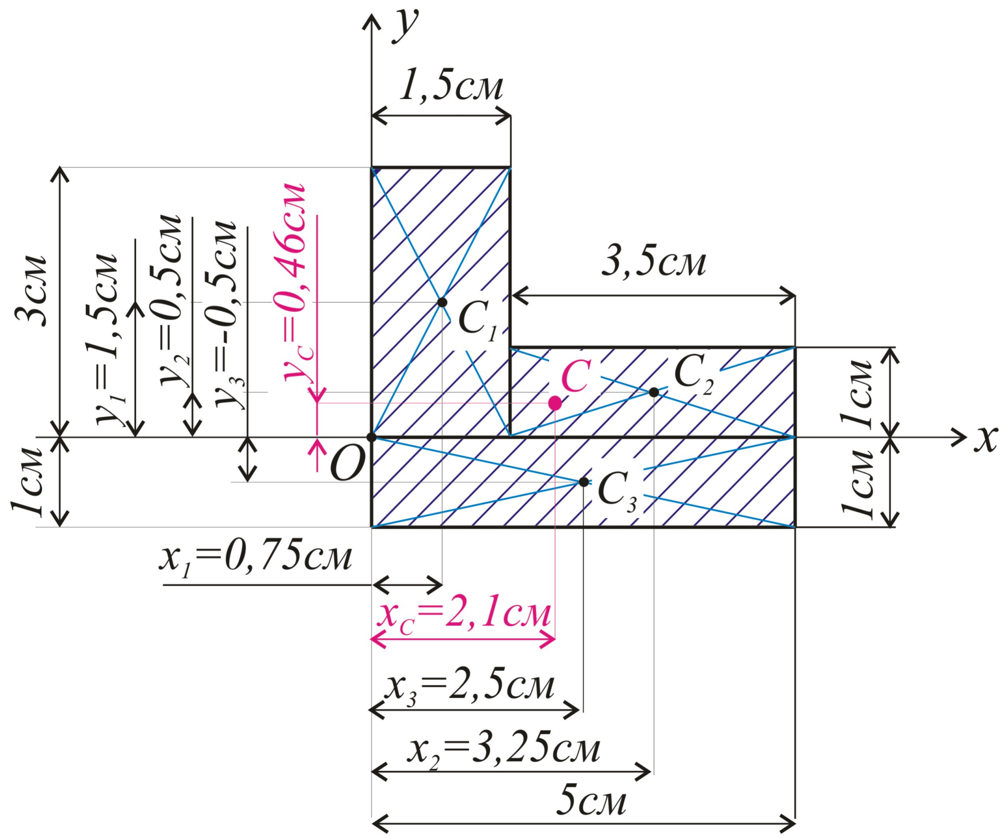


Рис. 1.40. К решению примера 1.6

Пример 1.7. Для плоского тонкого стержня с изогнутой осью, изображённого на рисунке 1.41, определить координаты центра тяжести в системе осей xOy.

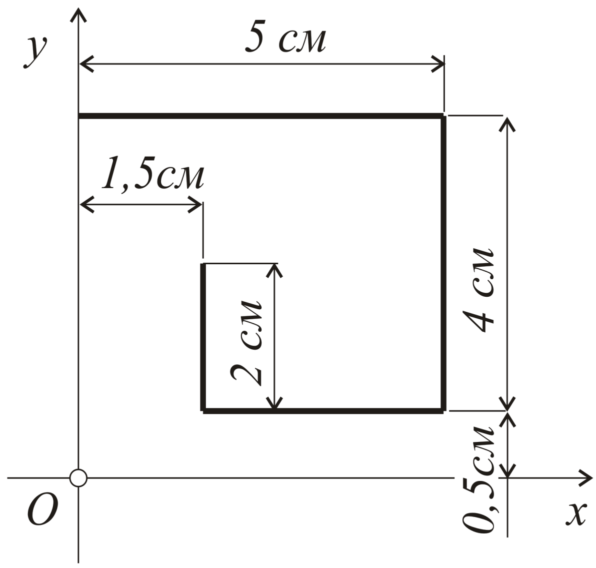


Рис. 1.41. К условию примера 1.7

Решение. Рассмотрим плоский тонкий стержень с изогнутой осью длиной L как совокупность прямолинейных стержней с длинами $l_1, l_2, l_3, l_4,$ и центрами тяжестей в системе осей xOy - C_1, C_2, C_3, C_4. Для определения координат центра тяжести всего ломаного стержня используем следующие формулы:

$$x_C = \frac{S_y}{L} = \frac{\sum(l_i \cdot x_i)}{\sum l_i} = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + l_3 \cdot x_3 + l_4 \cdot x_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} = \frac{2 \cdot 1{,}5 + 3{,}5 \cdot 3{,}25 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2{,}5}{2 + 3{,}5 + 4 + 5} \approx 3{,}23\, см.$$

$$y_C = \frac{S_x}{L} = \frac{\sum(l_i \cdot y_i)}{\sum l_i} = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2 + l_3 \cdot y_3 + l_4 \cdot y_4}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \Rightarrow$$

$$y_C = \frac{2 \cdot 1{,}5 + 3{,}5 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 4{,}5}{2 + 3{,}5 + 4 + 5} \approx 2{,}57\, см.$$

Таким образом, центр тяжести C имеет координаты $(3{,}23\, см;\ 2{,}57\, см)$.

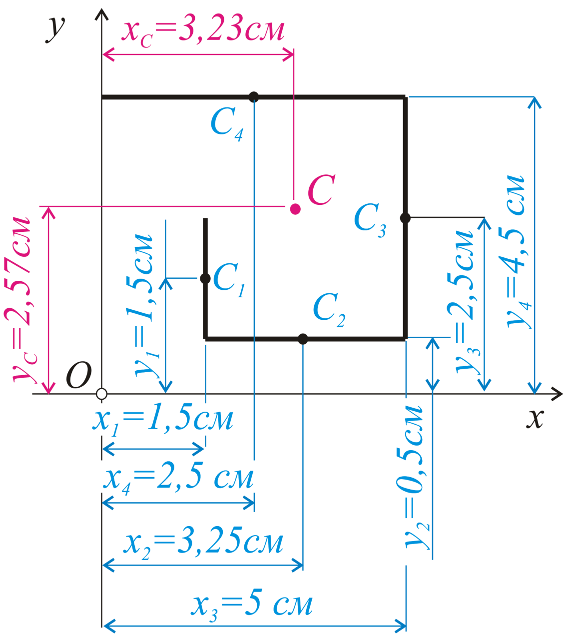


Рис.1.42. К результатам решения примера 1.7

Глава 2 КИНЕМАТИКА

1.2.1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика - это раздел теоретической механики, изучающий движение твердых тел без учета действующих на них сил. В общем случае, движение разделяют на движение материальной точки и движение твердых тел. В кинематике изучение движения, как категории, начинают с изучения движения *точки*, то есть такого тела, размеры которого настолько малы по отношению к рассматриваемой системе, что ими пренебрегают. При этом выделяют такие кинематические характеристики движения, как *перемещение(траектория)*, измеряемое в СИ в $[м]$; *скорость(линейная)*, измеряемая в СИ в $[м/с]$; и *ускорение*, измеряемое в СИ в $[м/с^2]$. Для задания движения точки применяются три способа: векторный, координатный и естественный.

Пусть точка M, движение которой необходимо определить, перемещаясь в пространстве, описывает *траекторию* AB.

При *векторном способе* задания движения (рис. 1.43), положение точки в пространстве определяется её радиусом-вектором в системе декартовых координат:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,. \tag{1.40}$$

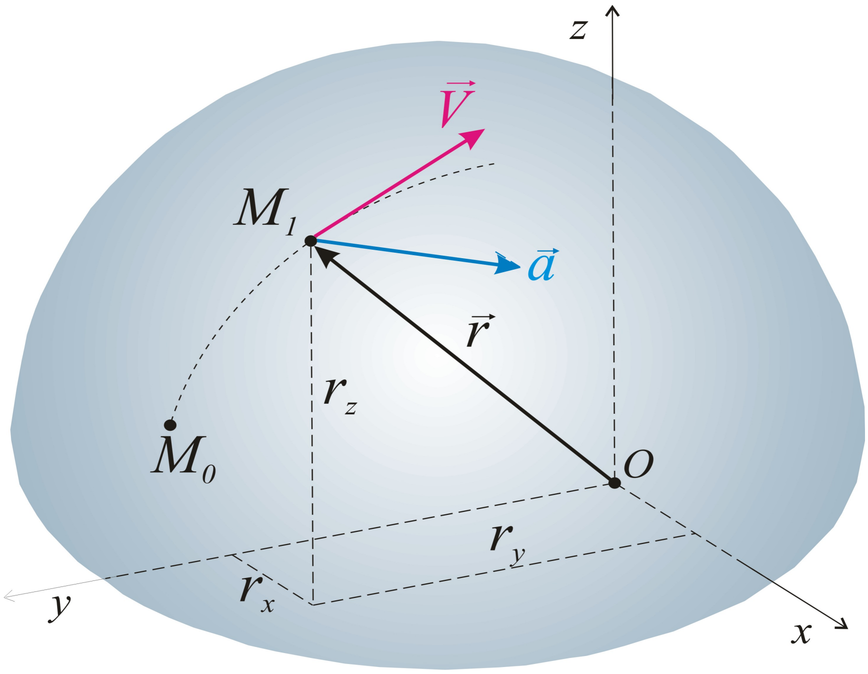


Рис 1.43. Векторный способ задания движения точки

В таком случае закон, по которому изменяется радиус-вектор, будет являться законом движения точки:

$$\vec{r} = \vec{f}\,(t)\,. \tag{1.40$'$}$$

Скорость точки M можно определить как

$$\vec{V} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t}\,, \tag{1.41}$$

а ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{V}}{d\,t} = \frac{d^2\,\vec{r}}{d\,t^2}\,. \tag{1.42}$$

Вектор скорости точки $\vec{V}$ всегда направлен по касательной к траектории движения точки в сторону её движения, (т.е. он определяет направление её движения) (см. рис. 1.43), а вектор ускорения - в сторону вогнутости её траектории.

При *координатном способе* задания движения (рис. 1.44) положение точки в пространстве определяется ее тремя координатами $x\,,\,y\,,\,z$ относительно предварительно заданной декартовой системы координат. В общем случае при движении точки каждая из её координат будет непрерывно изменяться с течением времени.

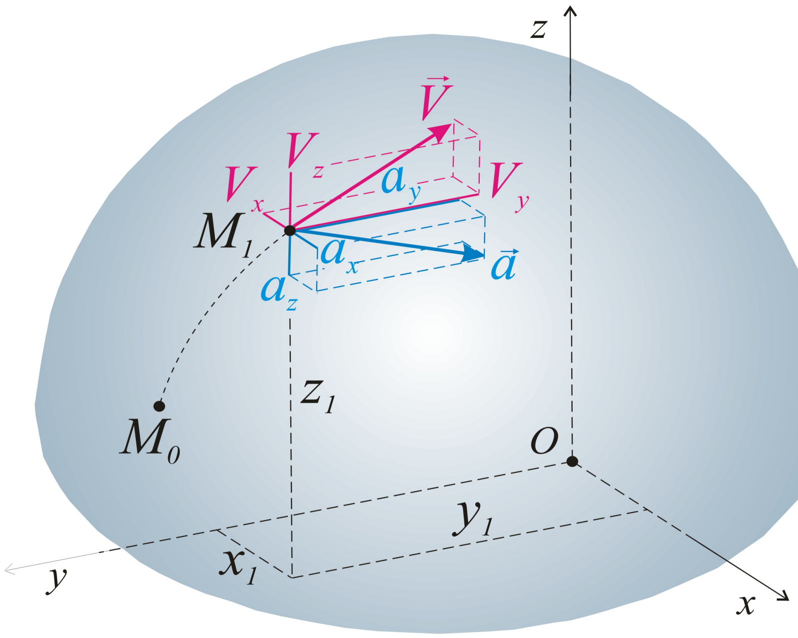


Рис. 1.44. Координатный способ задания движения

Таким образом, *уравнения движения точки в координатной форме* можно представить в виде системы уравнений её движения по отношению к параметрам x, y, z, зависящим от времени (системы параметрических уравнений):

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}. \tag{1.43}$$

Координатный и векторный способы задания движения являются между собой взаимосвязанными, так как радиус-вектор может быть представлен в системе декартовых координат следующим образом:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \tag{1.44}$$

В таком случае, $\vec{V} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \dfrac{d\,x}{d\,t} \cdot \vec{i} + \dfrac{d\,y}{d\,t} \cdot \vec{j} + \dfrac{d\,z}{d\,t} \cdot \vec{k}$,

т.е.:

$$V_x = \frac{d\,x}{d\,t},\; V_y = \frac{d\,y}{d\,t},\; V_z = \frac{d\,z}{d\,t}. \tag{1.45}$$

Модуль вектора скорости можно определить как

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \tag{1.46}$$

а его положение - через направляющие косинусы:

$$\cos\alpha_1 = \frac{V_x}{V}; \cos\beta_1 = \frac{V_y}{V}; \cos\gamma_1 = \frac{V_z}{V}. \qquad (1.47)$$

По аналогии:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\cdot\vec{k},$$

т.е.:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}, a_y = \frac{dV_y}{dt}, a_z = \frac{dV_z}{dt}. \qquad (1.48)$$

Модуль вектора ускорения можно определить как

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (1.49)$$

а его положение - через направляющие косинусы:

$$\cos\alpha_2 = \frac{a_x}{a}; \cos\beta_2 = \frac{a_y}{a}; \cos\gamma_2 = \frac{a_z}{a}. \qquad (1.50)$$

Естественный способ задания движения применяется (рис.1.45), как правило, в случаях, когда траектория движения известна изначально.

При естественном способе задания движения точки её положение в пространстве определяется криволинейной координатой $\breve{s} = OM$.

Закон её изменения во времени является *законом движения точки в естественной форме*.

В отличие от координатного способа задания движения, кинематические характеристики точки рассматриваются не в отношении неподвижных декартовых осей x, y, z, а в отношении подвижной системы естественных осей (осей естественного трехгранника τ, n, b), совершающей движение вместе с рассматриваемой точкой по заданной траектории.

Скорость точки M при естественном способе задания движения определяется как

$$V = \frac{ds}{dt}, \qquad (1.51)$$

Ускорение $\vec{a}$ точки M при естественном способе задания движения представляется в виде составляющих $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ ускорений, взятых по взаимно перпендикулярным естественным осям $\tau, n,$ т.е.:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.52)$$

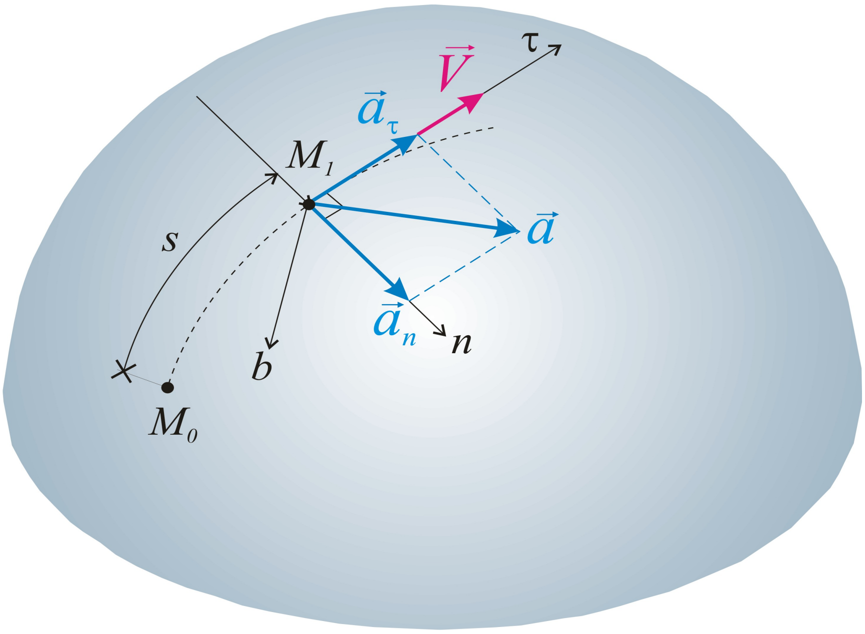


Рис. 1.45. Естественный способ задания движения

Абсолютную величину вектора *касательного* ускорения $\vec{a}_\tau$ можно определить следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}. \tag{1.53}$$

Касательное ускорение может принимать положительные, отрицательные значения или быть равным нулю.

Вектор касательного ускорения точки $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории (по естественной оси τ) в сторону движения точки (по направлению вектора скорости $\vec{V}$) в том случае, если $a_\tau > 0$, и по касательной к траектории (по естественной оси τ) в сторону, противоположную движению, если $a_\tau < 0$.

Вектор *нормального* ускорения точки $\vec{a}_n$ всегда перпендикулярен касательной к траектории τ и направлен в сторону вогнутости траектории по радиусу её кривизны в данной точке (по естественной оси n).

Абсолютное значение вектора $\vec{a}_n$ можно определить как

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \tag{1.54}$$

где ρ - радиус кривизны траектории (например, $\rho = r$ в любой геометрической точке траектории при движении точки по окружности радиуса r).

1.2.2. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1. При *прямолинейном движении* $\rho=\infty \Rightarrow a_n=\frac{V^2}{\rho}=0$, тогда полное ускорение точки $a=a_\tau=\frac{dV}{dt}$. На основание этого можно сделать вывод о том, что касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине.

2. *Равномерным криволинейным движением* называется такое криволинейное движение точки, при котором величина скорости V=*const.* Тогда $a_\tau=\frac{dV}{dt}=0$, а полное ускорение $a=a_n=\frac{V^2}{\rho}$. Соответственно, вектор полного ускорения будет направлен по нормали к траектории точки. На основании этого делаем вывод о том, что нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Закон равномерного криволинейного движения выглядит следующим образом:

$$s=s_0+Vt. \qquad (1.55)$$

В случае, когда $s_0=0 \Rightarrow \quad s=Vt$ и $V=\frac{s}{t}$.

3. *Равномерное прямолинейное движение.* В этом случае $V=const$, $a=a_\tau=a_n=0$.

4. *Равнопеременным криволинейным движением* называется такое криволинейное движение, при котором $a_\tau=const$. Закон этого движения выглядит следующим образом:

$$s=s_0+V_0 t+\frac{a_\tau t^2}{2}. \qquad (1.56)$$

Скорость точки при этом можно определить как

$$V=V_0+a_\tau t. \qquad (1.57)$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, такое движение является ускоренным, если убывает - замедленным. Если касательное ускорение постоянно и положительно, движение точки будет *равноускоренным*, если постоянно и отрицательно, то движение будет *равнозамедленным*.

5. *Гармонические колебания* - это такое движение точки, при котором расстояние x начала координат O меняется по закону, содержащему периодическую функцию, например: $x=A\cos kt$, где $A, k=const$. Точка при этом совершает колебания между начальным и конечным положениями *1* и

2 (рис. 1.46). Величина A, равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний O, называется *амплитудой* (В качестве примера рассмотрен частный случай гармонических колебаний точки вдоль оси x). Промежуток времени T, в течение которого точка совершает колебание, называется *периодом колебаний*.

$$T = \frac{2\pi}{k}, \tag{1.58}$$

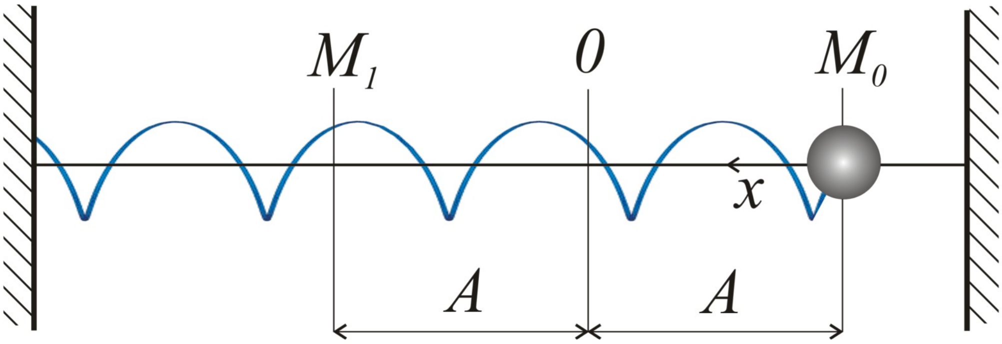


Рис. 1.46. Пример прямолинейного колебательного движения точки

Беря производные $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$, найдем значения скорости и ускорения точки (в случае прямолинейных колебательных движений):

$$V = V_x = -Ak\sin kt, \quad a = a_x = -Ak^2\cos kt. \tag{1.59}$$

Таким образом, при таком движении скорость, ускорение точки меняются по гармоническому закону. Гармонические колебания будут соответствовать также и закону $x = A\sin kt$. В таком случае движение точки начнётся из самого центра колебаний - точки O.

Гармонические колебания могут осуществляться по любой криволинейной траектории. Все вышеуказанное будет соответствовать и этому случаю, только полное ускорение будет определяться как $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, где $a_n = \frac{V^2}{\rho}$.

Пример 1.8

Движение точки M в пространстве задано радиусом-вектором $\vec{r} = (0{,}5t^2+1)\vec{i} - 0{,}4t^3\vec{j} + 2t\vec{k}$, $[м]$. Определить модуль вектора скорости и вектора ускорения в момент времени $t = 1c$, а также угол наклона вектора ускорения в этот момент времени к оси Oy.

Решение: Учитывая взаимосвязь векторного и координатного способа задания движения, учтём, что уравнения проекций радиуса-вектора на оси являются параметрическими уравнениями движения точки M:

$$r_x = X = (0{,}5t^2+1);$$

$$r_y = Y = -0{,}4\,t^3;$$
$$r_z = Z = 2t;$$

Продифференцировав данные уравнения движения, определим модуль вектора скорости точки:

$V_x = \dot{r}_x = \dot{X} = (0{,}5\,t^2 + 1)^{/} = t$; при $t = 1\,c \to V_x = 1\,м/c$.

$V_y = \dot{r}_y = \dot{Y} = (-0{,}4\,t^3)^{/} = 1{,}2\,t^2$; при $t = 1\,c \to V_y = 1{,}2\,м/c$.

$V_z = \dot{r}_z = \dot{Z} = (2t)^{/} = 2\,м/c = const$.

Так как $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \Rightarrow \quad V = \sqrt{1^2 + 1{,}2^2 + 2^2} \Rightarrow \; V \approx 2{,}54\,м/c$.

Продифференцировав исходные уравнения ещё один раз, определим модуль вектора ускорения точки:

$a_x = \ddot{r}_x = \ddot{X} = (0{,}5\,t^2 + 1)^{//} = (t)^{/} = 1\,м/c^2 = const$;

$a_y = \ddot{r}_y = \ddot{Y} = (-0{,}4\,t^3)^{//} = (1{,}2\,t^2)^{/} = 2{,}4\,t$; При $t = 1\,c \to a_y = 2{,}4\,м/c^2$.

$a_z = \ddot{r}_z = \ddot{Z} = (2t)^{//} = (2)^{/} = 0$.

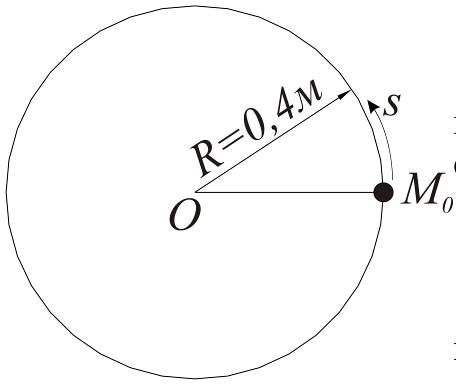
Так как $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \Rightarrow \quad a = \sqrt{1^2 + 2{,}4^2 + 0^2} \Rightarrow \; a = 2{,}6\,м/c^2$.

Для определения угла наклона вектора ускорения к оси Oy воспользуемся выражением для второго направляющего косинуса вектора ускорения:

$$\cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}; \quad \text{где} \quad \sphericalangle\beta_1 = (\vec{a} \wedge Oy) \Rightarrow \; \sphericalangle\beta_1 = \arccos\left(\frac{2{,}4}{2{,}6}\right) = 22{,}6^{\circ}.$$

Таким образом, необходимые данные задачи были определены.

Пример 1.9



Движение точки M происходит в плоскости, по окружности радиуса $R = 40\,см$ согласно закону

$$\breve{s} = 0{,}2\,t^3 - \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 0{,}8\,t \quad [м], \quad \text{рис. 1.47.}$$

Определить направление и модуль вектора полного ускорения в момент времени $t = 1\,c$.

Рис. 1.47. К условию примера 1.9

Решение: Пользуясь данными рисунка, установим положение точки M в заданный момент времени, для этого вначале определим криволинейную координату $\breve{s}$:

$$\breve{s} = 0{,}2 \cdot 1^3 - \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{3}\right) + 0{,}8 \cdot 1 \Rightarrow \quad \breve{s} = 0{,}5\,м.$$

Определим значение центрального угла φ, соответствующего длине дуги $\breve{s} = 0{,}5\,м$.

$\measuredangle\varphi=\frac{\breve{s}}{R}\Rightarrow\ \varphi=\frac{0{,}5}{0{,}4}=1{,}25\ рад\approx71{,}25^{\circ}.$

Отложим этот угол от начального положения в направлении движения и получим истинное положение точки M в заданный момент времени.

Способ задания движения в этой задаче является естественным, поэтому для определения скорости и касательного ускорения поэтапно продифференцируем исходный закон движения.

$$V=\frac{ds}{dt}=\left(0{,}2t^3-\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+0{,}8t\right)^{/}=0{,}6t^2+\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}+0{,}8;$$

При $t=1c\Rightarrow$

$$V=0{,}6\cdot1^2+\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi\cdot1}{3}+0{,}8\Rightarrow\ V\approx2{,}3\ м/с.$$

$$a_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}=\left(0{,}2t^3-\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+0{,}8t\right)^{//}=\left(0{,}6t^2+\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{3}+0{,}8\right)^{/}\Rightarrow$$

$$a_\tau=1{,}2t+\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3};\ \text{При}\ \ t=1c\Rightarrow\ \ a_\tau=1{,}2\cdot1+\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi\cdot1}{3}\Rightarrow\ \ a_\tau\approx1{,}75\ м/с.$$

Нормальное ускорение точки определим по формуле: $a_n=\frac{V^2}{\rho}\Rightarrow$

$$a_n=\frac{2{,}3^2}{0{,}4}\Rightarrow\ \ a_n\approx13{,}23\ м/с^2.$$

Модуль полного ускорения определим по формуле $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}\Rightarrow$

$$a=\sqrt{1{,}75^2+13{,}23^2}\Rightarrow\ \ a=13{,}34\ м/с^2.$$

На рисунке изобразим в выбранном масштабе полученные вектора.

Вектор скорости $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки (перпендикулярно радиусу), вектор касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории в одну сторону с вектором скорости (так как $a_\tau>0$).

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$ направлен перпендикулярно вектору касательного ускорения, в сторону вогнутости траектории.

Для удобства можно использовать разные масштабы для векторов скорости и ускорения.

В отношении векторов ускорения целесообразно определить отношение между его большей и меньшей составляющей.

В нашем случае: $\frac{a_n}{a_\tau}=\frac{13{,}23}{1{,}75}\approx7{,}5.$

Полученное отношение говорит о том, что откладываемая длина $\vec{a}_n$ должна быть больше аналогичной длины $\vec{a}_\tau$ в 7,5 раза.

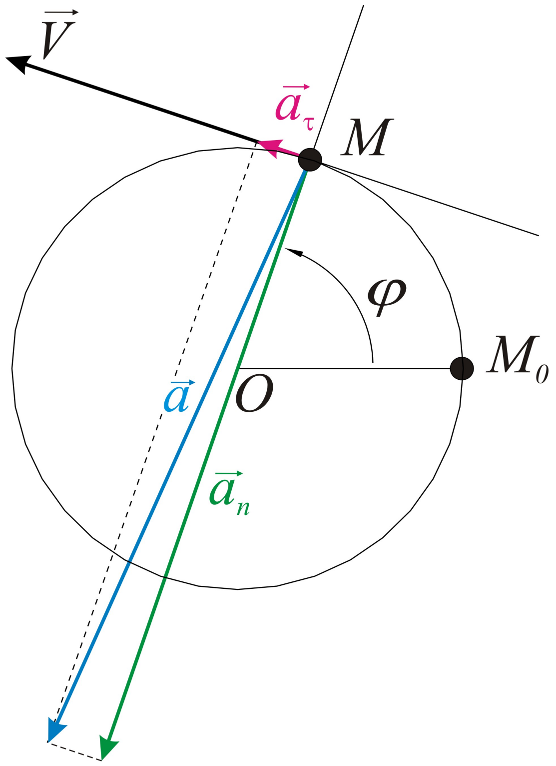


Рис. 1.48. К решению примера 1.9

Пример 1.10

Точка M движется в плоскости согласно уравнениям

$$\begin{cases} x=1-5\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \\ y=2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)+3 \end{cases}, [см]$$

Определить траекторию движения точки, вектор скорости и ускорения в момент времени $t=1c$.

Решение:

Из параметрических уравнений исключаем t путем последовательного преобразования исходных уравнений, получая зависимость вида $y=f(x)$.

$$\begin{cases} x=1-5\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \\ y=2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=-5\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \\ y-3=2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2=(-5)^2\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \\ (y-3)^2=2^2\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{5^2}=\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \\ \dfrac{(y-3)^2}{2^2}=\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{2^2}=1.$$

Последнее выражение является уравнением эллипса, с центром в точке $O_1(1\,;\,3)$ и размерами полуосей $a=5\,см$ и $b=2\,см$.

Положение точки $M(x_M\,;\,y_M)$ в заданный момент времени $t=1\,с$ определится подстановкой данного значения в исходные параметрические уравнения.

$$x=1-5\sin\left(\frac{\pi\,t}{6}\right)\Rightarrow \quad x_M=1-5\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow \quad x_M=-1{,}5\,см;$$

$$y=2\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{6}\right)+3\Rightarrow \quad y_M=2\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{6}\right)+3\Rightarrow \quad y_M=4{,}732\,см.$$

Таким образом, в заданный момент времени $t=1\,с$ точка занимает положение: $M(-1{,}5\,см;\;4.732\,см)$.

Определим вектор скорости точки в заданный момент времени. Для этого дифференцируем параметрические уравнения, получая проекции вектора скорости по осям, а затем определим модуль вектора скорости в целом. Положение вектора скорости определится путем геометрического сложения его проекций, отложенных от точки M (положительные проекции должны быть отложены от точки M в сторону положительных направлений осей и наоборот).

$$\begin{cases} V_x=\dot{x}=\left(1-5\sin\left(\frac{\pi\,t}{6}\right)\right)^{/}\Rightarrow \quad V_x=-\frac{5\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi\,t}{6}\right) \\ V_y=\dot{y}=\left(2\cos\left(\frac{\pi\,t}{6}\right)+3\right)^{/}\Rightarrow \quad V_y-\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi\,t}{6}\right) \end{cases},\ \ [см/с].$$

В момент времени $t=1\,с$:

$$V_x=-\frac{5\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{6}\right)\Rightarrow \quad V_x=-2{,}67\,см/с.$$

$$V_y=-\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi\cdot 1}{6}\right)\Rightarrow \quad V_y=-0{,}524\,см/с.$$

Модуль вектора скорости можно определить как $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}\Rightarrow$

$$V=\sqrt{(-2{,}67)^2+(-0{,}524)^2}\Rightarrow \quad V=2{,}72\,см/с.$$

Определим вектор ускорения точки в заданный момент времени. Для этого дважды дифференцируем параметрические уравнения, получая проекции вектора ускорения по осям, а затем определим модуль вектора ускорения в целом. Положение вектора ускорения определится путем геометрического сложения его проекций, отложенных от точки M (положительные проекции должны быть отложены от точки M в сторону положительных направлений осей и наоборот).

$$\begin{cases} a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = \left(1 - 5\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)\right)^{//} = \left(-\dfrac{5\pi}{6}\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)\right)^{/} \Rightarrow \quad a_x = \dfrac{5\pi^2}{36}\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \left(2\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) + 3\right)^{//} = \left(-\dfrac{\pi}{3}\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)\right)^{/} \Rightarrow \quad a_y = -\dfrac{\pi^2}{18}\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right) \end{cases}, \quad [см/с^2].$$

В момент времени $t = 1\,с$:

$$a_x = \frac{5\pi^2}{36}\sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) \Rightarrow \quad a_x = 0{,}685\,см/с^2.$$

$$a_y = -\frac{\pi^2}{18}\cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) \Rightarrow \quad a_y = -0{,}475\,см/с^2.$$

Модуль вектора ускорения можно определить как $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow$

$$a = \sqrt{(0{,}685)^2 + (-0{,}475)^2} \Rightarrow \quad a = 0{,}83\,см/с^2.$$

Вектор ускорения можно также представить в виде векторной суммы

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где $a_\tau = \dfrac{(V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y)}{V} = \dfrac{-2{,}62 \cdot 0{,}685 + (-0{,}524)\cdot(-0{,}475)}{2{,}72} \quad \Rightarrow a_\tau = -0{,}57\,см/с^2;$

$$a_n = \frac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V} = \frac{|(-2{,}62)\cdot(-0{,}475) - (-0{,}524)\cdot 0{,}685|}{2{,}72} \Rightarrow \quad a_n = 0{,}59\,см/с^2.$$

Тогда $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \Rightarrow \quad a = \sqrt{(-0{,}57)^2 + 0{,}59^2} \Rightarrow \quad a \approx 0{,}83\,см/с^2.$

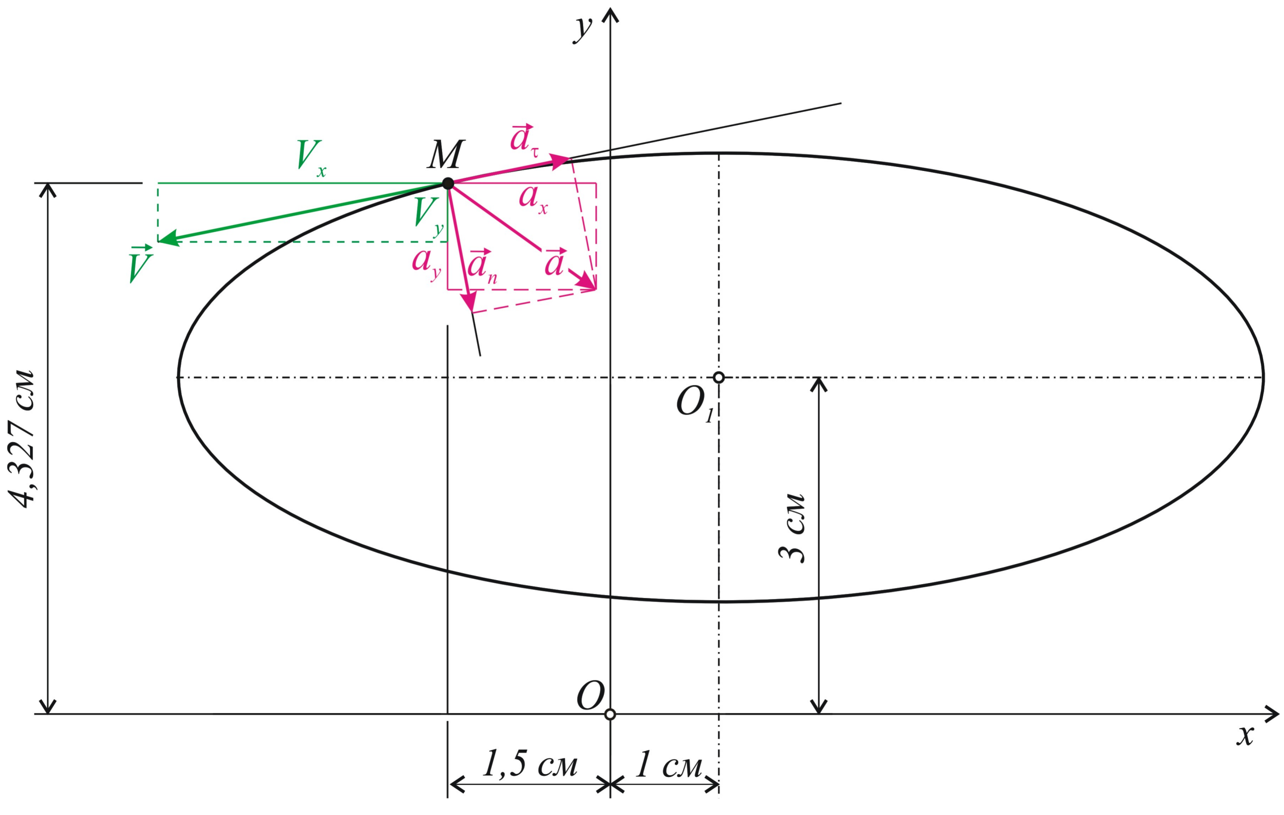


Рис. 1.49. К расчёту примера 1.10

Значение a фактически совпадает с полученным ранее, что свидетельствует о правильности расчёта. Вектор касательного ускорения направлен по касательной траектории движения точки (по линии действия вектора скорости $\vec{V}$) в противоположную ему сторону (т.к. $a_\tau < 0$), поэтому наше движение в данный момент времени будет замедленным. Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$ перпендикулярен вектору касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ и направлен в сторону вогнутости траектории (к центру радиуса кривизны траектории движения в данный момент времени). В выбранных масштабах отобразим траекторию движения точки и её кинематические характеристики.

1.2.3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, сохраняет параллельность своему первоначальному положению и после перемещения (рис.1.50). При поступательном движении тела траектории движения его точек могут быть не только прямыми, но и кривыми линиями.

При поступательном движении все точки тела перемещаются по одинаковым по форме траекториям, имеют в любой момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

При поступательном движении равная для всех точек тела скорость V называется скоростью поступательного движения тела, а ускорение a - ускорением поступательного движения тела.

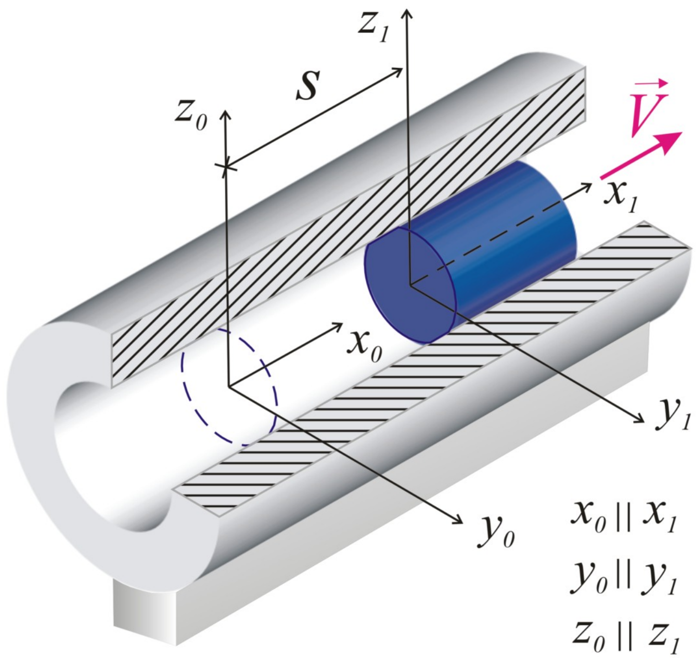


Рис. 1.50. Поступательное движение ползуна вдоль цилиндрической направляющей

Понятие скорости и ускорения тела имеют смысл только при поступательном движении.

1.2.4. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие данному телу или неизменно с ним связанные, остаются все время неподвижными. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются *угловое перемещение* φ, *угловая скорость* ω и *угловое ускорение* ε.

Рассмотрим данные понятия, используя схему, изображенную на рис. 1.51. Проходящая через неподвижные точки A и B прямая z называется *осью вращения*. Для определения положения вращающегося тела проведем плоскость I - неподвижную, и плоскость II - подвижную, жестко связанную с вращающимся телом.

Положение тела в любой момент времени будет определяться углом φ между этими двумя плоскостями, взятым с соответствующим знаком, называемым *угловым перемещением* и измеряемым в СИ в $[рад]$.

Угол φ считается положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки, видимого со стороны положительного направления оси вращения z.

Таким образом, для определения положения тела в любой момент времени можно использовать закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси: $\varphi = f(t)$.

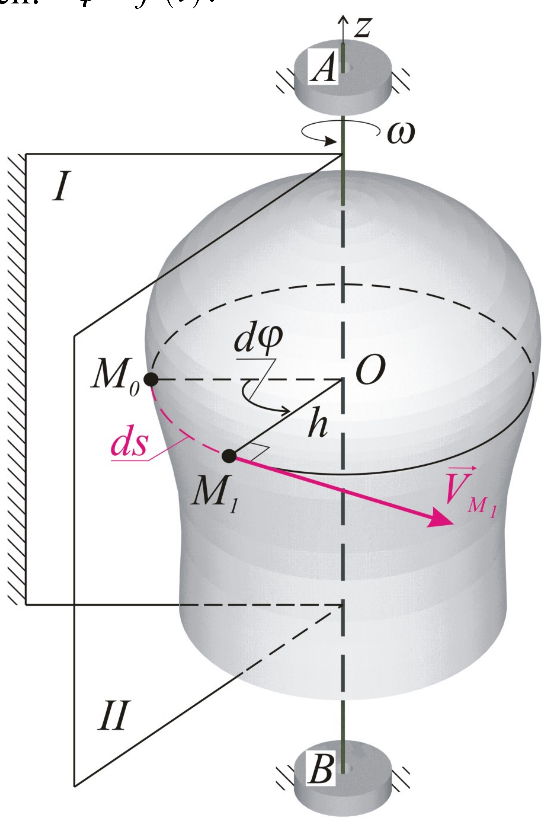


Рис. 1.51. Вращение твердого тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим понятие *угловой скорости* ω. Мгновенная угловая скорость определяется по формуле:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.60}$$

Таким образом, величина угловой скорости в данный момент времени равна первой производной от угла поворота по времени.

При вращении против хода часовой стрелки, видимого с положительного направления оси вращения, считается, что $\omega > 0$; и $\omega < 0$, когда вращение видимо происходящим по ходу часовой стрелки. Размерность угловой скорости $\left[сек^{-1}\right]$ или $\left[рад/сек\right]$. В технике для характеристики равномерного вращения используют техническую величину - *частоту вращения* n, измеряемую в $\left[\frac{об}{мин}\right]$ или $\left[мин^{-1}\right]$. Угловая скорость ω связана с частотой вращения n следующей зависимостью:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1\, n. \tag{1.61}$$

Угловую скорость можно изобразить виде вектора $\vec{\omega}$, модуль которого равен ω и который направлен параллельно оси вращения тела в сторону, откуда его вращение видимо происходящим против часовой стрелки.

Рассмотрим понятие *углового ускорения* ε. Мгновенное угловое ускорение определяется согласно выражению:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad \omega = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.62}$$

С учетом существующей дифференциальной зависимости угловой скорости и углового перемещения угловое ускорение можно выразить как

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1.63}$$

Таким образом, величина углового ускорения тела в данный момент времени равна первой производной угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени. Размерность углового ускорения в системе СИ - $\left[сек^{-2}\right]$ или $\left[рад/сек^2\right]$. Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение считается ускоренным, а если убывает – замедленным. Угловое ускорение тела можно изобразить виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного параллельно оси вращения.

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 1.52, *а*), и направлено противоположно - в случае замедленного вращения (см. рис. 1.52, *б*).

Следует заметить, что угловая скорость и ускорение одинаковы в любых точках твердого тела. Являясь векторными величинами, они могут быть приложены к любой точке данного тела в полном соответствии с правилами выбора их направлений. Если угловая скорость $\omega = const$ $(d\varphi = \omega\, dt)$, то вращение тела считается равномерным.

Закон *равномерного вращения* по своей структуре аналогичен закону при равномерном поступательном движении:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t. \tag{1.64}$$

Если $\varphi_0 = 0$, то:

$$\varphi = \omega t, \ \omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{1.65}$$

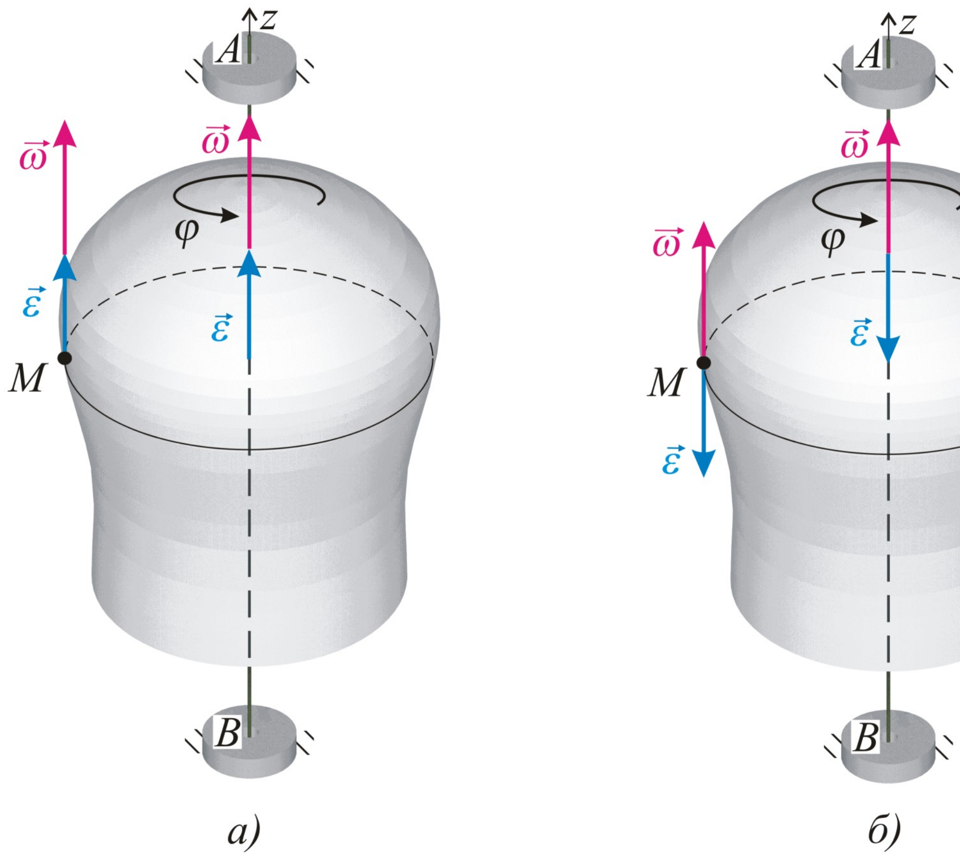


Рис. 1.52. Векторное представление угловой скорости и ускорения твердого тела: *а*) при ускоренном вращении; *б*) при замедленном вращении

Для *равнопеременного вращательного движения* (в случае $\varepsilon = const$) закон движения примет вид:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1.66}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{1.67}$$

Если величины ω, ε одного знака, вращение будет *равноускоренным*, разных - *равнозамедленным*.

Рассмотрим понятие *линейной* или *окружной скорости* точки тела. Величина линейной скорости точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости тела ω на расстояние h этой точки до оси вращения.

$$V = h \cdot \omega. \tag{1.68}$$

Ускорения точек тела, исходя из формул: $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$; $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$; $\rho = h$, определяются:

$$a_\tau = h \cdot \frac{d\omega}{dt} = h\varepsilon;\ a_n = \frac{h^2 \omega^2}{h} = h\omega^2. \tag{1.69}$$

Направления векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ аналогичны направлениям этих величин при рассмотрении перемещений материальной точки (см. п. 1.2.1).

Полное ускорение с учётом формулы $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ определяется следующим образом:

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{1.70}$$

Полные ускорения всех точек вращающегося тела прямо пропорциональны расстояниям от оси вращения и образуют один угол μ с радиусами описываемых ими окружностей, величину которого можно определить:

$$\mu = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right). \tag{1.71}$$

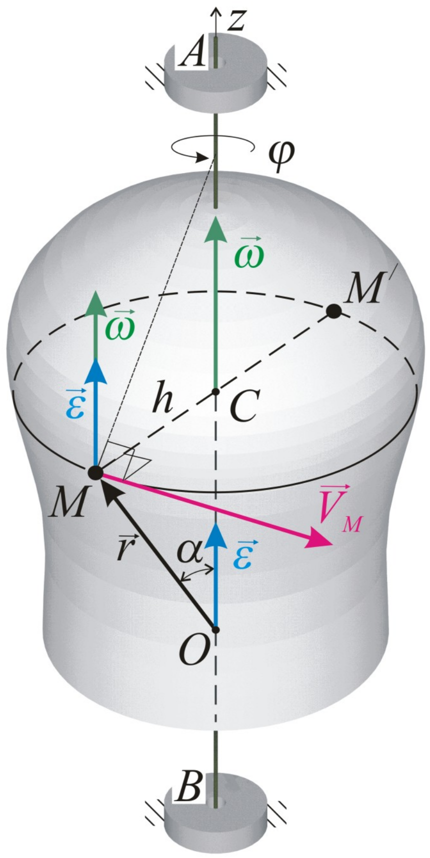
Для определения выражений для векторов $\vec{a}$ и $\vec{V}$ из произвольной точки O, лежащей на оси AB, проведем радиус-вектор $\vec{r}$ точки M (рис. 1.53).

Тогда $h = r\sin\alpha$. Используя выражение для линейной скорости $V = h \cdot \omega$, получим:

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega}| r \sin\alpha \Rightarrow \quad |\vec{V}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|. \tag{1.72}$$

Таким образом, *вектор линейной скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости на радиус-вектор этой точки* (*формула Эйлера:* $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$). Если возьмем производные по времени от левой и правой части, получим выражение:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)+\left(\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \quad \text{или} \quad \vec{a}=(\vec{\varepsilon}\times\vec{r})+(\vec{\omega}\times\vec{V}). \qquad (1.73)$$



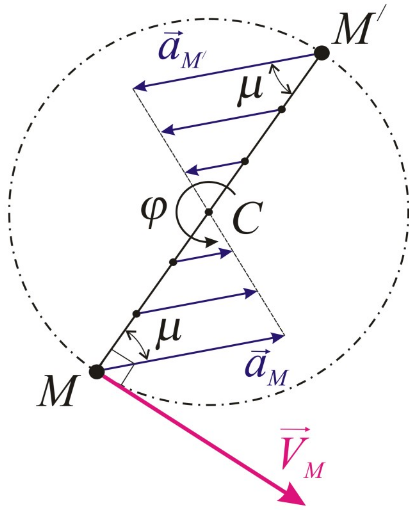


Рис. 1.53. К определению кинематических характеристик точек твердого тела, вращающего относительно неподвижной оси: *а*) положение векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$; *б*) векторов линейной (окружной) скорости $\vec{V}_M$ и полного ускорения $\vec{a}_M$ точки M

Последняя формула определяет вектор ускорения любой точки вращающегося тела.

Вектор $(\vec{\varepsilon}\times\vec{r})=\vec{a}_\tau$ часто называют вектором *вращательного ускорения*, а вектор $(\vec{\omega}\times\vec{V})=\vec{a}_n$ - вектором *осестремительного ускорения*.

Пример 1.11. Механизм, изображённый на рисунке, совершает движение. На брусе CD на расстоянии $1\,м$ от шарнира C жестко закреплен груз. Определить вектор скорости и ускорения центра тяжести груза точки E в момент времени $t=1\,c$, рис. 1.54, если невесомый шарнир AC совершает вращательное движение согласно закону $\varphi=0{,}52\,t^3,\ [рад]$ и $AC=BD=2\,м$.

Решение: Определим положение механизма, в момент времени $t=1\,c$. Для этого рассчитаем угол, соответствующий заданному положению:

$\varphi=0{,}52\cdot1^3\ \approx30^\circ$.

Сообщим данное перемещение невесомому шарниру AC и убедимся в параллельности траекторий перемещения любых точек стержня CD, а также жестко связанной с ним точки E.

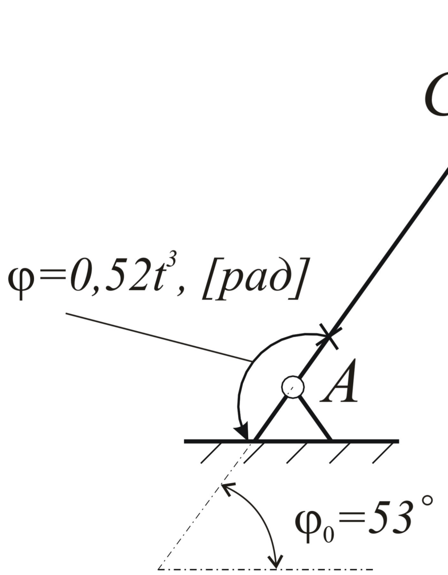


Рис. 1.54. К условию примера 1.11

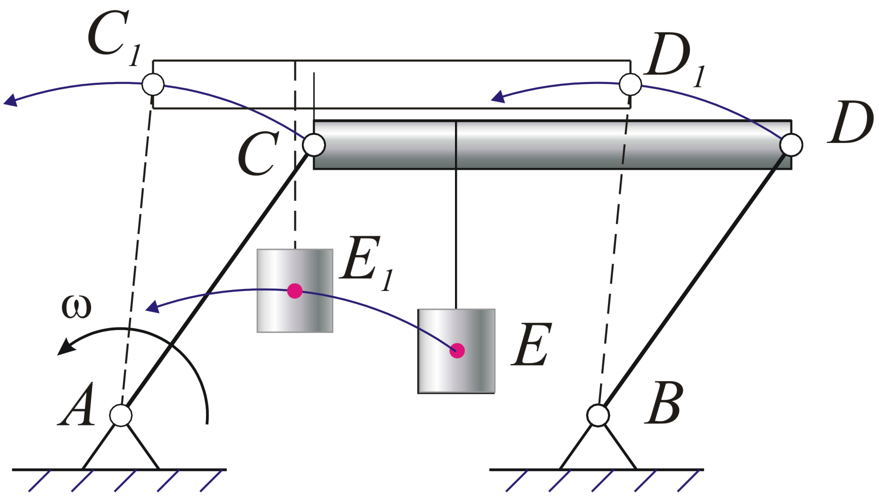


Рис. 1.55. К ходу решения примера 1.11

Отсюда, согласно определению, стержень CD совершает поступательное движение, при котором векторы скорости и ускорения любых точек имеют в рассматриваемый момент времени одинаковые направления и значения. Поэтому для определения скорости и ускорения точки E достаточно определить скорость и ускорение любой точки, принадлежащей стержню CD. В качестве такой точки в данной задаче нужно использовать точку C, одновременно принадлежащую двум звеньям AC и BD, направление скорости и ускорения которой определяются из рассмотрения вращательного движения звена AC относительно точки A.

Определим угловую скорость звена AC в момент времени $t = 1\,c$.

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \left(0{,}52\,t^3\right)^{/} = 1{,}56\,t^2$. В момент времени $t = 1\,c$ $\omega = 1{,}56\,c^{-1}$.

Определим угловое ускорение звена AC в момент времени $t = 1\,c$.

$\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt} = \left(0{,}52\,t^3\right)^{//} = 3{,}12\,t$. В момент времени $t = 1\,c$ $\varepsilon = 3{,}12\,c^{-2}$.

Линейную скорость точки C в момент времени $t = 1\,c$ можно определить по формуле:

$V_C = \omega \cdot |AC| = 1{,}56 \cdot 2 = 3{,}12\,м/c$.

Направлен вектор скорости в сторону вращения звена AC по касательной к траектории движения (перпендикулярно звену AC).

Разложим вектор полного ускорения точки C на касательную $\vec{a}_C^{\,\tau}$ и нормальную $\vec{a}_C^{\,n}$ составляющие. Их модули определим по формулам

$a_C^n = \omega^2 \cdot |AC| = 1{,}56^2 \cdot 2 \approx 4{,}87\,м/c^2$.

$a_C^\tau = \varepsilon \cdot |AC| = 3{,}12 \cdot 2 \approx 6{,}24\,м/c^2$.

Направления данных векторов определяются следующим образом.

Вектор касательного ускорения точки C - $\vec{a}_C^{\,\tau}$ направлен по касательной к траектории движения в одну сторону с её вектором скорости (т.к. $a_C^\tau > 0$).

Вектор нормального ускорения точки C - $\vec{a}_C^{\,n}$ направлен перпендикулярно касательной траектории в сторону её вогнутости. В данной задаче вектор $\vec{a}_C^{\,n}$ направлен вдоль AC к точке A.

Вектор полного ускорения точки C - $\vec{a}_C$ представляет собой векторную сумму касательной $\vec{a}_C^{\,\tau}$ и нормальной $\vec{a}_C^{\,n}$ составляющей. Его модуль можно определить по таким формулам как:

$a_C = \sqrt{{a_C^\tau}^2 + {a_C^n}^2}$, или $a_C = |AC|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \Rightarrow$

$a_C = \sqrt{3{,}12^2 + 1{,}56^4} \approx 7{,}91\,м/c^2$.

Расположение данного вектора также можно оценить нахождением величины острого угла μ между ним и вектором нормального ускорения по формуле:

$$\measuredangle\mu = arctg\left(\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\right).$$

В нашем случае: $\measuredangle\mu = arctg\left(\dfrac{|3{,}12|}{1{,}56^2}\right) \Rightarrow \measuredangle\mu \approx 52^\circ$.

В случае $\varepsilon > 0$ вектор полного ускорения откладывается от нормали к траектории в сторону направления угловой скорости и наоборот (в любом случае в сторону направления углового ускорения). Очевидно, что кинематические параметры точки E тождественны с точкой C.

Направление векторов кинематических характеристик точки E определяется параллельным переносом аналогичных характеристик точки C.

Данные расчётов представим в виде рис. 1.56.

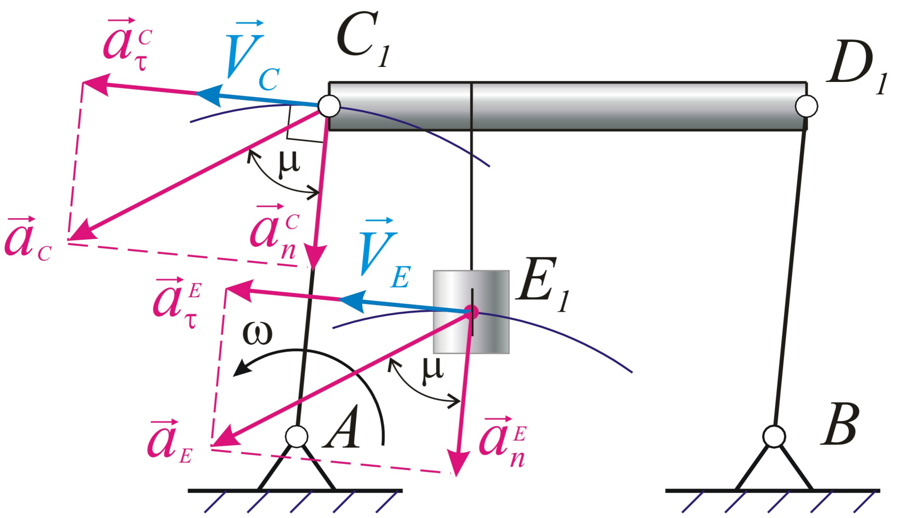


Рис. 1.56. К результатам решения примера 1.11

Пример 1.12. Ротор электродвигателя радиусом $r = 80\,мм$ вращается с постоянной частотой вращения 1460 *об/мин.* Определить модуль вектора линейной (окружной) скорости, а также модуль и направление вектора ускорения точки M, лежащей на поверхности ротора.

Решение:

Зная частоту вращения ротора n, можно определить его угловую скорость по формуле:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi \cdot 1460}{30} \approx 152{,}9\,c^{-1}.$$

Линейная или окружная скорость точки M, лежащей на его поверхности, определяется по формуле:

$$V = \omega \cdot r \Rightarrow \quad V = 152{,}9 \cdot 80 \cdot 10^{-3} \approx 12{,}23\,м/с.$$

Несмотря на то, что ротор совершает равномерное вращательное движение, ускорение точки M, лежащей на его поверхности, нулю равно не будет. При равномерном вращении вектор полного ускорения точки M будет тождественен вектору нормального (центростремительного) ускорения и направлен от точки M по радиусу r к оси вращения. Модуль ускорения точки M можно определить по формуле:

$$a_M = a_M^ц = \omega^2 \cdot r = 152{,}9^2 \cdot 80 \cdot 10^{-3} \approx 1870\,м/с^2.$$

1.2.5. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным (плоским) движением тела называется такое движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Рассмотрим сечение S какого-либо тела, параллельное неподвижной плоскости (рис. 1.57). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой $MM^/$, перпендикулярной сечению S, движутся в плоскости тождественно.

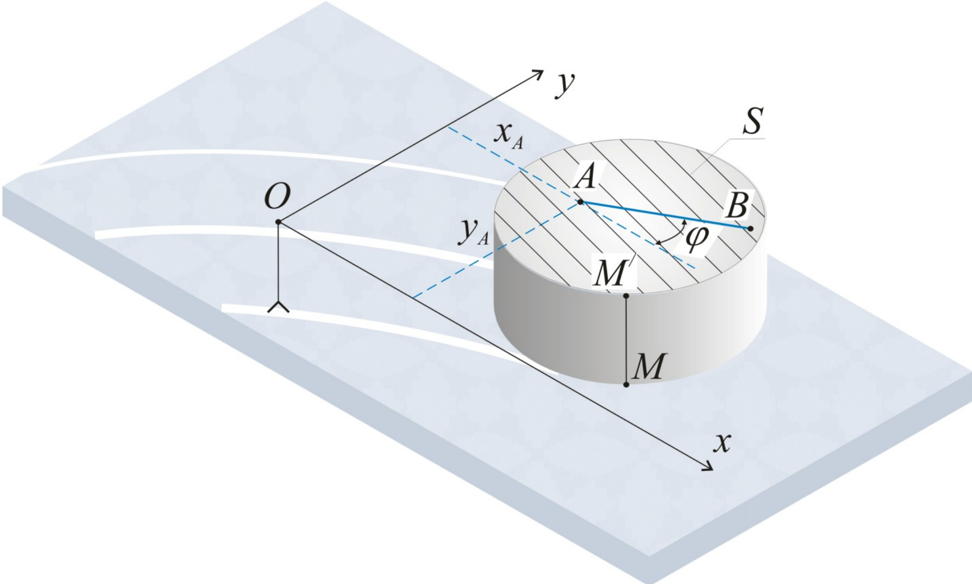


Рис. 1.57. Плоскопараллельное движение

Отсюда делаем вывод о том, что для изучения плоскопараллельного движения твердого тела (см. рис. 1.57) достаточно знать, как в плоскости Oxy, параллельной исходной неподвижной плоскости, движется произвольная плоская фигура S. Рассмотрим плоскопараллельное движение подробней. Положение фигуры в плоскости Oxy определяется положением произвольного отрезка AB. В свою очередь, положение отрезка AB определяется с помощью координат x_A, y_A точки A и угла φ, который отрезок AB образует с осью x.

Точку A, выбранную в качестве исходной для определения положения отрезка, назовем *полюсом*.

При движении плоской фигуры параметры x_A, y_A и φ будут, таким образом, меняться по законам:

$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ \varphi = f_3(t). \tag{1.74}$$

Данные зависимости называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.* Первые два отражают общее поступательное движение, при котором все точки движутся так, как и полюс A. Третье уравнение будет определять вращательное движение данной плоской фигуры относительно полюса A. Таким образом, можно сделать следующий вывод:

В общем случае движение плоской фигуры в плоскости складывается из поступательного движения, при котором все точки движутся так, как и полюс, и вращательного движения данной фигуры вокруг этого полюса.

При изучении плоского движения в качестве полюса может быть выбрана любая точка фигуры. Характеристики поступательной части при этом будут меняться, так как в общем случае $\vec{V}_C \neq \vec{V}_A$ и $\vec{a}_C \neq \vec{a}_A$ (иначе движение было бы простым поступательным), а вот характеристики вращательной части ω, ε остаются неизменными. Отсюда вывод: вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

1.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ. ТЕОРЕМА СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ТЕЛУ, СОВЕРШАЮЩЕМУ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Скорость любой точки B плоской фигуры (рис. 1.58) геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг этого полюса:

$$\vec{V} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \tag{1.75}$$

Здесь $\vec{V}_{BA}$ - скорость, которую точка B получает при вращении фигуры вокруг полюса A. Надо полагать, что $V_{BA} = \omega \cdot |BA|$ и $\vec{V}_{BA} \perp BA$. Модуль и направление $\vec{V}_B$ находятся построением соответствующего параллелограмма.

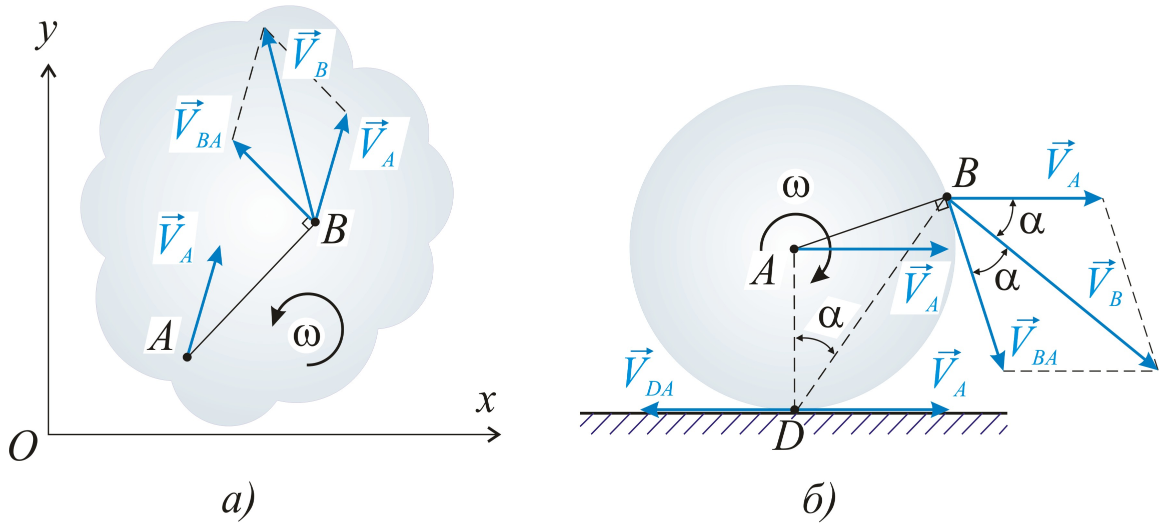


Рис. 1.58. Графическая интерпретация теоремы скоростей при плоскопараллельном движении

1.2.7. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ (МЦС)

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Если фигура совершает плоское движение, то в данный момент времени существует МЦС, и притом, единственный. Чтобы определить положение МЦС, необходимо воспользоваться следующим.

1. Для определения МЦС надо знать только направления векторов скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь точек A и B плоской фигуры (или траекторию этих точек). МЦС будет находиться в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к векторам скоростей этих точек (или касательным к их траекториям).

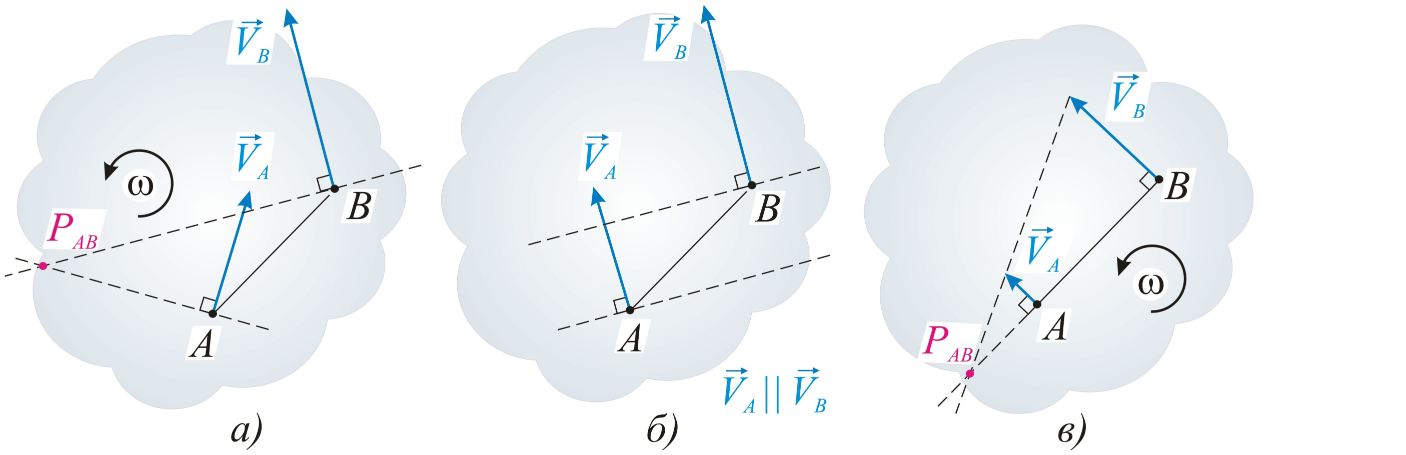


Рис. 1.59. К определению положения МЦС: *а*) по известным положениям векторов скоростей двух точек, не параллельных между собой и не перпендикулярных отрезку, соединяющего эти точки; *б*) по известным положениям векторов скоростей двух точек, параллельных между собой и не перпендикулярных отрезку, соединяющему эти точки (МЦС -лежит в бесконечности); *в*) по известным положениям векторов скоростей двух точек, параллельных между собой и перпендикулярных отрезку, соединяющего эти точки

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой её точки B.

3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к её расстоянию до мгновенного центра скоростей P. Например, угловую скорость фигуры, изображенной на рис. 1.59, *а,* можно определить, используя выражения:

$$\omega = \frac{V_B}{PB} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{V_A}{PA}. \tag{1.76}$$

Некоторые частные случаи определения МЦС:

а) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна линиям действия векторов скоростей, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности, и скорости всех точек фигуры параллельны. Такая фигура, совершая плоско-параллельное движение в общем, в данный момент времени имеет мгновенное поступательное распределение скоростей. Угловая скорость ω тела в этот момент времени будет равна нулю (см. рис. 1.59, *б*), при этом $\varepsilon \neq 0$; $\vec{a}_A \neq \vec{a}_B$.

б) Если векторы скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия $AB \perp \vec{V}_i$, то мгновенный центр скоростей P определяется точкой пересечения прямой, содержащей AB, с прямой, проведенной через концы векторов $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ этих точек (см. рис. 1.59, *в*).

в) Если известны вектор скорости $\vec{V}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и угловая скорость ω, то положение МЦС – точки P, лежащей на перпендикуляре к $\vec{V}_B$, определяется из равенства: $BP = \dfrac{V_B}{\omega}$.

г) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного тела, то точка касания P имеет скорость, равную нулю, и будет являться мгновенным центром скоростей (рис. 1.60).

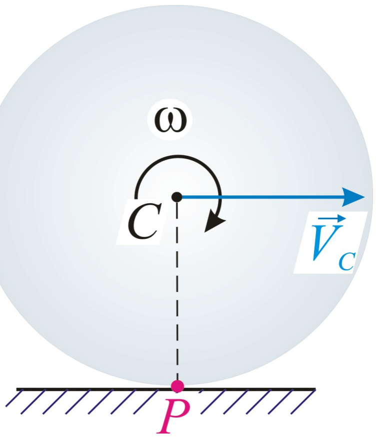


Рис. 1.60. Положение МЦС при качении без проскальзывания

1.2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Ускорение любой точки B плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой - либо точки A, принятой за полюс, и ускорения, которое точка B получает при своём движении вокруг этого полюса (рис. 1.61), т.е.:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \qquad (1.77)$$

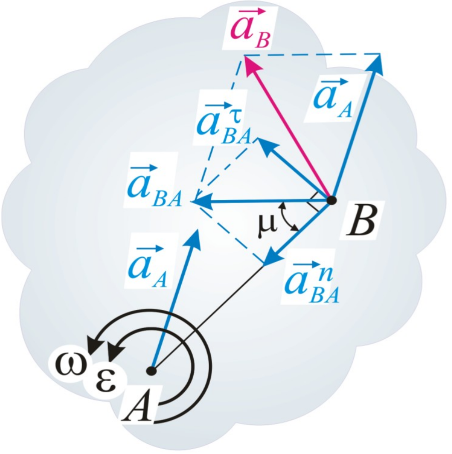
Модуль вектора ускорения $\vec{a}_{AB}$ точки B в её в движении вокруг полюса определяется по формуле:

$$|\vec{a}_{BA}| = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad \text{или} \quad |\vec{a}_{BA}| = |BA|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (1.78)$$

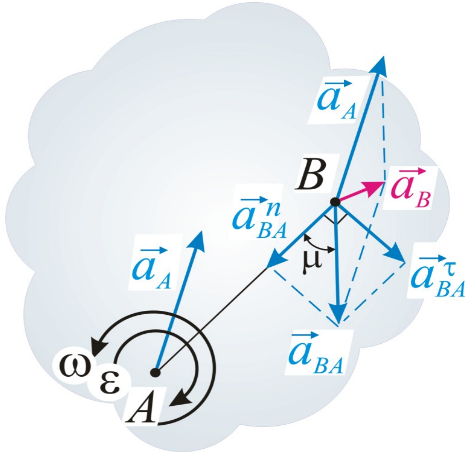
Здесь ω, ε - угловая скорость и ускорение фигуры. Положение вектора ускорения $\vec{a}_{AB}$ определяется величиной угла μ между вектором $\vec{a}_{AB}$ и отрезком BA:

$$\mu = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right). \qquad (1.79)$$

Модуль и направление вектора полного ускорения $\vec{a}_B$ точки B можно определить построением соответствующего параллелограмма.



а)



б)

Рис. 1.61. К определению положения вектора полного ускорения точки фигуры,совершающей плоскопараллельное движение *а*) с ускоренным вращательным движенем; *б*) с замедленным вращательным движением

При решении задач вектор $\vec{a}_{AB}$ представляют в виде его двух взаимно перпендикулярных составляющих ускорений: касательного (вращательного) ускорения точки B в её вращательном движении относительно полюса A - $\vec{a}^{\tau}_{BA} = \vec{a}^{в}_{BA}$, и нормального (центростремительного) ускорения точки B в её вращательном движении относительно полюса A - $\vec{a}^{n}_{AM} = \vec{a}^{ц}_{MA}$. То есть теорему ускорений $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$ можно проинтерпретировать в следующем виде:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA} \quad \text{или} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{в}_{BA} + \vec{a}^{ц}_{BA}. \qquad (1.80)$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение $\vec{a}_A$ можно представить как сумму касательной и нормальной составляющих и полное ускорение точки M:

$$\vec{a}_M = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA}. \qquad (1.81)$$

Когда точка B движется по известной криволинейной траектории, величину $\vec{a}_B$ можно заменить суммой $\vec{a}^{\tau}_B + \vec{a}^{n}_B$. Кроме этого:

1. Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно определить, если известны векторы скорости $\vec{V}_A$ и ускорения $\vec{a}_A$ какой-нибудь точки A этой фигуры в данный момент.

2. Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно определить, если известны траектория какой-либо другой точки B фигуры. В ряде случаев вместо траектории второй точки достаточно знать положение МЦС.

3. При мгновенном поступательном распределении скоростей ускорения точек твердого тела различны.

1.2.9. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ (МЦУ)

Точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю, называется *мгновенным центром ускорения (МЦУ)*.

Для того, чтобы определить положение МЦУ, необходимо полупрямую (рис. 1.62), по которой направлен вектор полного ускорения $\vec{a}_B$ какой-либо точки B, повернуть вокруг точки B на острый угол $\mu = arctg\left(\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\right)$ и затем отложить на ней от точки B отрезок длиной

$$BQ = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \qquad (1.82)$$

Точка Q будет определять положение МЦУ в данный момент времени. При ускоренном вращении фигуры поворот полупрямой, по которой направлен вектор $\vec{a}_B$, вокруг точки B *нужно производить в направлении вращения фигуры*. При замедленном вращении *поворот осуществляется в направлении, обратном вращению фигуры*. Если угловое ускорение тела в данный момент времени равно нулю $(\varepsilon = 0)$, то $\mu = 0$ и мгновенный центр ускорения лежит на прямой, по которой направлен вектор $\vec{a}_B$.

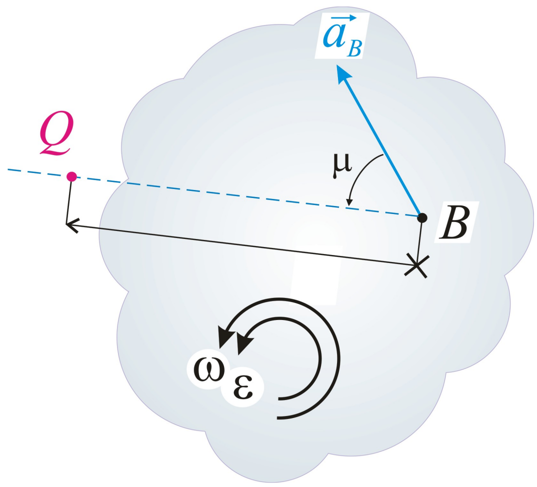


Рис. 1.62. К определению МЦУ по известному вектору ускорения точки твердого тела и по известной угловой скорости и углового ускорения тела

Положение МЦУ также можно определить, зная направление и значение угловой скорости ω и углового ускорения ε тела и направление ускорений $\vec{a}_A, \vec{a}_B$ двух каких-либо точек A и B в данный момент времени. В таком случае положение МЦУ будет определяться точкой пересечения Q полупрямых, повернутых от линий действий векторов $\vec{a}_A, \vec{a}_B$, согласно вышеупомянутому правилу, на угол μ (рис. 1.63), определяемый по формуле:

$$\mu = arctg\left(\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\right). \qquad (1.83)$$

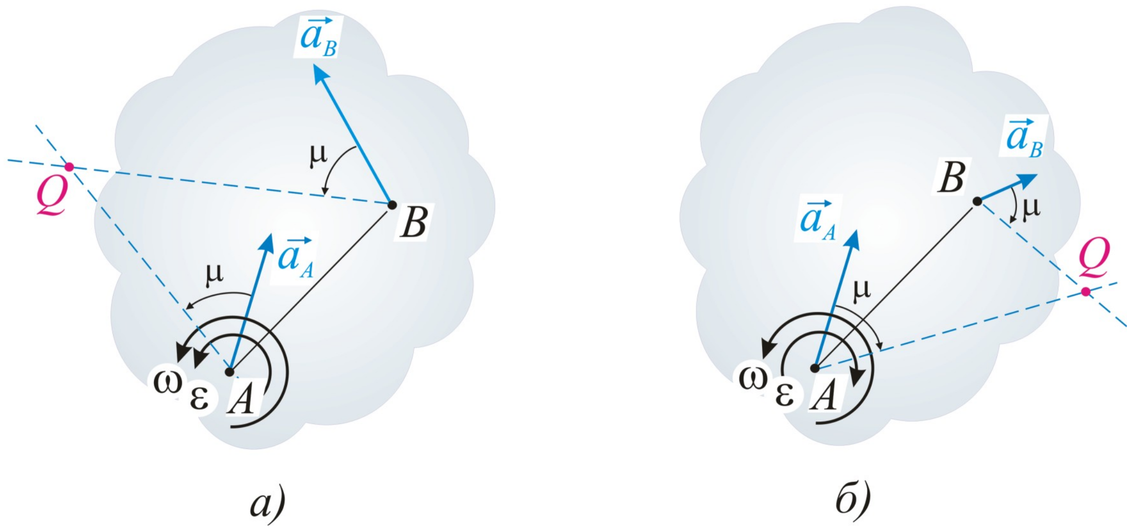


Рис. 1.63. К определению МЦУ по известным векторам ускорений двух точек, угловой скорости и углового ускорения твердого тела *а*) при ускоренной вращательной составляющей движения твердого тела; *б*) при замедленной вращательной составляющей движения твердого тела

Мгновенный центр ускорений (МЦУ) можно применять для определения ускорений точек фигуры, совершающей плоскопараллельное движение. На основании свойств МЦУ следует, что:

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{|QA|}{|QB|}. \qquad (1.84)$$

Таким образом, модули ускорений точек фигуры, совершающей плоскопараллельное движение, прямо пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений. Кроме этого:

1. Положение МЦУ можно определить, зная модуль и направление угловой скорости и углового ускорения тела, а также модуль и направление вектора полного ускорения какой-либо точки в данный момент времени.

2. Положение МЦУ можно определить? зная модуль и направление угловой скорости и углового ускорения тела, а также направления векторов полных ускорений каких-либо двух точек в данный момент времени.

3. При определении кинематических параметров тела и его точек при плоскопараллельном движении, наряду с теоремой ускорений, можно использовать свойства МЦУ.

Пример 1.13. Определить вектор скорости, ускорения точки M, находящейся на середине шатуна AB кривошипно-ползунного механизма, изображённого в положении на рис. 1.64, если кривошип OA вращается с $\omega = 1\,c^{-1} = const$, $OA = 50\,см$, $AB = 100\,см$. Определить положение МЦУ шатуна AB.

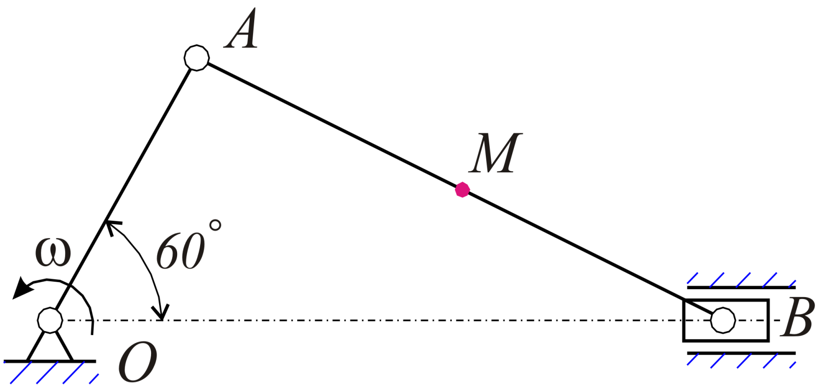


Рис. 1.64. К условию примера 1.13

Решение. Анализ работы механизма, изображённого на рис.1.64, показывает, что кривошип OA совершает вращательное движение, шатун AB - плоскопараллельное, а ползун B – поступательное движение вдоль горизонтальной направляющей. Для того, чтобы определить скорость и ускорение точки M, необходимо предварительно определить кинематические параметры шатуна, которому принадлежит данная точка.

Начнём с того, что определим направление и модуль вектора скорости точки A. Вектор скорости этой точки направлен по касательной к траектории в сторону её движения.

Траектория движения точки A представляет собой окружность радиуса OA, описываемую ей при вращательном движении кривошипа относительно полюса O. Модуль скорости точки A составит:

$V_A = \omega_{OA} \cdot |OA| \Rightarrow V_A = 0{,}1 \cdot 50 = 50\, см/с$.

Учтём то обстоятельство, что точка A одновременно принадлежит и кривошипу, и шатуну. Кроме этого, точка B одновременно также принадлежит как шатуну, так и ползуну, совершающему прямолинейное поступательное движение вдоль горизонтальной направляющей. Вектор её скорости будет также направлен по данной направляющей.

Так как мы знаем модуль и направление вектора скорости точки A и направление вектора скорости точки B, которые принадлежат шатуну AB, то можем определить положение точки P_{AB} - МЦС звена AB. Для этого через точки A и B восстанавливаем перпендикуляры к направлениям векторов скоростей данных точек. Точка пересечения этих перпендикуляров и будет являться мгновенным центром скоростей шатуна. Измерим расстояние от точек A и B до точки P_{AB} и определим направление и модуль угловой скорости шатуна AB. Согласно свойству МЦС, рис. 1.65.

$V_A = \omega_{AB} \cdot |A P_{AB}| \Rightarrow$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{|A P_{AB}|} = \frac{50}{180{,}28} \approx 0{,}277\, c^{-1}.$$

Для определения положения вектора скорости точки M соединяем последнюю с точкой P_{AB} и восстанавливаем перпендикуляр через точку M к этой линии. Модуль вектора скорости точки M определяем, используя свойство МЦС:

$$V_M=\omega_{AB}\cdot\left|M\,P_{AB}\right|=0{,}277\cdot 183{,}4\Rightarrow V_M=50{,}87\,см/с$$

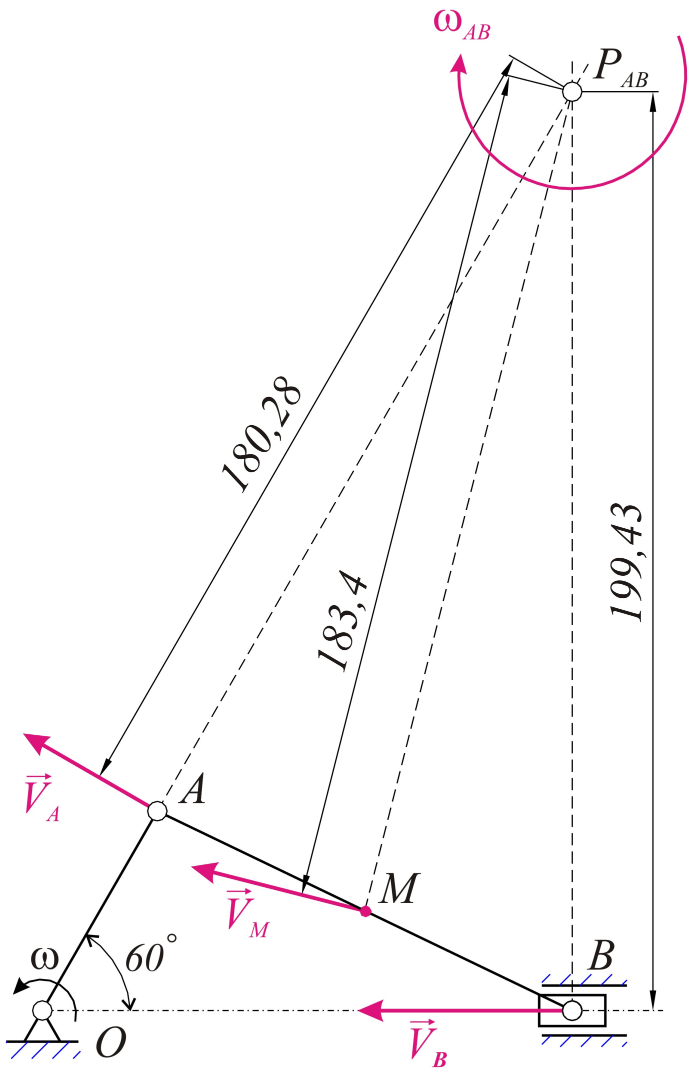


Рис. 1.65. К определению скорости точки M (пример 1.13)

Для определения направления и модуля вектора ускорения точки M воспользуемся теоремой об ускорениях точек, принадлежащих телу, совершающему плоскопараллельное движение.

Примем точку A за полюс. Тогда теорему ускорений для точки M можно представить как

$$\vec{a}_M=\vec{a}_A+\vec{a}^{\tau}_{MA}+\vec{a}^{n}_{MA}.$$

Ускорение точки A определим, исходя из рассмотрения равномерного вращательного движения кривошипа OA относительно полюса O.

$$\vec{a}_A=\vec{a}^{n}_A=\omega^2_{OA}\cdot\left|OA\right|=1^2\cdot 50=50\,см/с^2.$$

Направлен вектор $\vec{a}_A$ так же, как $\vec{a}^{n}_A$, от точки A к точке O.

Согласно теореме ускорений (рис. 1.66), откладываем в выбранном масштабе от точки M вектор $\vec{a}_A$. От конца построенного вектора в таком же масштабе отложим вектор $\vec{a}^{n}_{MA}$, который направлен параллельно шатуну

AB от точки B к точке A, принятой за полюс. Модуль $\vec{a}^{\,n}_{MA}$, определим по формуле:

$a^n_{MA}=\omega^2_{AB}\cdot|AM|\Rightarrow\ a^n_{MA}=0{,}277^2\cdot 50=3{,}84\ см/с^2$.

Из конца вектора $\vec{a}^{\,n}_{MA}$, проведём прямую, перпендикулярную шатуну AB. Данная прямая будет отображать направление действия вектора $\vec{a}^{\,\tau}_{MA}$, модуль которого пока мы не можем определить.

Для того, чтобы это сделать, найдём ускорение точки B.

$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}^{\,\tau}_{BA}+\vec{a}^{\,n}_{BA}.$$

Согласно теореме ускорений, откладываем в выбранном масштабе от точки B вектор $\vec{a}_A$. От конца построенного вектора в таком же масштабе отложим вектор $\vec{a}^{\,n}_{BA}$, который направлен параллельно шатуну AB от точки B к точке A, принятой за полюс. Модуль $\vec{a}^{\,n}_{BA}$ определим по формуле:

$a^n_{BA}=\omega^2_{AB}\cdot|AB|\Rightarrow\ a^n_{MA}=0{,}277^2\cdot 100=7{,}67\ см/с^2$.

Из конца вектора $\vec{a}^{\,n}_{BA}$ проведём прямую, перпендикулярную шатуну AB. Данная прямая будет отображать направление действия вектора $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$.

Так как ползун B совершает прямолинейное поступательное движение, то направление вектора ускорения $\vec{a}_B$ известно: оно проходит вдоль горизонтальной направляющей ползуна. Поэтому точка пересечения проведённой прямой, перпендикулярной шатуну AB и линии действия вектора ускорения $\vec{a}_B$, определит концы, а с учетом выбранного масштаба и значения векторов $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ и $\vec{a}_B$.

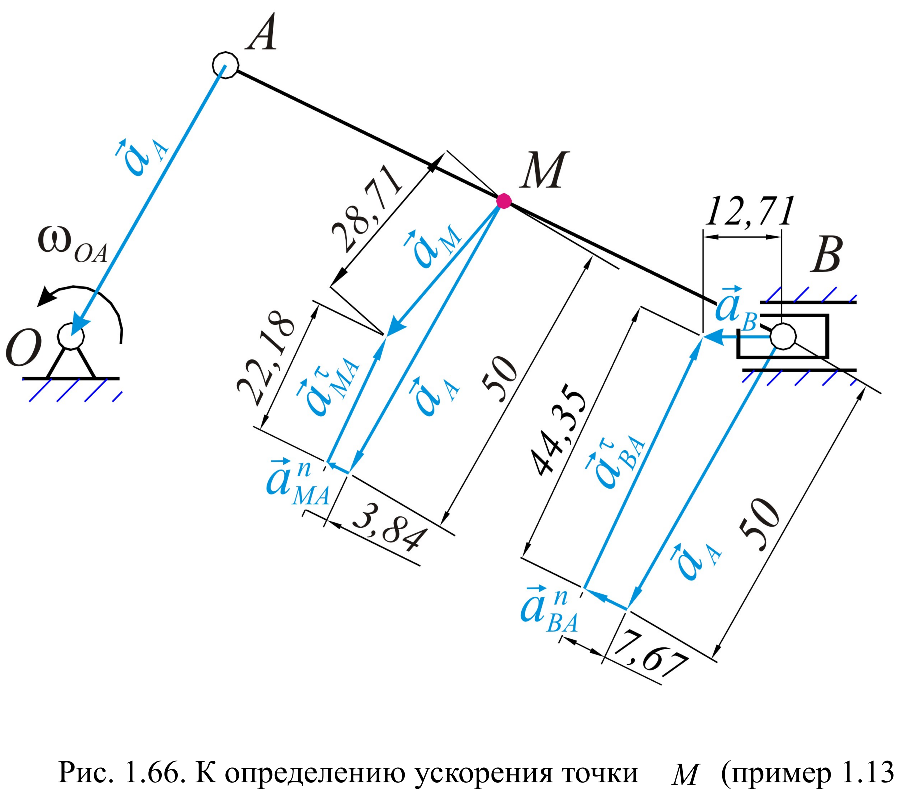


Рис. 1.66. К определению ускорения точки M (пример 1.13)

Таким образом, графическим путём получаем модуль вектора $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$.

Согласно построенному в масштабе плану ускорений $a_{BA}^{\tau}=44{,}35\,см/с^2$. Полученное значение даёт нам возможность определить угловое ускорение звена AB - ε_{AB}.

Так как $a_{BA}^{\tau}=\varepsilon_{AB}\cdot|AB|\Rightarrow$ $\varepsilon_{AB}=\dfrac{a_{BA}^{\tau}}{|AB|}=\dfrac{44{,}35}{100}\Rightarrow$ $\varepsilon=0{,}4435\,c^{-2}$.

Узнав угловое ускорение шатуна AB, можно определить модуль $\vec{a}_{MA}^{\tau}$:
$a_{MA}^{\tau}=\varepsilon_{AB}\cdot|AM|=0{,}4435\cdot 50$ $\Rightarrow a_{MA}^{\tau}\approx 22{,}175\,м/с^2$.

Полученное значение отложим от конца вектора $\vec{a}_{MA}^{n}$, по прямой, перпендикулярной AB. Соединим точку M с концом отложенного вектора $\vec{a}_{MA}^{\tau}$. Последний отрезок в масштабе отражает направление и модуль вектора ускорения точки M. Согласно чертежу, $a_M=28{,}71\,м/с^2$.

Определение положения МЦУ шатуна осуществляется следующим образом. Беря за полюс точку A, используя векторное равенство $\vec{a}_B=\vec{a}+\vec{a}_{BA}$, определяем направление вектора вращательного ускорения точки B в её движении относительно полюса A. Направление данного вектора - $\vec{a}_{BA}$ и будет определять направление углового ускорения шатуна ε_{AB}.

Положение МЦУ шатуна AB точки Q_{AB} определится пересечением прямых, отложенных от векторов ускорений точек A, B или M в сторону углового ускорения шатуна ε_{AB} под углом μ, величина которого равна:

$$\sphericalangle\mu=arctg\left(\frac{|\varepsilon_{AB}|}{\omega_{AB}^2}\right)=arctg\left(\frac{|0{,}4435|}{0{,}277^2}\right)\Rightarrow\ \sphericalangle\mu=80{,}184^{\circ}.$$

Графическая интерпретация последовательности определения положения МЦУ шатуна AB представлена на рис. 1.67.

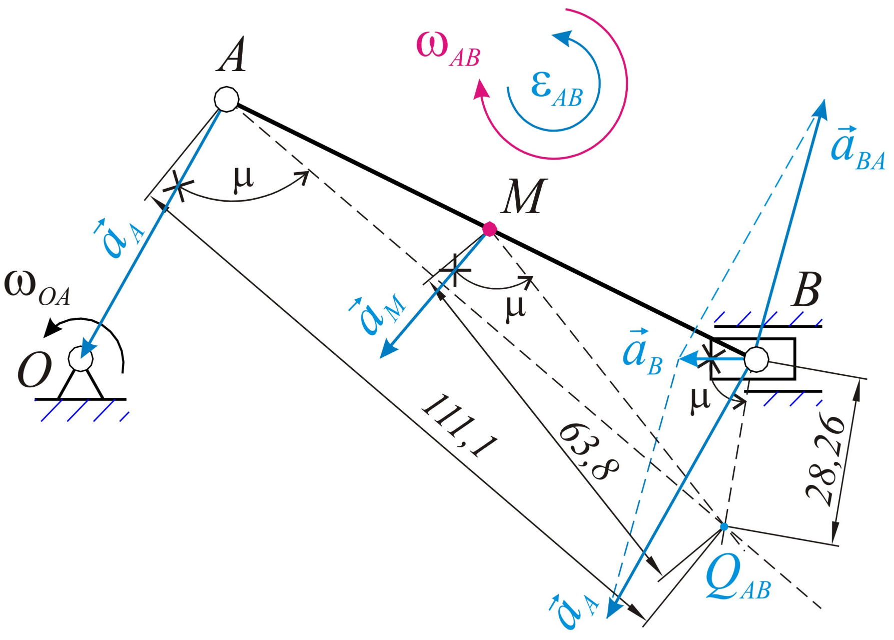


Рис. 1.67. К определению положения МЦУ (пример 1.13)

1.2.10. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой называется *сферическим*.

Рассмотрим, какими параметрами определяется такое движение. Возьмем неподвижную систему отсчёта $Ox_1y_1z_1$ таким образом, чтобы начало координат точка O совпала с неподвижной точкой твердого тела. Свяжем с телом трехгранник $Oxyz$, по положению которого можно судить о положении твердого тела, рис. 1.68.

Линия OK, лежащая в плоскости x_1Oy_1, вдоль которой пересекаются плоскости Oxy и Ox_1y_1, называется *линией узлов*.

Положение подвижного трехгранника $Oxyz$ по отношению к неподвижным осям можно определить при помощи углов:

$\varphi = \sphericalangle KOx$; $\psi = \sphericalangle x_1OK$; $\theta = \sphericalangle z_1Oz$.

Эти углы называются *углами Эйлера*, имеют свои названия:

Угол φ (фи), лежащий в плоскости Oxy, перпендикулярной оси z, называется *углом собственного вращения*.

Угол ψ (пси), лежащий в плоскости x_1Oy_1 перпендикулярной оси z_1, называется *углом прецессии*.

Угол θ (тета), лежащий в плоскости yOz, перпендикулярной линии узлов OK, которая в свою очередь перпендикулярна осям z_1 и z, называется *углом нутации*.

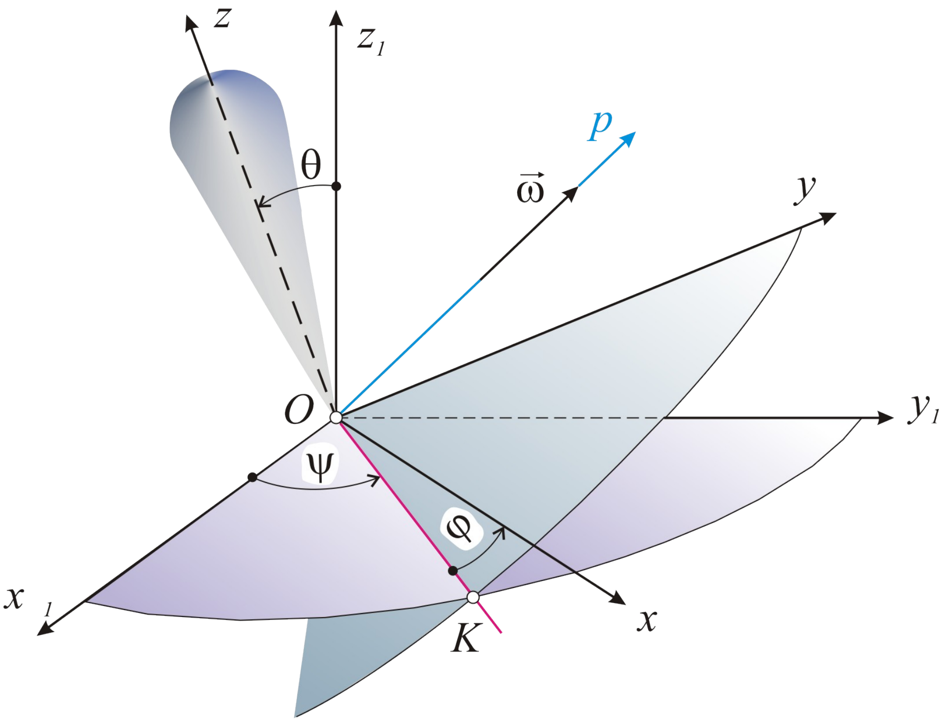


Рис. 1.68. Сферическое движение

Эйлеровы углы φ, ψ, θ считаются положительными в случае, если смотря с положительных направлений осей z, z_1 OK, перпендикулярным плоскостям соответствующих углов, можно видеть эти углы отложенными от осей OK, x_1, z_1, в направлении против часовой стрелки.

Таким образом, для определения движения твердого тела с одной неподвижной точкой необходимо знать, как меняются эйлеровы углы по времени, т.е.:

$$\varphi = f_1(t),\ \psi = f_2(t);\ \theta = f_3(t). \tag{1.85}$$

Эти зависимости, однозначно определяющие сферическое движение, называются *уравнениями сферического движения твердого тела*.

При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (*собственное вращение*) с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\varphi}$, при изменении угла ψ - вращение вокруг оси Oz_1 -(*прецессия*) с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\psi}$ и при изменении угла θ - вращение вокруг линии узлов *ОК* (*нутация*) с угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\theta}$. Векторы $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ этих угловых скоростей направлены по осям Oz, Oz_1 и OK соответственно.

Таким образом, движение тела представляет собой вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$, равной геометрической сумме соответствующих угловых скоростей, т.е.:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3. \tag{1.86}$$

С течением времени величина и направление вектора $\vec{\omega}$ меняются, поэтому его называют *мгновенной угловой скоростью тела*.

Ось Op, вдоль которой направлен вектор мгновенной угловой скорости, называется *мгновенной осью вращения.*

Угловым ускореним (мгновенным угловым ускорением) называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени величины и направления вектора угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\,\vec{\omega}}{d\,t}. \tag{1.87}$$

Система уравнений, определяющих проекции вектора мгновенной угловой скорости на подвижные оси $Oxyz$, называется *кинематическими уравнениями Эйлера.*

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi; \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{1.88}$$

Проекции вектора мгновенной угловой скорости тела на неподвижные оси $Ox_1 y_1 z_1$ можно определить по уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{x_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\,;\\
\omega_{y_1} &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\,;\\
\omega_{z_1} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{1.89}$$

Используя последние уравнения, можно определить значения мгновенного углового ускорения тела, через его проекции на неподвижные оси $Ox_1 y_1 z_1$:

$$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1};\;\; \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1};\;\; \varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1}. \tag{1.90}$$

1.2.11. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим самый общий случай движения твердого тела, когда оно может перемещаться в каком угодно направлении. Выберем произвольную точку A этого тела в качестве полюса и проведем через неё систему осей $Axyz$, которые при движении тела будут перемещаться вместе с полюсом относительно стационарных осей $O\,x_1 y_1 z_1$ поступательно (рис. 1.69).

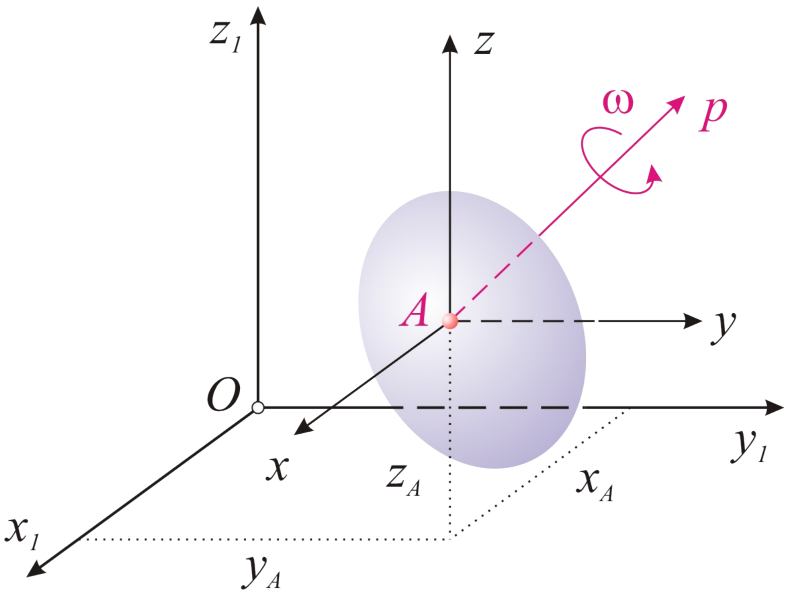


Рис. 1.69. К рассмотрению общего случая движения твёрдого тела

Таким образом, положение твёрдого тела в системе отсчёта $O\,x_1 y_1 z_1$ будет определяться координатами полюса A и углами Эйлера твердого тела в нестационарной системе осей $Axyz$.

Следовательно, уравнения для общего случая движения свободного твердого тела могут быть представлены как

$$
\left.\begin{aligned}
x_A &= f_1(t); \quad \varphi = f_4(t); \\
y_A &= f_2(t); \quad \psi = f_5(t); \\
z_A &= f_3(t); \quad \theta = f_6(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.91)
$$

Первые три уравнения (левый столбец) определяют движение твердого тела при постоянных углах Эйлера (отсутствии вращения относительно полюса A).

Последние три уравнения (правый столбец) определяют движение твердого тела в том случае, если бы полюс A был неподвижной точкой.

Общий случай движения свободного тела можно рассматривать как совокупность поступательного движения твердого тела, при котором все его точки движутся, как и произвольный полюс A, и сферического движения твёрдого тела относительно данного полюса A.

Заметим, что сферическое движение характеризуется положением *мгновенной оси вращения* Ap, вдоль которой направлен *вектор мгновенной угловой скорости твердого* тела $\vec{\omega}$, являющийся векторной суммой угловых скоростей в собственном вращении, прецессии и нутации. Поэтому геометрическую картину общего движения твердого тела можно изобразить, согласно рис. 1.70.

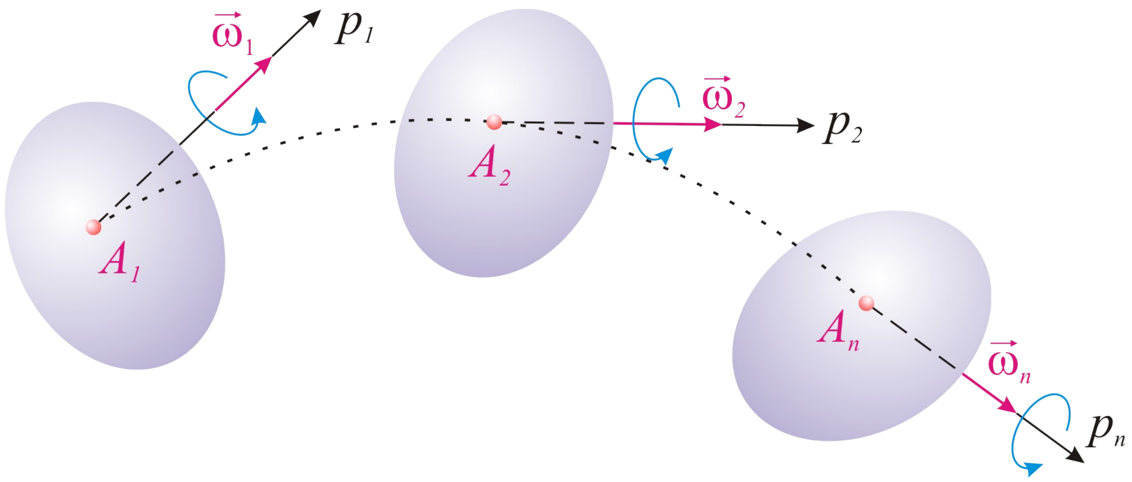


Рис. 1.70. Картина общего случая движения твердого тела

Учтем, что при общем случае движения твердого тела, так же как и при его плоском движении, вращательная составляющая этого движения от выбора полюса не зависит. При перемене полюса будет меняться только поступательная его часть.

Определяющими кинематическими характеристиками для общего случая движения являются вектор скорости и ускорения полюса, а также векторы угловой скорости и углового ускорения при вращении твердого тела вокруг этого полюса.

Для определения вектора скорости и вектора ускорения любой точки твердого тела, совершающего произвольное перемещение, используют векторные равенства, которые аналогичны применяемым для плоскопараллельного движения.

1.2.12. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ, ПЕРЕНОСНОЕ И АБСОЛЮТНОЕ ДВИЖЕНИЯ

До сих пор мы рассматривали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета (неподвижной системы декартовых координат или подвижной системы естественных осей).

Такой вид движения является *простым*. Если рассматривается движение точки или тела одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых неподвижна (стационарна), а вторая движется, то такое движение считается *сложным*.

Рассмотрим точку M, движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, которая в свою очередь движется относительно другой условно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ (рис .1.71).

1. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Ox_1y_1z_1$ и всеми связанными с нею точками (включая точку m, неизменно связанную с точкой M) по отношению к неподвижной системе отчёта, является для точки M *переносным*.

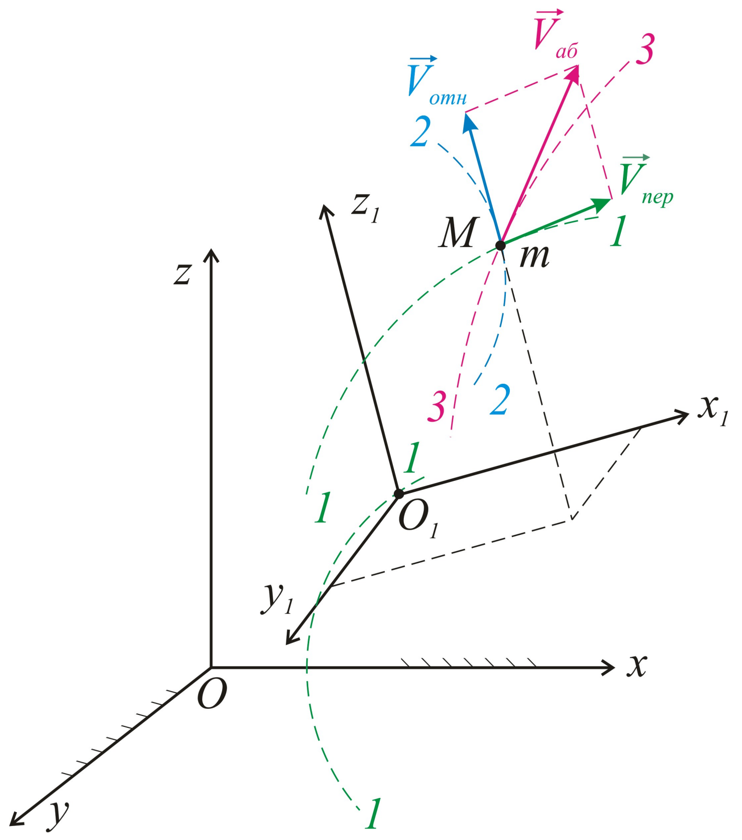


Рис. 1.71. Сложное движение точки

Траектория ***1-1*** - будет являться траекторией переносного движения. Скорость той неизменно связанной с подвижными осями точки m, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M, называется переносной скоростью точки M и обозначается $\vec{V}_{пер}$ или $\vec{V}_e$ (от французского *entrainer* - увлекать), а ускорение этой точки m - переносным ускорением точки M и обозначается $\vec{a}_{пер}$ или $\vec{a}_e$.

2. Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижной системе отсчета (к осям $Ox_1y_1z_1$), называется *относительным*. Траектория ***2-2*** будет называться относительной траекторией.

Скорость точки M по отношению к осям $Ox_1y_1z_1$ называется относительной скоростью $\vec{V}_{от}$ или $\vec{V}_r$ (от латинского *relativus* – относительный), а ускорение - относительным ускорением $\vec{a}_{от}$ или $\vec{a}_r$.

При определении данных величин движение самих осей $Ox_1y_1z_1$ во внимание не принимается (они считаются неподвижными).

3. Движение, совершаемое точкой M по отношению к неподвижной системе отсчета $Oxyz$, называется *абсолютным* или *сложным*.

Траектория ***3-3*** - называется абсолютной траекторией, скорость - абсолютной скоростью $\vec{V}_{абс}$ или $\vec{V}$, а ускорение - абсолютным ускорением $\vec{a}_{абс}$ или $\vec{a}$.

1.2.13. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

При сложной движении абсолютная (полная) скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}_{абс}=\vec{V}_{отн}+\vec{V}_{пер}. \tag{1.91}$$

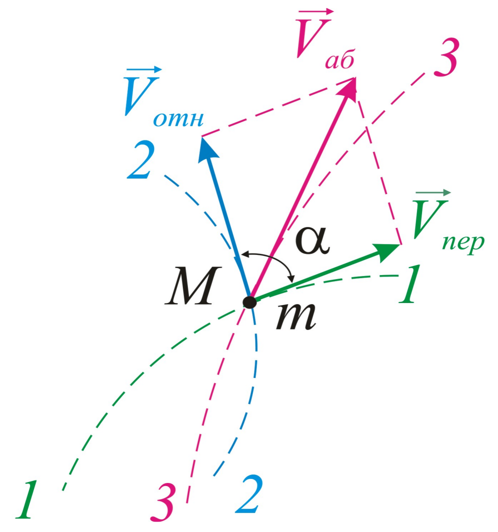


Рис. 1.72. К теореме скоростей при сложном движении

Данные векторы направлены по касательным к соответствующим траекториям. Если угол между векторами $\vec{V}_{отн}$ и $\vec{V}_{пер}$ равен α, то модуль абсолютной скорости можно определить по формуле:

$$V_{абс}=\sqrt{V_{от}^2+V_{пер}^2+2V_{от}\cdot V_{пер}\cos\alpha}. \qquad (1.92)$$

1.2.14. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Очевидно, что вектор абсолютного ускорения характеризует изменение вектора абсолютной скорости по времени:

$$\vec{a}_{абс}=\frac{d\vec{V}_{абс}}{dt}. \qquad (1.93)$$

Используя теорему скоростей $\vec{V}_{абс}=\vec{V}_{отн}+\vec{V}_{пер}$, вектор абсолютной скорости можно выразить как

$$\vec{a}_{абс}=\frac{d\vec{V}_{абс}}{dt}=\frac{d\vec{V}_{от}}{dt}+\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt}. \qquad (1.94)$$

Производные $\frac{d\vec{V}_{от}}{dt}$ и $\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt}$ определяют изменения каждого векторов скоростей при абсолютном движении.

Эти изменения в общем случае складываются из изменений каждого вектора при относительном (1) и при переносном (2) движении.

В таком случае, последнее выражение можно представить в следующем виде:

$$\vec{a}_{абс}=\frac{d\vec{V}_{абс}}{dt}=\frac{d\vec{V}_{от}^1}{dt}+\frac{d\vec{V}_{от}^2}{dt}+\frac{d\vec{V}_{пер}^1}{dt}+\frac{d\vec{V}_{пер}^2}{dt}. \qquad (1.95)$$

По определению, относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении (движение самих осей $Oxyz$ во внимание не принимается, они считаются неподвижными). Поэтому, $\frac{d\vec{V}_{от}^1}{dt}=\vec{a}_{от}$.

В свою очередь, по определению, переносное ускорение характеризует изменение вектора переносной скорости только при переносном движении, т.е.: $\frac{d\vec{V}_{пер}^2}{dt}=\vec{a}_{пер}$.

С учетом рассмотренного, выражение для абсолютного ускорения примет вид:

$$\vec{a}_{абс}=\vec{a}_{отн}+\frac{d\vec{V}_{от}^2}{dt}+\frac{d\vec{V}_{пер}^1}{dt}+\vec{a}_{пер}. \qquad (1.96)$$

При обозначении слагаемых $\frac{d\,\vec{V}^{2}_{om}}{d\,t}+\frac{d\,\vec{V}^{1}_{пер}}{d\,t}$ как $\vec{a}_{кор}$, его можно представить как

$$\vec{a}_{абс}=\vec{a}_{отн}+\vec{a}_{пер}+\vec{a}_{кор}\,. \qquad (1.97)$$

Величина ускорения $\vec{a}_{кор}$, характеризующего изменение вектора относительной скорости точки при переносном движении и вектора переносной скорости при относительном движении, называется *поворотным* или *кориолисовым ускорением*, а выражение

$$\vec{a}_{абс}=\vec{a}_{отн}+\vec{a}_{пер}+\vec{a}_{кор} \qquad (1.98)$$

называется *теоремой Кориолиса (теоремой ускорений)* при сложном движении точки.

Теорема Кориолиса формулируется следующим образом:

При сложном движении точки абсолютное ускорение равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного, или кориолисова.

Кориолисово ускорение появляется при наличии у подвижных осей вращения, и его вектор можно определить как

$$\vec{a}_{кор}=2\left(\vec{\omega}\times\vec{V}_{отн}\right). \qquad (1.99)$$

Таким образом, вектор кориолисова ускорения равен удвоенному векторному произведению вектора переносной угловой скорости (угловой скорости подвижной системы отсчета) и вектора относительной скорости точки.

Кориолисово ускорение рано нулю:

1) Когда переносное движение является поступательным.

2) Когда относительная скорость в данный момент времени равна нулю.

3) Когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или если в данный момент времени вектор $\vec{V}_{отн}$ параллелен этой оси.

Модуль вектора кориолисова ускорения можно определить по формуле:

$$a_{кор}=2\cdot\left|\vec{\omega}\right|\cdot\left|\vec{V}_{отн}\right|\cdot\sin\alpha\,, \qquad (1.100)$$

где $\alpha=\left(\vec{\omega}\,\hat{}\,\vec{V}_{отн}\right)$.

Направление вектора кориолисова ускорения произвольной точки M (рис. 1.73) при сложном движении определяется с помощью следующего правила:

Для определения положения вектора кориолисова ускорения необходимо спроецировать вектор относительной скорости $\vec{V}_{отн}$ *данной точки на плоскость* I, *перпендикулярную оси переносного вращения, и полученный* *вектор* $\vec{V}^{\,I}_{отн}$ *повернуть в данной плоскости на угол* $\dfrac{\pi}{2}$ *в сторону переносного вращения.*

Полученное положение будет соответствовать направлению вектора кориолисова ускорения (см. рис. 1.73).

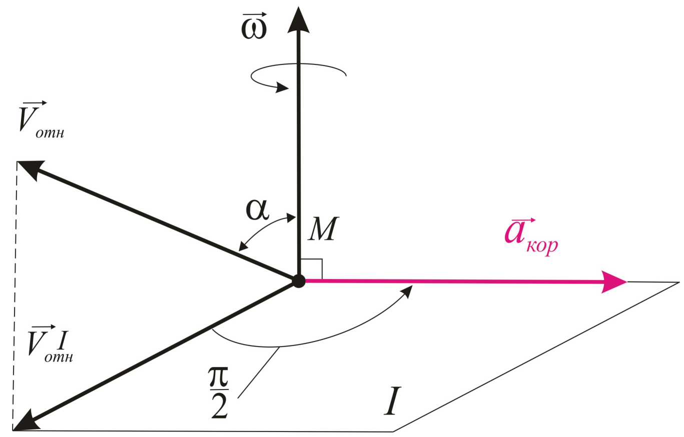


Рис. 1.73. К определению положения вектора кориолисова ускорения

Пример 1.14. Вертикальный вал AB вращается относительно своей оси согласно закону $\varphi = 0{,}8t^{2,}\,[рад]$. По трубке, приваренной к валу под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к периферии, движется шарик M, рис. 1.74.

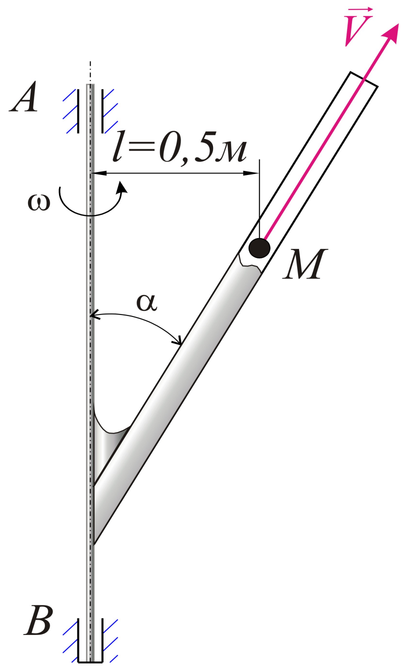


Рис. 1.74. К условию примера 1.14

Считая положение шарика, указанное на рисунке, соответствующим моменту времени $t = 2\,с$, определить направление и модуль его кориолисова ускорения в этот момент времени.

Решение: Определим угловую скорость вала в момент времени $t=2c$.

$\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}=\left(0{,}8\,t^2\right)'=1{,}6\,t \Rightarrow \omega=1{,}6\cdot 2=3{,}2\,c^{-1}$.

Построим вектор угловой скорости, прикладывая его к точке M. Вектор угловой скорости должен быть параллелен оси вращения и направлен в ту сторону, откуда вращение видимо происходящим против хода часовой стрелки. В нашем случае откладываем его параллельно оси от точки M вверх. Скорость перемещения шарика по трубке, с учетом, того, что он совершает сложное движение, является относительной. И очевидно, что угол между вектором угловой скорости и вектором относительной скорости составит $\alpha=30^{\circ}$. В таком случае для определения модуля кориолисова ускорения достаточно воспользоваться формулой:

$a_{кор}=2\left|\vec{\omega}\right|\cdot\left|\vec{V}_{отн}\right|\cdot\sin\alpha$, где $\measuredangle\alpha=\vec{\omega}\,^\wedge\,\vec{V}_{отн}$. В данном случае $\alpha=30^{\circ}$.

Таким образом: $a_{кор}=2\cdot 3{,}2\cdot\sin 30^{\circ}=3{,}2\,м/c^2$.

Направление вектора кориолисова ускорения определим следующим образом. Спроецируем вектор относительной скорости $\vec{V}_{отн}$ шарика M на плоскость, содержащую этот шарик и перпендикулярную оси переносного вращения, и полученную проекцию - вектор $\vec{V}_1$ повернём в этой плоскости в сторону переносного вращения ω на угол 90°, рис.1.75.

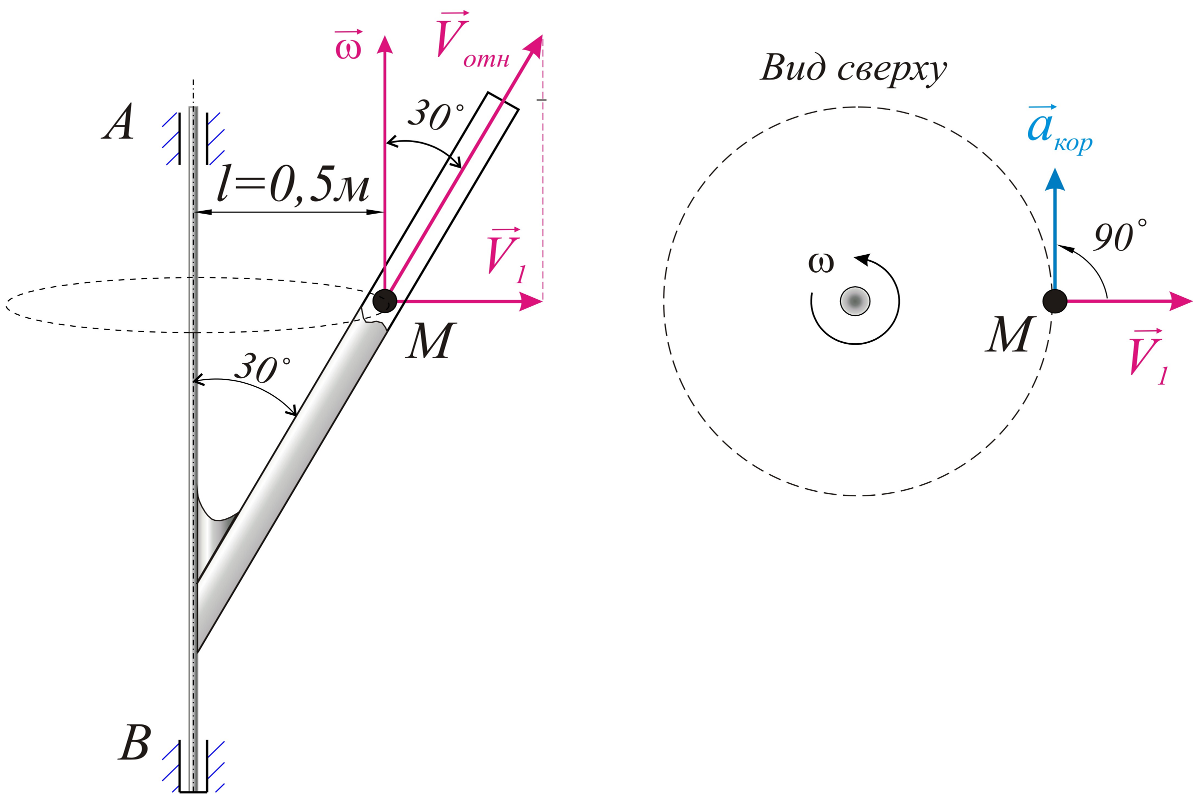


Рис. 1.75. К решению примера 1.14

Полученное направление будет соответствовать направлению вектора кориолисова ускорения, модуль которого нами был определён ранее.

ГЛАВА 3. ДИНАМИКА

Динамика - это раздел теоретической механики, в котором изучается движение твердых тел под действием сил. Данный раздел можно условно разбить на подразделы: динамику материальной точки и динамику твердых тел (механических систем).

Традиционно изучение динамики начинают с подраздела динамики материальной точки.

1.3.1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.3.1.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Первый закон динамики (закон инерции).

Изолированная от внешнего воздействия материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят её изменить данное состояние.

Второй закон динамики (основной закон динамики).

Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением действия рассматриваемой силы.

Математически основной закон динамики можно представить в виде векторного равенства:

$$m\vec{a}=\vec{F}\,. \tag{1.101}$$

Третий закон динамики (закон равенства действия и противодействия).

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными по прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

1.3.1.2. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

В данном подразделе обычно классифицируют задачи на два вида:

Прямая задача

В рамках данной задачи по известному закону движения определяют силу, действующую на материальную точку.

Как правило, её решение связано с дифференцированием соответствующих уравнений движения.

При способе задания движения точки в декартовых прямоугольных координатах рассматривается группа уравнений вида:

$$\begin{cases} ma_x = \sum F_{kx} \\ ma_y = \sum F_{ky} \\ ma_z = \sum F_{kz} \end{cases}, \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx} \\ m \cdot \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky} \\ m \cdot \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz} \end{cases}. \qquad (1.102)$$

В левых частях каждого из рассматриваемых уравнений интерпретируется второй закон Ньютона (основной закон динамики), согласно которому $F = m \cdot a$, в отношении составляющей (проекции) равнодействующей силы, взятой относительно одной из осей x, y, z.

В правых частях уравнений представлены составляющие (проекции) вектора равнодействующей сил, взятые по соответствующим осям.

Очевидно, что составляющая равнодействующей F_i (её проекция на ось i), согласно положениям статики, равна арифметической сумме проекций на ту же ось сил $\sum F_{ki}$, действующих на данную материальную точку (рисунок 1.76).

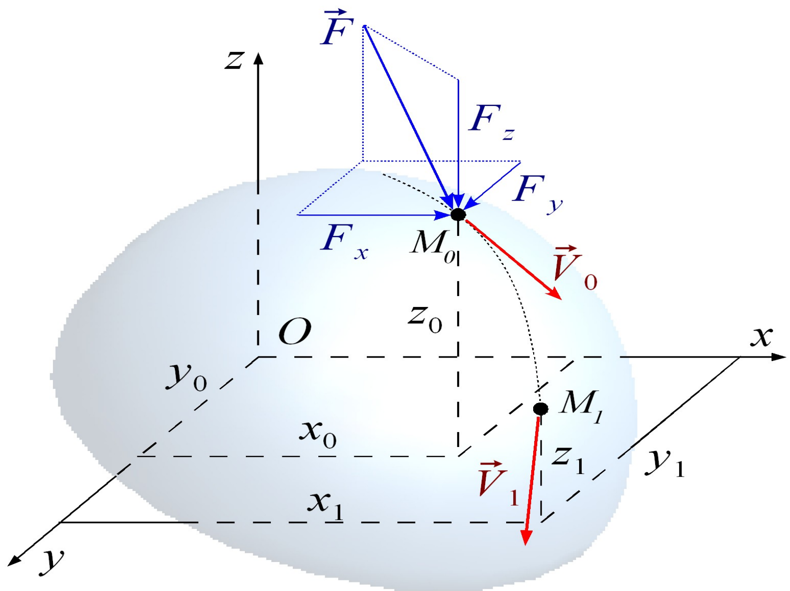


Рис. 1.76. Движение материальной точки M по поверхности под действием силы (равнодействующей) $\vec{F}$, рассматриваемое в системе декартовых осей x, y, z

Величина и направление равнодействующей $\vec{F}$ всех сил, приложенных к точке, определяется следующим образом.

Величина:

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2} \Rightarrow F = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}. \quad (1.103)$$

Направление:

$$\cos\alpha = \frac{\sum F_{kx}}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{\sum F_{ky}}{F}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sum F_{kz}}{F}. \qquad (1.104)$$

В данных формулах направление вектора равнодействующей $\vec{F}$ определяется с помощью направляющих косинусов, где α, β, γ - углы наклона вектора $\vec{F}$ к осям x, y, z соответственно.

Если используются оси естественного трехгранника (касательная τ, нормаль n, бинормаль b, рис. 1.77), рассматривается следующая группа уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= \sum F_{k\tau} \\ ma_n &= \sum F_{kn} \\ ma_b &= \sum F_{kb} \end{aligned}\right\}, \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= \sum F_{k\tau} \\ m\frac{V^2}{\rho} &= \sum F_{kn} \\ 0 &= \sum F_{kb} \end{aligned}\right\}. \qquad (1.105)$$

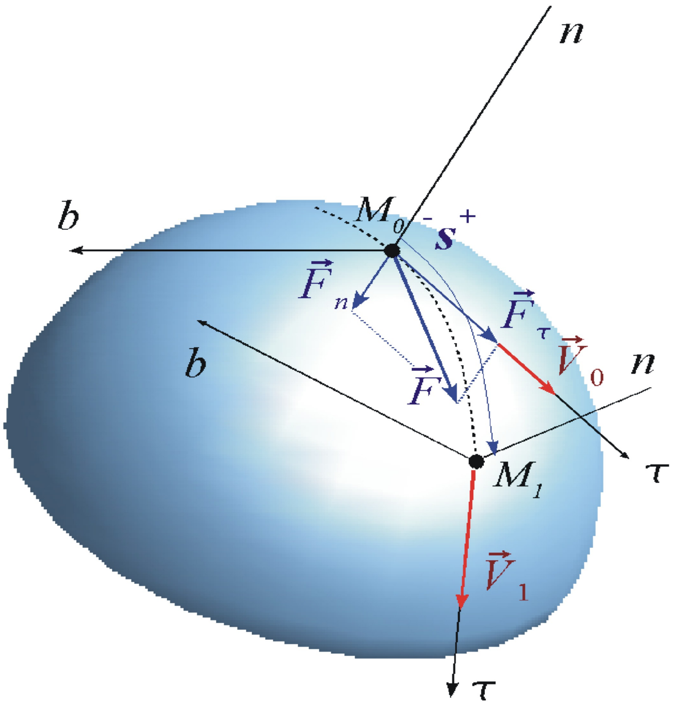


Рис. 1.77. Движение материальной точки M по поверхности под действием силы (равнодействующей) $\vec{F}$, рассматриваемое в системе естественных осей τ, n, b

Обратная задача

В рамках данной задачи определяется закон движения материальной точки по действующим на неё силам. Решение этой задачи сопряжено с необходимостью интегрировать дифференциальные уравнения движения. После интегрирования уравнений движения появляющиеся постоянные определяются путем рассмотрения начальных условий. Под начальными условиями здесь следует понимать значение положения $x_0,\ y_0,\ z_0$ и скорости $V_{0x},\ V_{0y},\ V_{0z}$ материальной точки в начальный момент времени $t=0\,c$.

Пример 1.15. Движение материальной точки массой $m=2\,кг$ определяется радиусом-вектором $\vec{r}=0{,}2\,t^3\,\vec{i}-6\sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{6}\right)\vec{j}+1{,}5\,t^2\,\vec{k}$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке в момент времени $t=1\,c$, а также её угол наклона к оси Ox.

Решение. Данная задача является прямой задачей динамики точки.

Вначале определяется полное ускорение точки как геометрическая сумма проекций её ускорений на декартовы оси. Потом используем второй (основной) закон динамики, согласно которому сила, действующая на точку, определяется как произведение её массы на модуль её ускорения в рассматриваемый момент времени. $a_x=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\left(0{,}2\,t^3\right)^{//}=1{,}2\,t$.

В момент времени $t=1\,c$ $\quad a_x=1{,}2\cdot 1=1{,}2\,м/c^2$.

$$a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\left(-6\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right)\right)^{//}=\frac{\pi^2}{6}\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{6}\right).$$

В момент времени $t=1\,c$ $\quad a_y=\dfrac{\pi^2}{6}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi\cdot 1}{6}\right)\approx 0{,}82\,м/c^2$.

$$a_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\left(1{,}5\,t^2\right)^{//}=const=2\,м/c^2.$$

Модуль полного ускорения: $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{1{,}2^2+0{,}82^2+2^2}\Rightarrow\ a\approx 2{,}47\,м/c^2$.

Модуль равнодействующей $R=m\cdot a\Rightarrow\ R=2\cdot 2{,}47=4{,}94\,H$.

Согласно второму закону, материальная точка получает направление ускорения в направлении действия силы, приложенной к ней, поэтому для определения угла наклона вектора силы к оси Ox достаточно определить угол наклона вектора ускорения $\sphericalangle\alpha_1$ к этой оси.

$$\sphericalangle\alpha_1=\arccos\left(\frac{a_x}{a}\right)=\arccos\left(\frac{1{,}2}{2{,}47}\right)\Rightarrow\ \sphericalangle\alpha_1\approx 60{,}9^\circ.$$

Ответ: $R=4{,}94\,H$, $\sphericalangle\alpha_1\approx 60{,}9^\circ$.

Пример 1.16. Брусок массой $m=4\,кг$, находящийся на шероховатой наклонной поверхности с углом наклона 30°, из состояния покоя начинает движение под действием силы собственного веса и приложенной силы $F=5\,H$, рис.1.78.

Определить путь s и скорость V данного бруска спустя 3 *сек* после начала движения, если коэффициент трения скольжения между брусом и поверхностью составляет $f=0{,}2$. Брусок считать материальной точкой.

Решение. Данная задача представляет собой обратную задачу динамики точки. Примем систему координат xOy, рис. 1.79.

Брус совершает прямолинейное поступательное движение только вдоль оси Ox. Поэтому для определения параметров его движения достаточно использовать одно дифференциальное уравнение движения относительно этой оси: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{kx}$.

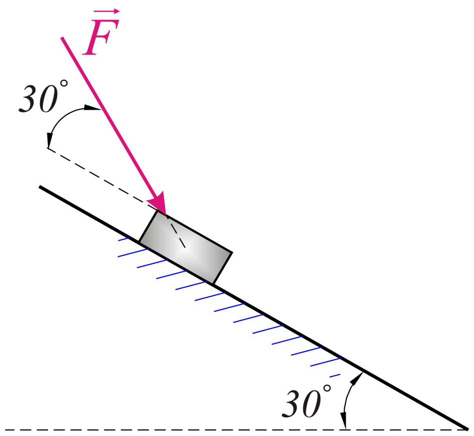


Рис. 1.78. К условию примера 1.16

Приложим силы, действующие на груз, см. рис. 1.79, и рассмотрим уравнение движения в отношении нашей текущей задачи.

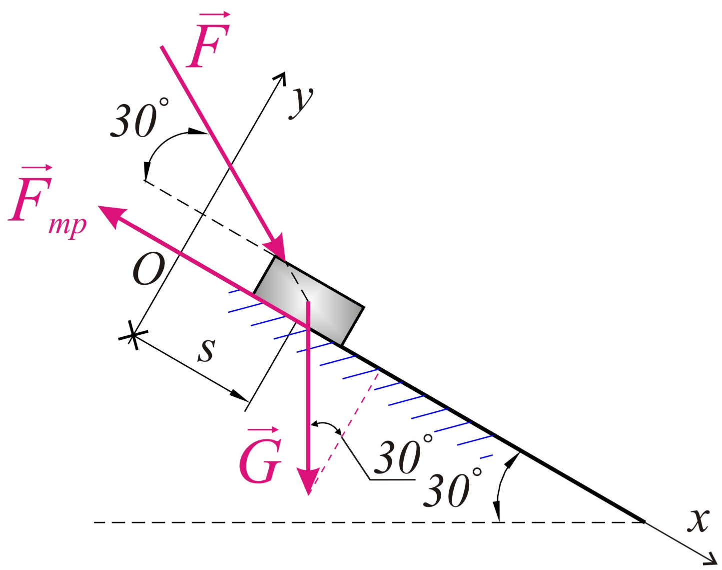


Рис. 1.79. К решению примера 1.16

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{kx}\Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\cdot\cos 30^\circ+G\cdot\sin 30^\circ-F_{тр}\Rightarrow$$

Разделим обе части уравнения на $m=4\,кг$:

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=1{,}25\cdot\cos 30^\circ+g\cdot\sin 30^\circ-g\cdot f\cdot\cos 30^\circ$. Упростим уравнение:

$a = a_x = \ddot{x} = \dfrac{d^2 x}{d t^2} = 5{,}81$.

Дважды проинтегрируем данное уравнение:

$$V = V_x = \dot{x} = \frac{d x}{d t} = 5{,}81 t + C_1; \qquad (*)$$

$$s = x = 5{,}81 \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2. \qquad (**)$$

Для определения неизвестных постоянных в (*) и (**), используем граничные условия, согласно которым при $t = 0$ $V = \dot{x} = 0$ и $x = 0$.
Подставляя граничные условия в уравнение (*), получим:
$0 = 5{,}81 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$.
Подставляя граничные условия в уравнение (**), получим:
$0 = 5{,}81 \dfrac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$.
Таким образом, с учетом определённых постоянных интегрирования уравнения (*)и (**) примут вид:

$$V = V_x = \dot{x} = \frac{d x}{d t} = 5{,}81 t; \qquad (*.)$$

$$s = x = 5{,}81 \frac{t^2}{2}. \qquad (**.)$$

Подставляя в (*.) значение времени $t = 3\,c$, определим требуемую скорость. Подставляя в (**.) значение времени $t = 3\,c$, определим искомое перемещение. Таким образом:
$V = 5{,}81 \cdot 3 = 17{,}43\, м/c$.
$s = 5{,}81 \dfrac{3^2}{2} = 26{,}15\, м$.
Ответ: $V = 17{,}43\, м/c$; $s = 26{,}15\, м$.

1.3.1.3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Общие теоремы динамики устанавливают зависимости между динамическими характеристиками движения и дают возможность исследовать движение как твердых тел, так и механических систем, состоящих из материальных точек. Применение теорем динамики позволяет решать многие задачи без применения трудоемкой процедуры интегрирования.

1.3.1.4. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ИМПУЛЬС СИЛЫ

О «количестве движения», как о характеристике движущихся тел, впервые упоминается в работах Галилео Галилея.

Позднее количество движения в качестве динамической характеристики было введено Рене Декартом (XVII в).

Согласно определению, *количеством движения материальной точки* называется векторная величина $\vec{Q}$, равная произведению массы точки на её скорость, т.е.:

$$\vec{Q} = m\vec{V}. \tag{1.106}$$

Количество движения в системе СИ измеряется - $[H \cdot c]$, или $\left[\frac{кг \cdot м}{с}\right]$.

Вектор $\vec{Q}$ направлен так же, как вектор скорости $\vec{V}$, по касательной к траектории в сторону движения материальной точки (рис. 1.78).

Наряду с количеством движения, в динамике используют понятие *импульса силы*.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению силы $\vec{F}$ на элементарный промежуток времени dt:

$$d\vec{S} = \vec{F}\,dt. \tag{1.107}$$

В случае, если вектор силы не изменяется: $\vec{F} = const$, импульс силы равен произведению модуля силы на время её действия.

Если сила с течением времени меняется, то *импульс силы за конечный промежуток времени* t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до t_1:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}\,dt. \tag{1.108}$$

Являясь векторной величиной, импульс силы может быть вычислен по своим проекциям на координатные оси:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x\,dt;\quad S_y = \int_0^{t_1} F_y\,dt;\quad S_z = \int_0^{t_1} F_z\,dt. \tag{1.109}$$

Модуль вектора импульса в таком случае:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \tag{1.110}$$

Импульс силы, так же как и количество движения, имеет единицу измерения $[H \cdot c]$, или $[кг \cdot м \cdot с^{-1}]$.

Направлен вектор импульса силы по линии действия силы в ту же сторону (см. рис. 1.80).

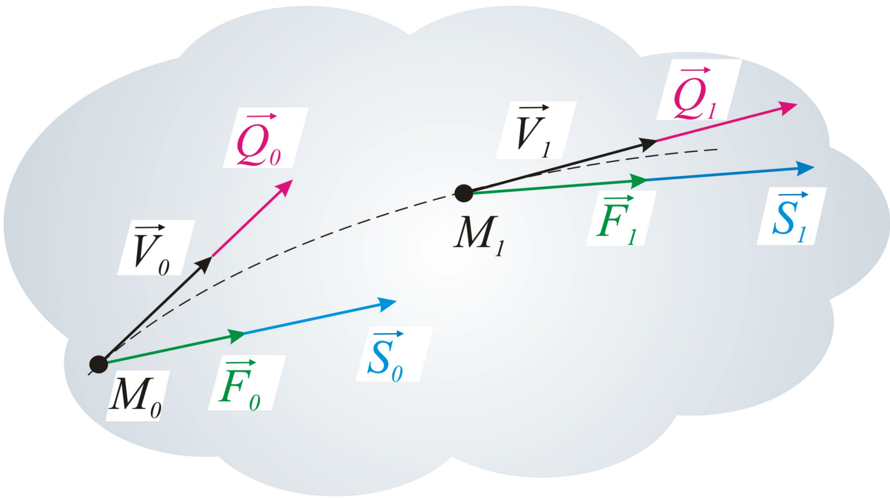


Рис. 1.80. Движение материальной точки M под действием переменной силы $\vec{F}$: взаиморасположение вектора силы $\vec{F}$, импульса этой силы $\vec{S}$, количества движения $\vec{Q}$ и вектора скорости $\vec{V}$

Наличие одинаковых единиц измерения говорит о том, что количество движения материальной точки и импульс сил, действующих на неё, взаимосвязаны. Данная взаимосвязь представляет собой теорему об изменении количества движения.

Пример 1.17

Шкив *1* радиуса $R=1{,}2\,м$, вращаясь с угловой скоростью $\omega=0{,}5\,c^{-1}$, поднимает груз *2* массой $m=20\,кг$, рис. 1.81.

Определить модуль количества движения груза, считая его материальной точкой.

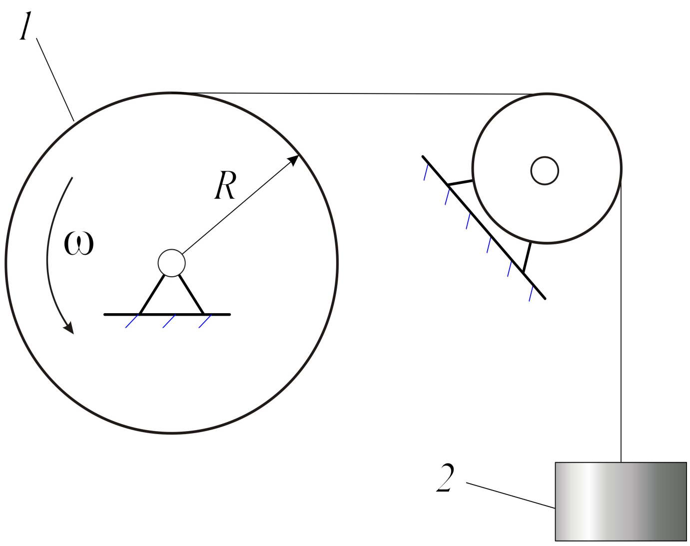


Рис. 1.81. К условию примера 1.17

Решение: Данная задача сводится к определению скорости груза с последующим использованием определения количества движения материальной точки. Определим линейную скорость точки, лежащей на

поверхности шкива *1,* совершающего вращательное движение:
$V=\omega\cdot R=0{,}5\cdot 1{,}2=0{,}6\ м/с$.

Считая линейную скорость в любых точках гибкой связи одинаковой, делаем вывод о том, что скорость груза будет иметь такое же значение. Далее, используем понятие количества движения материальной точки:
$|Q|=m\cdot V=20\cdot 0{,}6=12\ H\cdot c$.
Ответ: $Q=12\ H\cdot c$.

Пример 1.18. Модуль постоянной по направлению силы изменяется по закону $F=1+18t^2$. Найти модуль импульса этой силы за промежуток времени $\tau=t_2-t_1$, где $t_2=3\,c,\ t_1=0$.

Решение: Так как модуль импульса по условию задачи меняется с течением времени, поэтому для решения нельзя использовать простую линейную зависимость. В таком случае импульс за конечный промежуток времени определяется интегральным выражением:

$$|\vec{S}|=\int_{t_1}^{t_2} F\,dt=\int_0^3 (1+18t^2)\,dt=(t+6t^3)\Big|_0^3=3+6\cdot 3^3=165\ H\cdot c.$$

Ответ: $S=165\,[H\cdot c]$.

1.3.1.5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Теорема об изменении количества движения материальной точки в векторном виде представляет собой следующее выражение:

$$m\vec{V}_1-m\vec{V}_0=\sum\vec{S}_k. \tag{1.111}$$

Т.е.: *Изменение количества движения материальной точки за конечный промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за этот же промежуток времени.*

Теорему об изменении количества движения материальной точки можно использовать в виде уравнений проекций векторных величин на соответствующие координатные оси:

$$\left.\begin{aligned} mV_{1x}-mV_{0x}&=\sum S_{kx};\\ mV_{1y}-mV_{0y}&=\sum S_{ky};\\ mV_{1z}-mV_{0z}&=\sum S_{kz}.\end{aligned}\right\} \tag{1.112}$$

Полный импульс сил, действующих на материальную точку, в таком случае можно представить как

$$\sum S_k=\sqrt{\left(\sum S_{kx}\right)^2+\left(\sum S_{ky}\right)^2+\left(\sum S_{kz}\right)^2} \tag{1.113}$$

Пример 1.19. Материальная точка M массой $2\,кг$ равномерно движется по траектории, представляющей собой окружность со скоростью $V=3\,\frac{м}{с}$. Определить модуль импульса равнодействующей всех сил, действующих на точку, за время её движения из положения *1* в положение *2*, рис. 1.82.

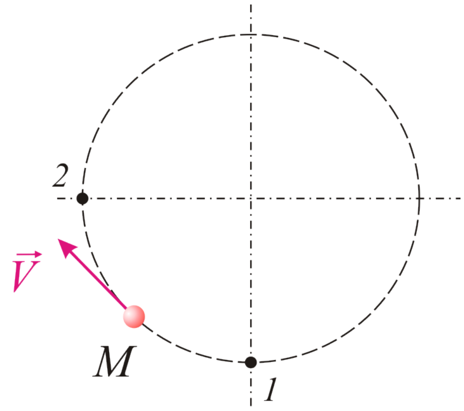


Рис.1.82. К условию примера 1.19

Решение: Примем систему координат xOy и изобразим вектор скорости для точки M, находящейся в начальном $\vec{V}_1$ и конечном $\vec{V}_2$ положении, рис. 1.83.

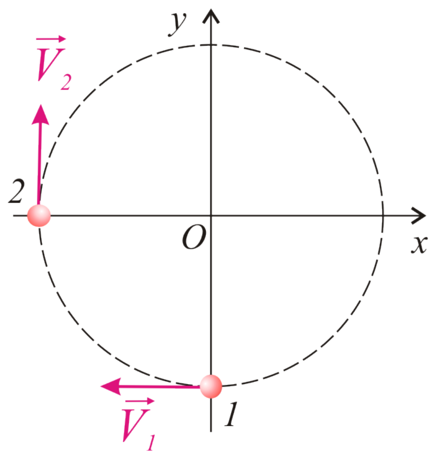


Рис.1.83. К решению примера 1.19

Наша точка движется в плоскости координатных осей xOy, поэтому можно воспользоваться теоремой об изменении количества движения материальной точки в уравнениях проекций сумм импульсов на оси Ox и Oy:

$$\left.\begin{aligned} mV_{2x}-mV_{1x}&=\sum S_{kx};\\ mV_{2y}-mV_{1y}&=\sum S_{ky}.\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2\cdot 0-2\cdot(-3)&=\sum S_{kx}\\ 2\cdot 3-2\cdot 0&=\sum S_{ky}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sum S_{kx}&=6\;H\cdot c\\ \sum S_{ky}&=6\,H\cdot c\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\sum S_k=\sqrt{\left(\sum S_{kx}\right)^2+\left(\sum S_{ky}\right)^2}=\sqrt{(6)^2+(6)^2}\Rightarrow \sum S_k\approx 8{,}5\,H\cdot c\,.$$

Ответ: $\sum S_k\approx 8{,}5\,H\cdot c\,.$

1.3.1.6. МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА МОМЕНТОВ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА

Моментом количества движения материальной точки относительно произвольного центра O называется векторная величина $\vec{L}_O$, равная моменту количества движения $m\vec{V}$ относительно этого же центра, определяемая равенством:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{Q}. \tag{1.114}$$

Вектор $\vec{L}_O$ направлен перпендикулярно плоскости, содержащей радиус-вектор $\vec{R}$, вектор количества движения $\vec{Q}$ и центр O.

Модуль вектора момента количества движения $\vec{L}_0$ определяется, исходя из свойства векторного произведения.

По модулю $\vec{L}_0$ будет равен удвоенной площади треугольника (рис. 1.84), построенного на радиусе-векторе $\vec{R}$ и векторе $\vec{Q}$, т.е.:

$$\left|\vec{L}_O\right| \equiv \left|\vec{M}_O\left(m\vec{V}\right)\right| = m \cdot V \cdot h, \tag{1.115}$$

где h - кратчайшее растояние между центром O и линией действия вектора $\vec{L}_0$ (плечо вектора количества движения).

При определении момента количества движения, также как и для момента силы, необходимо учитывать правило знаков, согласно которому *момент количества движения считается положительным, если вектор* $\vec{Q}$ *стремится повернуть плечо* h *против часовой стрелки.*

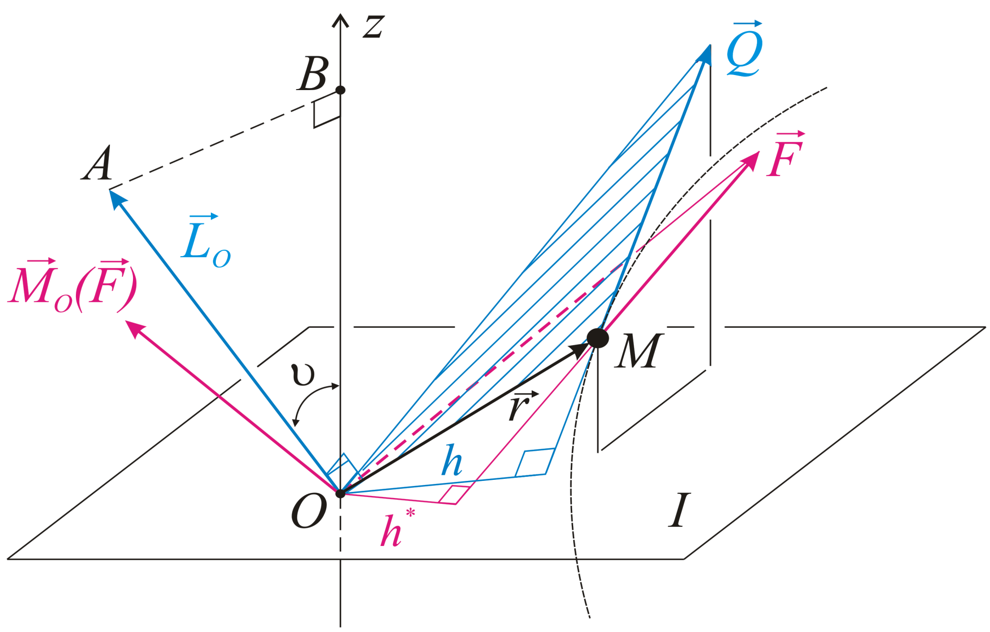


Рис. 1.84. Положение вектора момента количества движения $\vec{L}_O$ и его плеча h, а также вектора момента силы $\vec{M}_O(\vec{F})$ и его плеча h^* относительно точки O

Момент количества движения и момент силы связаны между собой дифференциальной зависимостью согласно *теореме моментов материальной точки относительно центра.* В соответствии с данной теоремой:

Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно произвольного неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt}=\vec{M}_O(\vec{F}). \tag{1.116}$$

Из данного уравнения следует, что если момент силы относительно произвольной точки O равен нулю, то $\vec{L}_O=const$.

В отношении какой-либо оси z зависимость момента количества движения и момента силы трансформируется в *теорему моментов относительно оси*:

$$\frac{dL_z}{dt}=M_z(\vec{F}). \tag{1.117}$$

Момент количества движения материальной точки L_z относительно оси z является скалярной величиной.

Пример 1.20

Движение материальной точки M массой $m=2\,кг$ происходит по окружности радиуса $r=0{,}8\,м$ (рис. 1.85), согласно уравнению $s=0{,}25\,t^2$. Определить момент количества движения этой точки относительно центра окружности в момент времени $t=2\,c$.

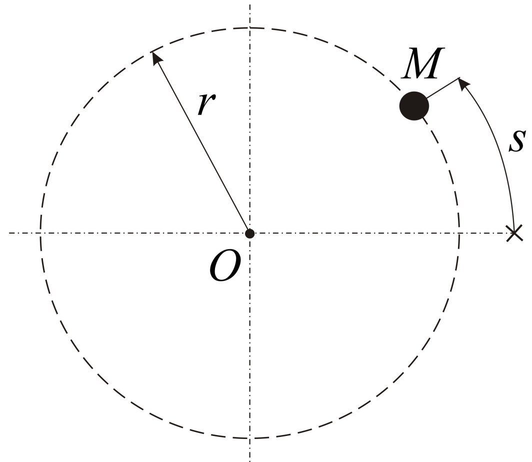


Рис. 1.85. К условию примера 1.20

Решение: $V=\frac{ds}{dt}=(0{,}25\,t^2)'=0{,}5\,t$.

При $t=2\,c \rightarrow V=1\,м/c$.

Пользуясь понятием момента количества движения:

$\left|\vec{L}_O\right| = m \cdot V \cdot h = m \cdot V \cdot r = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}8 = 1{,}6\, кг \cdot м^2 / с.$

Ответ: $\left|\vec{L}_O\right| = 1{,}6\, кг \cdot м^2 / с.$

Пример 1.21

Трубка равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 20\, с^{-1}$. По трубке движется шарик массой $m = 0{,}2\, кг$, рис. 1.86.

Определить момент количества движения шарика относительно оси вращения трубки, когда расстояние $OM = 0{,}8\, м$ и скорость шарика относительно трубки $V_r = 1{,}5\, м/с$.

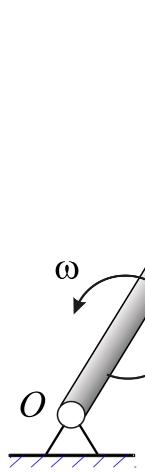


Рис. 1.86. К условию примера 1.21

Решение: Учтём то обстоятельство, что шарик совершает сложное движение, состоящее из относительного и переносного. Так как линия действия вектора скорости шарика в относительном движении проходит через ось вращения, то момент количества движения шарика в относительном движении по отношению к оси вращения равен нулю.

Модуль вектора скорости в переносном вращательном движении:

$V_e = \omega \cdot |OM| = 20 \cdot 0{,}8 = 16\, м/с.$

Таким образом, в формировании момента количества движения участвует только скорость шарика в переносном движении и поэтому его момент количества движения относительно оси вращения определится как

$\left|\vec{L}_0\right| = m \cdot V_e \cdot |OM| = 0{,}2 \cdot 16 \cdot 0{,}8 = 2{,}56\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}.$

Ответ: $\left|\vec{L}_0\right| = 2{,}56\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}.$

1.3.1.7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Помимо количества движения, как его меры, движущуюся материальную точку можно оценить при помощи кинетической энергии.

Кинетической энергией материальной точки называют меру её механического движения, выражающуюся в половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Т.е. кинетической энергией материальной точки будет являться скалярная величина T:

$$T = \frac{mV^2}{2}, \; [Дж]. \quad (1.118)$$

Пример 1.22. Тело *1* движется прямолинейно вертикально вверх, рис. 1.87, со скоростью $V_1 = 2\,м/с$. К стержню *2* длиной $OA = 0{,}4\,м$, который вращается вокруг горизонтальной оси O с постоянной угловой скоростью $\omega = 20\,рад/с$, прикреплен точечный груз A массой $0{,}2\,кг$. Определить кинетическую энергию груза при $\varphi = 60^\circ$. Груз считать материальной точкой.

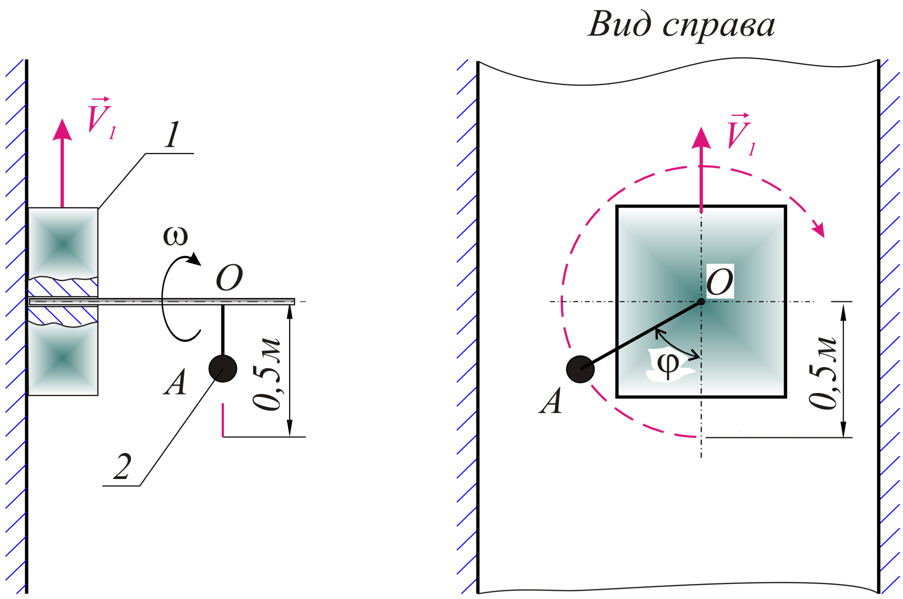


Рис. 1.87. К условию примера 1.22

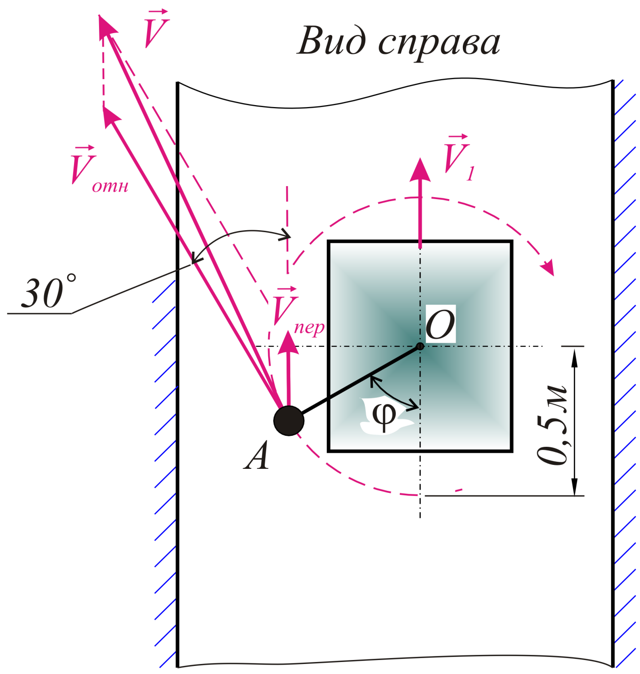


Рис. 1.88. К решению примера 1.22

Решение:

В данном случае груз совершает сложное движение.
Скорость груза в относительном вращательном движении:
$V_{от} = \omega \cdot r = 20 \cdot 0{,}4 = 8\ м/с$.

Вектор $\vec{V}_{отн} \perp OA$ и направлен в сторону относительного вращательного движения, рис. 1.88.

Вектор скорости груза в переносном поступательном движении будет тождественен вектору скорости тела *1,* т.е. $V_{пер} = V_1 = 2\ м/с$.

Тогда абсолютная скорость груза $V = \sqrt{V_{от}^2 + V_1^2 + 2V_{от}V_1 \cos\alpha} \Rightarrow$
$V = \sqrt{8^2 + 2^2 + 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ} \approx 9{,}78\ м/с$.

Определив абсолютную скорость груза, согласно определению, его кинетическую энергию найдём:

$$T = \frac{mV^2}{2} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}78^2}{2} \approx 9{,}57\ Дж.$$

Ответ: $T \approx 9{,}57\ Дж$.

1.3.1.8. РАБОТА СИЛЫ

Для характеристики действия, оказываемого силой на материальную точку (твердое тело) при её перемещении, вводят понятие *работы силы.*

Элементарной работой силы $\vec{F}$, приложенной к материальной точке M, называется скалярная величина, равная:

$$dA = F_\tau ds, \tag{1.119}$$

где F_τ - проекция силы $\vec{F}$ на касательную к траектории движения точки M, направленную в сторону перемещения этой точки (рис. 1.89).

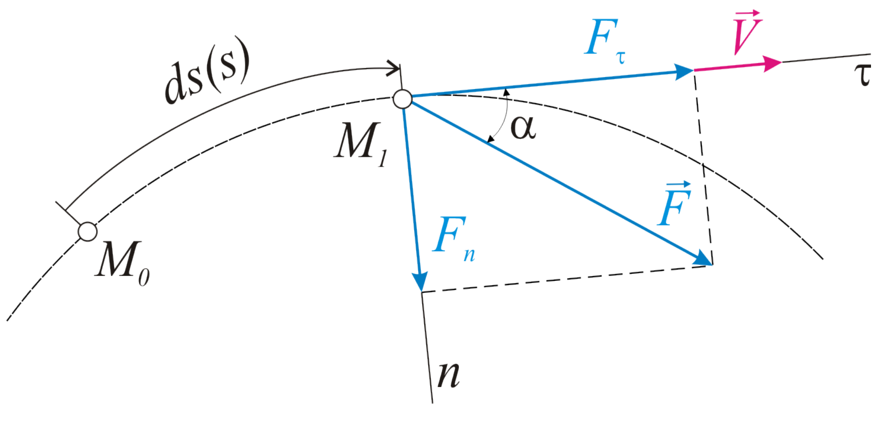


Рис. 1.89. К определению работы силы по перемещению материальной точки

Обратите внимание на то обстоятельство, что нормальная составляющая силы F_n не совершает работу по перемещению данной точки.

Так как проекция силы на касательную $F_\tau = F \cdot \cos\alpha$, можно представить элементарную работу в виде выражения:

$$dA = F \cdot \cos\alpha \, ds, \tag{1.120}$$

где α угол между вектором скорости этой точки (направлением её перемещения) и вектором силы $\vec{F}$, (см. рис. 1.89).

Знак работы, совершаемой силой по перемещению материальной точки, связан со знаком проекции этой силы.

Если проекция силы на направление перемещения положительна $(\alpha < 90^\circ)$, то работа такой силы по перемещению данной точки тоже положительна.

В противном случае - при $\alpha > 0$ работа будет отрицательной.

В качестве примера силы, совершающей отрицательную работу при перемещении, можно привести силу сопротивления среды.

Заметим, что вектор равнодействующей этой силы всегда направлен в сторону, противоположную перемещению.

Если сила перпендикулярна совершаемому точкой перемещению $(\alpha = 0)$, то она не совершает работу при данном перемещении.

Работа силы на каком-либо конечном перемещении M_0M_1, заданном с использованием естественных осей, вычисляется согласно выражению:

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \, ds. \tag{1.122}$$

При движении, заданном в системе декартовых осей, работу можно вычислить как

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right). \tag{1.123}$$

Если касательная составляющая вектора силы остается постоянной величиной (например, при прямолинейном движении, рис. 1.90), то:

$$A_{M_0M_1} = F_\tau \cdot s, \tag{1.124}$$

где $s = |M_0M_1|$.

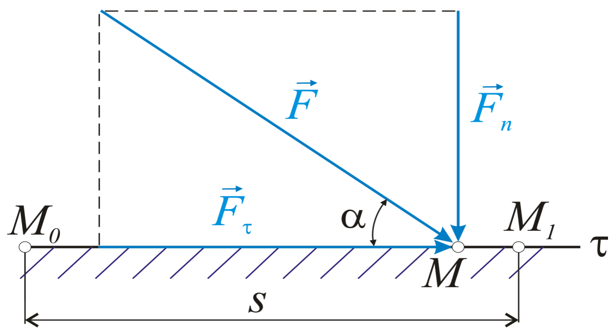


Рис. 1.90. К определению работы при прямолинейном перемещении

Работа в системе СИ измеряется в $[Дж]$, или $[Н \cdot м]$, или $[кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}]$. При определении работы необходимо учитывать специфику силы, совершающей данную работу. Так, например, работу силы тяжести по перемещению материальной точки M из положения M_0 в положение M_1 (рис. 1.91), согласно определению, оценивают как

$$A_{M_0 M_1} = \pm P \cdot h, \tag{1.125}$$

где $h = z_0 - z_1$.

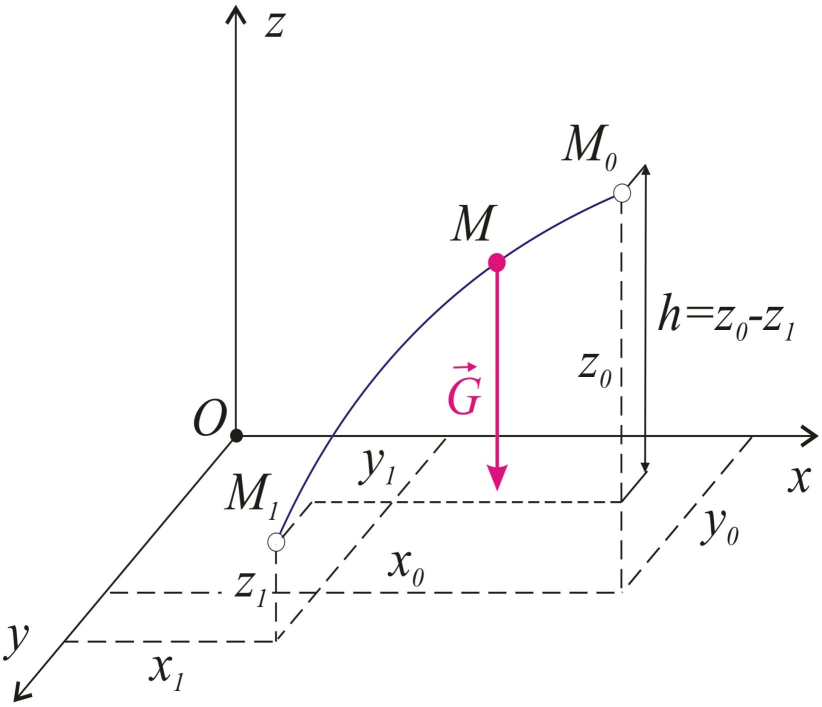


Рис. 1.91. К определению работы силы тяжести

Очевидно, что если материальная точка движется в направлении вниз, то работа силы тяжести $\vec{G}$ при таком перемещении будет положительной, и наоборот, если материальная точка перемещается вверх, то работа силы тяжести будет отрицательной величиной.

На рис. 1.91 изображён случай, когда работа силы тяжести $\vec{G}$ положительна. Заметим то обстоятельство, что величина работы силы тяжести не зависит от траектории, по которой перемещается материальная точка. Силы, обладающие таким свойством, называются *потенциальными силами*.

Другим примером работы потенциальных сил может служить работа силы упругости пружины, изображенной на рис. 1.92.

Рассматривая работу цилиндрической пружины в плоскости, на рисунке отметим положение 0, соответствующее ненапряженной пружине. Первоначальная длина пружины - l_0. При ненапряжённом состоянии величина силы упругости $\vec{F}_{упр}$ (положение 0) будет равна нулю.

При отклонении пружины от положения 0 за счёт приложения силы извне величина силы упругости принимает ненулевое значение и может быть оценена по формуле:

$$F_{упр} = c \cdot \lambda = c|x|; \quad F_x = -c \cdot x, \tag{1.126}$$

где c - коэффициент жесткости упругого элемента (пружины);
λ - величина отклонения пружины от положения равновесия.

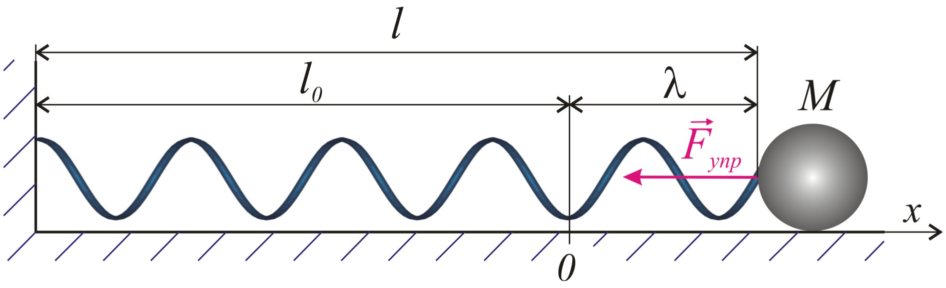


Рис. 1.92. К определению работы силы упругости

Величина же работы, совершаемой этой силой, будет оцениваться как

$$A_{M_0 M_1} = \frac{c}{2} \cdot \left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right), \tag{1.127}$$

где λ_0 - расстояние от точки M_0 в начальном положении до точки 0, определяющей равновесное положение; λ_1 - расстояние от точки M_1 в конечном положении до точки 0, определяющей равновесное положение.

Заметим, что работа силы упругости будет положительной, когда точка стремится к равновесному положению $(\lambda_0 > \lambda_1)$, и отрицательной, когда она от него удаляется $(\lambda_0 < \lambda_1)$. Рассмотрим способ определения работы силы трения при перемещении материальной точки M по шероховатой поверхности (рис. 1.93).

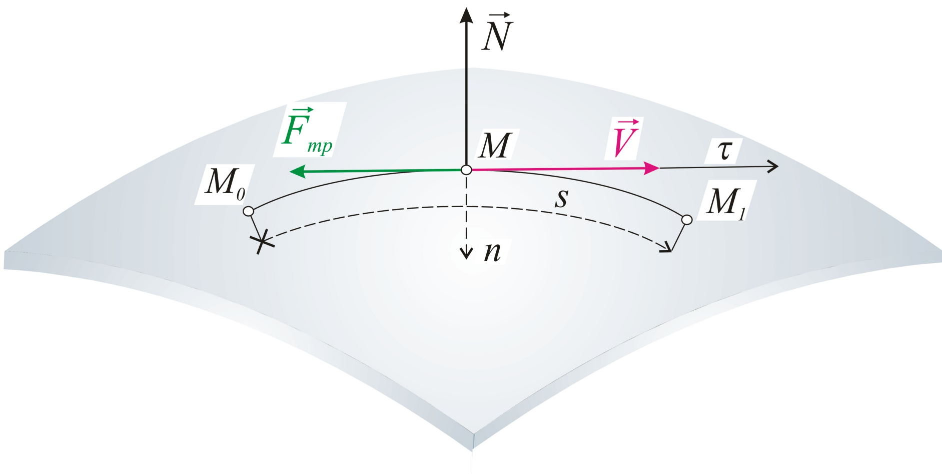


Рис. 1.93. К определению работы силы трения при перемещении точки по шероховатой поверхности

Действующая на точку сила трения $\vec{F}_{тр}$ направлена противоположно перемещению точки (вектору $\vec{V}$). Если по величине сила трения постоянна, то её работа может быть выражена по формуле:

$$A_{M_0 M_1} = -F_{тр} \cdot s, \tag{1.128}$$

где s - длина дуги, соответствующая длине дуги $M_0 M_1$, по которой перемещается точка.

Анализируя выражение 1.128, отмечаем, что при изменении формы траектории движения точки в общем случае меняется величина s, а соответственно, и величина работы. Поэтому сила трения $\vec{F}_{тр}$ не является потенциальной силой.

Пример 1.23

На тело массой $m = 1\,кг$ (рис. 1.94), совершающее прямолинейное поступательное движение по горизонтальной шероховатой поверхности с $f = 0{,}2$, действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3 + 5$. Определить работу всех сил при перемещении этого тела из положения с координатой $x_0 = 0$ в положение $x_1 = 1\,м$. Тело считать материальной точкой.

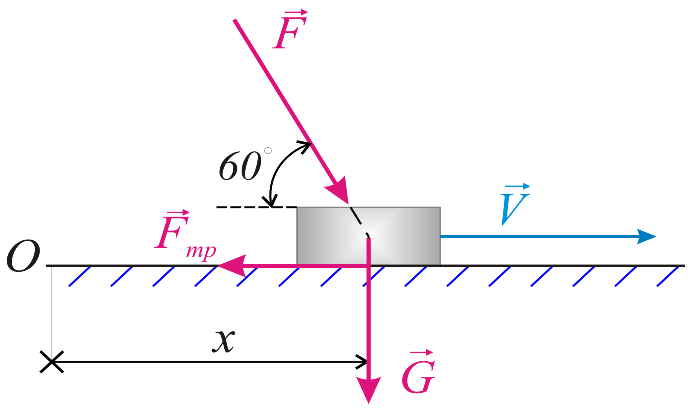


Рис. 1.94. К примеру 1.22

Решение:

Определим сумму проекций всех действующих сил на касательную к перемещению данного тела, которая будет равна проекции равнодействующей данной системы на эту ось, заметим, что работа силы тяжести на этом перемещении будет равна нулю, так как $\vec{G} \perp Ox$.

Следовательно:

$$R_\tau = \sum F_\tau = F \cdot \cos 60^\circ - F_{тр} = \left((4x^3 + 5)\cos 60^\circ - mg \cdot f\right) \Rightarrow$$

$$A = \int_{x_0}^{x_1} R_\tau\, dx = \int_0^1 ((4x^3 + 5) \cdot \cos 60^0 - mg \cdot f)\, dx = \left(0{,}5x^4 + 0{,}54x\right)\Big|_0^1 \Rightarrow A = 1{,}04\,Дж.$$

Ответ: $A = 1{,}04\,Дж$.

Пример 1.24

Ненагруженную пружину (рис. 1.95), коэффициент жесткости которой

$c = 200\ Н/м$, растянули на $3\ см$.

Определить работу силы упругости пружины на таком перемещении.

Решение. Работа силы упругости пружины будет отрицательна, так как перемещение, совершаемое упругим элементом под действием внешней силы, направлено в сторону, противоположную силе упругости.

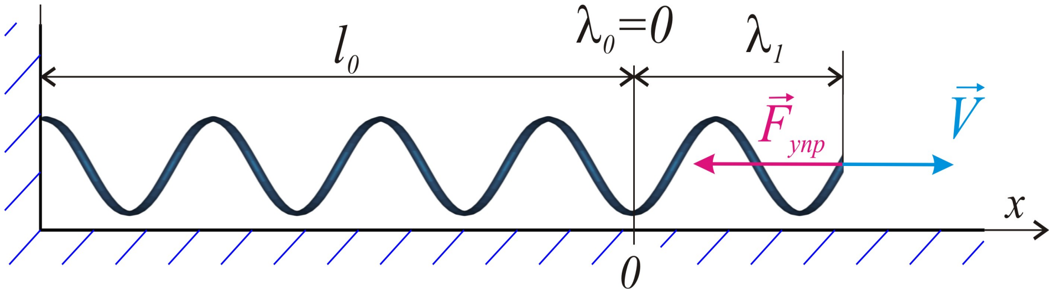


Рис. 1.95. К примеру 1.24

$$A = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) = \frac{200}{2}\left(0^2 - 0{,}03^2\right) = -0{,}09\ Дж.$$

Ответ: $A = -0{,}09\ Дж$.

Пример 1.25

Материальная точка M, масса которой $m = 0{,}5\ кг$ (рис. 1.96), скользит вниз по дуге окружности радиуса $r = 0{,}5\ м$ с центральным углом $\alpha = 90^0$. Определить работу, совершенную силой тяжести при перемещении точки M из положения A в положение B.

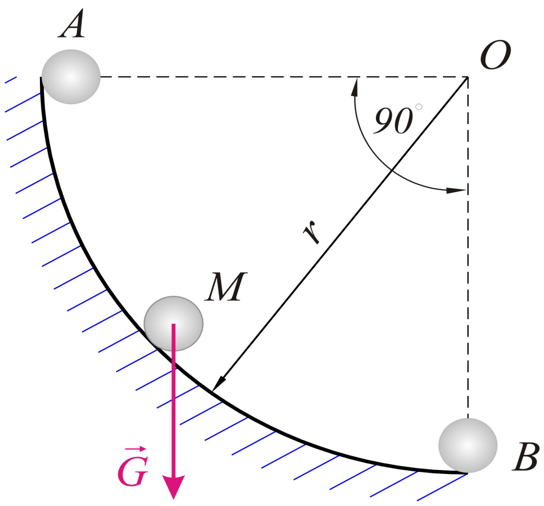


Рис. 1.96. К примеру 1.25

Решение: Сила тяжести является потенциальной силой, поэтому её работа не зависит от траектории движения.

В нашем случае она положительна, так как направление перемещения совпадает с направлением действия силы тяжести и равна:

$A = \pm mgh = +m \cdot g \cdot r = 0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \Rightarrow \quad A = 0{,}98\ Дж.$

Ответ: $A = 0{,}98\ Дж$.

1.3.1.9. МОЩНОСТЬ

Для оценки работы, совершаемой в единицу времени, применяется еще одна динамическая характеристика – *мощность*.

Под мощностью понимается величина N, определяющая работу, совершаемую силой, в единицу времени. В общем случае мощность определяется по формуле:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau \cdot ds}{dt} = F_\tau \cdot V. \tag{1.129}$$

Если работа совершается равномерно, то мощность может быть оценена при помощи более простого выражения:

$$N = \frac{A}{t}. \tag{1.130}$$

Формула 1.129 имеет большой практический смысл, сущность которого состоит в том, что при относительном постоянстве мощности источника энергии (привода) величина крутящего момента (силы тяги), развиваемая им, будет обратно пропорциональна скорости (частоте вращения) рабочего органа. В частности, при эксплуатации автомобиля в условиях бездорожья при помощи механизмов (например, коробки передач) используют увеличенный крутящий момент, развиваемый двигателем на низших передачах при пониженной скорости. Единицей измерения мощности в системе СИ является $[Дж \cdot с^{-1}]$, или $[ватт]$. Внесистемной единицей измерения мощности, применяемой в технике, является лошадиная сила: $1\, л.с. \approx 736\, Вт$.

Работу, произведенную машиной в единицу времени, можно оценить в соответствии с формулами 1.129-1.130.

Кроме этого, при производстве электроэнергии и отпуске её потребителям в электроэнергетике широко применяется её внесистемная величина оценки - *киловатт-час*: $1\, кВт \cdot час = 10^3 \cdot 60^2 = 3{,}6 \cdot МДж$.

Пример 1.26

Барабан, радиусом $R = 0{,}4\, м$ (рис. 1.97, *а*), вращаясь с постоянной скоростью $\omega = 5\, с^{-1}$, поднимает груз массой $m = 100\, кг$. Определить мощность, затрачиваемую на подъем груза. Массой барабана и блока, а также силами трения на них – пренебречь.

Решение:

Пользуясь принципом освобождаемости от связи, отбрасываем барабан, заменяя его действие на силу натяжения троса T, см. рис. 1.97, *б*). Проведем ось y в направлении движения груза (вертикально вверх). Учтём действие силы тяжести. Составим дифференциальное уравнение движения груза относительно этой оси.

$$m\frac{dV_y}{dt} = \sum F_i \Rightarrow \quad \text{или} \quad m\frac{dV_y}{dt} = T - G.$$

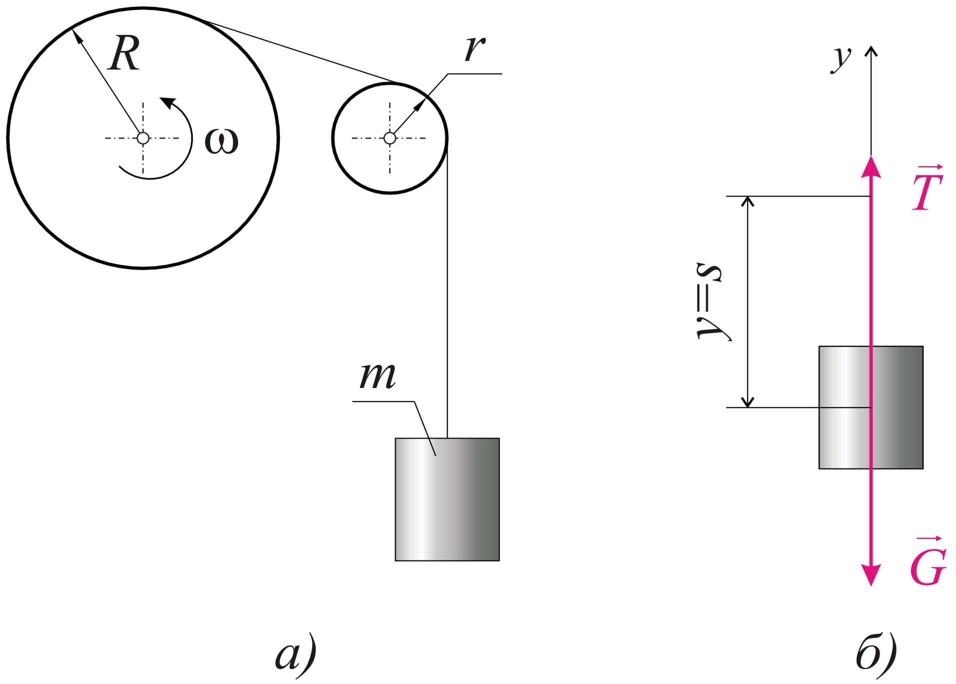


Рис. 1.97. К примеру 1.26: *а)* исходная схема; *б)* расчётная схема

Для решения последнего уравнения необходимо знать, как меняется скорость любой точки принадлежащей нити, неизменно связанной с самим грузом.

Возьмем точку, одновременно принадлежащую нити и лежащую на внешнем диаметре барабана.

Барабан совершает вращательное движение.

Линейная, или окружная скорость V точки, лежащей на его внешнем диаметре, определится как

$$V = \omega \cdot R \Rightarrow \quad 5 \cdot 0{,}4 = 2\ м/c = const.$$

Очевидно, что груз будет совершать прямолинейное равномерное движение, причём $V = V_y$.

Так как его ускорение $a_y = a = \dfrac{d\,V_y}{dt} = 0$, дифференциальное уравнение движения примет вид:

$$0 = T - G \Rightarrow \quad T = G = mg.$$

Таким образом, на груз будет действовать постоянная по модулю и по направлению сила $T = mg$.

В таком случае работа, совершаемая этой силой при перемещении груза: $A = T \cdot s$.

При постоянной скорости величина перемещения груза за единицу времени равна значению самой скорости, т.е. $s_1 = 2\ м$.

Учитывая то обстоятельство, что работа, совершаемая в единицу времени, представляет собой мощность $N \Rightarrow$

$$N = T \cdot s_1 = mg \cdot s_1 = 100 \cdot 10 \cdot 2 = 2\ kBm.$$

Ответ: $N = 2\ kBm$.

1.3.1.10. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Анализируя размерность работы, мы видим, что она совпадает с размерностью кинетической энергии. Очевидно, что между данными характеристиками существует взаимосвязь. Она выражается *теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки,* представляющей собой выражение:

$$\frac{mV_1^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\sum A_{(M_0M_1)}, \tag{1.131}$$

где $\sum A_{(M_0M_1)}$ - алгебраическая сумма работ всех сил, действующих на материальную точку M при её перемещении из положения M_0 в M_1;

$\frac{mV_0^2}{2}$ - кинетическая энергия точки M в положении M_0 и момент времени t_0;

$\frac{mV_1^2}{2}$ - кинетическая энергия точки M в положении M_1 и момент времени t_1.

В соответствии с 1.131, теорему об изменении кинетической энергии материальной точки можно сформулировать следующим образом:

Изменение кинетической энергии материальной точки при её некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Практический смысл данной теоремы заключается в следующем. Данная теорема позволяет, зная, как при движении точки меняется скорость, оценить работу действующих на неё сил или, наоборот, зная работу действующих сил, определить изменения скорости движения точки.

Пример 1.27. Телу, неизвестной массы m (рис. 1.98), находящемуся в нижней точке шероховатой наклонной поверхности с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ и коэффициентом трения скольжения $f = 0{,}2$, сообщили скорость $10\,м/с$. Определить наибольшее значение высоты h, которого сможет оно достичь. Тело считать материальной точкой.

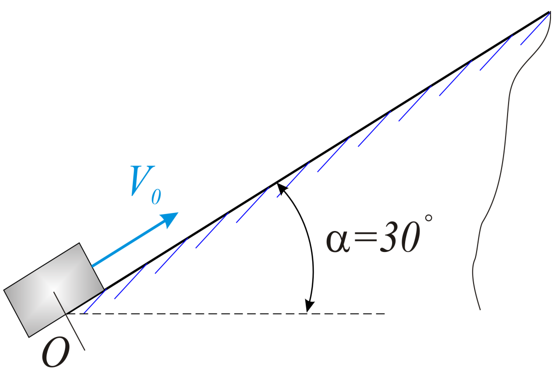


Рис. 1.98. К условию примера 1.27

Решение. Очевидно, что тело, имея начальную скорость $V_0 = 10\, м/с$, на уровне h остановится, т.е. будет иметь скорость $V_1 = 0$. На тело, двигающееся по наклонной шероховатой поверхности, будет действовать сила тяжести G, а также сила трения $F_{тр}$, рис. 1.99.

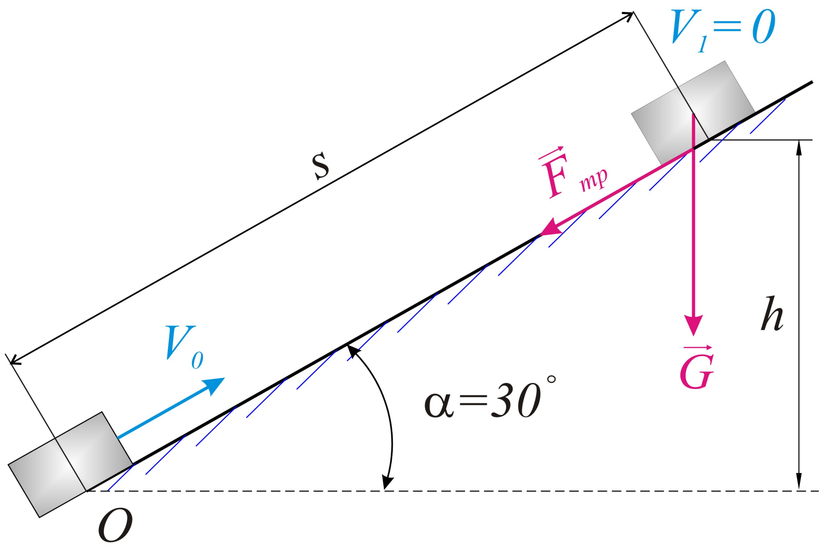


Рис. 1.99. К решению примера 1.27

Используем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{0-1}.$$

Определим работы всех сил, совершаемые на этом перемещении:
Работа силы тяжести $A_G = -mg \cdot h$.
Работа силы трения $A_{тр} = -mg \cdot f \cdot \cos\alpha \cdot s$.
С учётом того, что $s = \dfrac{h}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$A_{тр} = -mg \cdot f \cdot h \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Таким образом, теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в отношении к рассматриваемой задаче можно представить в следующем виде:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -mgh - mg \cdot f \cdot h \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Упрощаем уравнение:

$$0{,}5\left(V_1^2 - V_0^2\right) = -gh\left(1 + f \cdot \operatorname{ctg}\alpha\right).$$

Выражаем искомую величину:

$$h = \frac{\left(V_1^2 - V_0^2\right)}{-2g\left(1 + f \cdot \operatorname{ctg}\alpha\right)} = \frac{0^2 - 10^2}{-2 \cdot g\left(1 + 0{,}2 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ\right)} \Rightarrow \quad h \approx 3{,}79\, м.$$

Ответ: $h \approx 3{,}79\, м$.

1.3.1.11. КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Колебания можно подразделить на *свободные незатухающие*, *свободные с наличием вязкого сопротивления (затухающие)* и *вынужденные*.

1.3.1.12. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В этом случае рассматривают колебательное движение материальной точки без учета среды сопротивления. Закон движения прямолинейных колебаний материальной точки вдоль оси x при свободных незатухающих колебаниях в дифференциальной форме имеет вид:

$$\ddot{x}+k^2\cdot x=0. \tag{1.132}$$

Данное выражение представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого будет функция:

$$x=A\sin(kt+\alpha). \tag{1.133}$$

Скорость материальной точки V при этом можно определить как

$$V=V_x=\dot{x}=A\,k\cos(kt+\alpha). \tag{1.134}$$

Так как закон колебательного движения содержит периодическую функцию, то такие колебания считаются *гармоническими*.

Рассмотрим параметры, входящие в данные уравнения:

$\dfrac{C_1}{\cos\alpha}=\dfrac{C_2}{\sin\alpha}=A$ - амплитуда свободных незатухающих колебаний, $[м]$;

$k^2=\dfrac{c}{m}$, поэтому $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - круговая частота, $[c^{-1}]$; $(k\,t+\alpha)=\varphi$ - фаза колебаний, $[рад]$; α - начальная фаза колебаний $[рад]$;

c - постоянная, характеризующая восстанавливающую силу упругого элемента (его жесткость), $[H/м]$. Параметры A и α находятся из начальных данных.

Дадим краткую характеристику параметров колебательного движения.

Амплитудой колебаний называется величина, равная наибольшему отклонению материальной точки от центра колебаний O. Часто используют величину, равную удвоенному значению амплитуды колебаний, это так называемый *размах колебаний.* Для характеристики гармонических колебаний также используют величину, называемую *периодом колебаний* T, $[c]$.

Период колебаний связан с круговой частотой k следующей зависимостью:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \qquad (1.135)$$

Величину, обратную периоду колебаний T, называют *частотой колебаний* ν, измеряемой в СИ: $[c^{-1}]$ или $[Гц]$.

$$\nu = \frac{1}{T}. \qquad (1.136)$$

Частота колебаний – это число полных колебаний, совершаемых точкой за 1 *сек.*

Круговая частота – это число полных колебаний, совершаемых точкой за время 2π *сек.*

Как мы видим, круговая частота k отличается от частоты колебаний ν на величину постоянного множителя 2π, т.е.:

$$k = 2\pi \cdot \nu. \qquad (1.137)$$

При рассмотрении свободных незатухающих колебаний при действии на материальную точку постоянной силы (например, силы тяжести P) необходимо учитывать смещение её равновесного положения (центра колебаний) в сторону действия этой силы на величину $\lambda_{ст}$, называемую *статическим отклонением*, выраженную в $[м]$ и определяемую следующим выражением:

$$\lambda_{ст} = P / c. \qquad (1.138)$$

В случае, когда единственной постоянной силой, действующей на материальную точку массой m, является сила тяжести $P = mg$, период колебаний T можно определить по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\lambda_{ст}}{P}}, \quad \text{или} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{ст}}{g}}. \qquad (1.139)$$

При использовании в качестве *восстанавливающей* силы упругости нескольких элементов их *эквивалентная жесткость* $c_{экв}$ рассчитывается следующим образом (рис. 1.100).

При параллельном соединении двух элементов разной жесткости c_1, c_2 с учетом необходимого при прямолинейных колебаниях условия $l_1 / l_2 = c_2 / c_1$ для линии подвеса груза (см. рис. 1.100, *а*) эквивалентная жесткость $c_{экв}$ этих элементов будет равна:

$$c_{экв} = c_1 + c_2. \qquad (1.140)$$

При последовательном соединении двух элементов с жёсткостью c_1 и

c_2 (см. рис. 1.100, *б*) их эквивалентная жесткость $c_{экв}$ определяется по формуле:

$$\frac{1}{c_{экв}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}. \qquad (1.141)$$

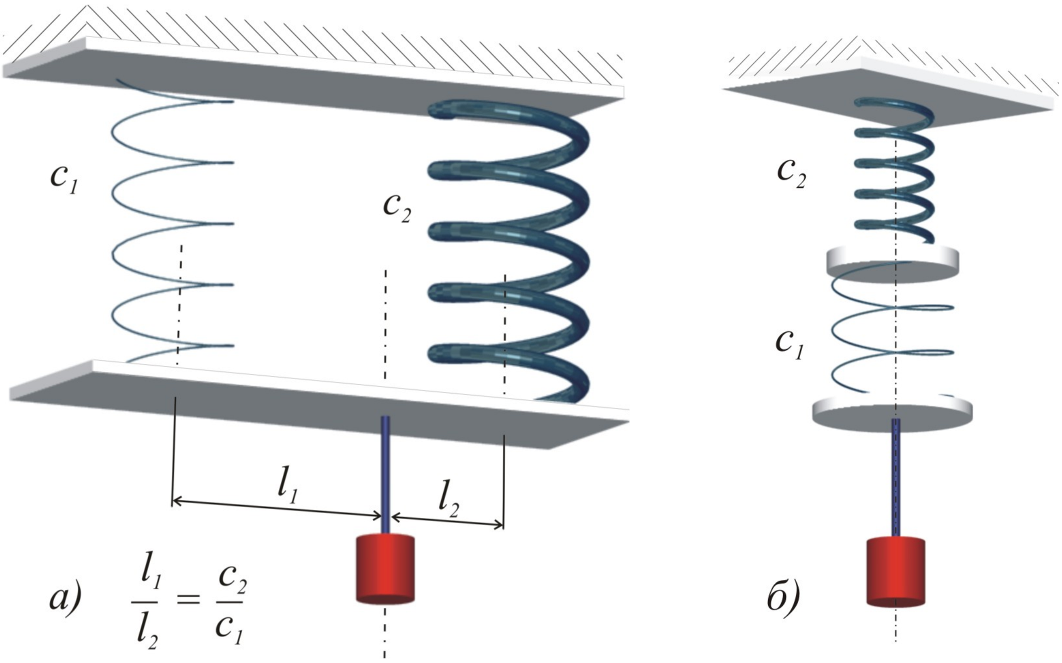


Рис. 1.100. К расчету эквивалентной жесткости $c_{экв}$ упругих элементов: *а)* при параллельном соединении; *б)* при последовательном соединении

1.3.1.13. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В этом случае рассматривают колебательное движение материальной точки в вязкой среде (с учётом сил вязкого трения).

Сила вязкого трения R зависит от скорости V материальной точки. При прямолинейных колебаниях материальной точки вдоль оси x данная зависимость может быть линейной $R_x = -\mu V_x$ или квадратичной $R_x = -\mu V_x^2$. Знак «минус» говорит о том, что сила вязкого трения всегда направлена противоположно вектору скорости. В данных выражениях μ представляет собой коэффициент сопротивления среды. Рассмотрим свободные затухающие колебания с прямо пропорциональной линейной зависимостью. Дифференциальное уравнение движения материальной точки при этом выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 \cdot x = 0, \qquad (1.142)$$

где $$\frac{c}{m}=k^2 \text{ и } \frac{\mu}{m}=2b. \qquad (1.143)$$

Для свободных затухающих колебаний принято использовать следующие характеристики.

Модуль логарифма *декремента затуханий* bT_1 называется *логарифмическим декрементом,* т.е: $L=\left|\ln\left(bT_1\right)\right|$.

Величина T_1 - *период затухающих колебаний.* Под периодом затухающих колебаний принято принимать промежуток времени, равный периоду функции $\sin\left(k_1 t+\alpha\right)$ и определяемый выражением:

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-b^2}}. \qquad (1.144)$$

Здесь $\sqrt{k^2-b^2}=k_1$, $[c^{-1}]$ - *круговая частота затухающих колебаний*.

В зависимости от того, как соотносится восстанавливающая сила и сила сопротивления среды при движении материальной точки, принято различать три случая.

Первый случай

В случае, когда сопротивление среды мало по сравнению с восстанавливающей силой $(k>b)$, решением дифференциального уравнения (1.142) будет выражение:

$$x=Ae^{-bt}\sin\left(k_1 t+\alpha\right). \qquad (1.145)$$

В отличие от свободных незатухающих колебаний (см. (1.133)) в последнем выражении (см. (1.145)) содержится множитель e^{-bt}, так называемый *декремент затухающих колебаний*, учитывающий сопротивление движению, благодаря которому с течением времени t_1 амплитуда колебаний $A_1=Ae^{-bt}$ убывает по отношению к начальной амплитуде A по закону геометрической прогрессии.

Движение материальной точки в первом случае является колебательным относительно некоторого равновесного положения с постепенным уменьшением амплитуды колебаний.

Второй случай

В случае, если $k=b$, сопротивление, оказываемое средой на материальную точку, равно воздействию восстанавливающей силы, и решение дифференциального уравнения (1.142) имеет вид:

$$x=e^{-bt}\left(C_1+C_2 t\right). \qquad (1.146)$$

Тогда движение материальной точки перестаёт быть колебательным.

Материальная точка при этом, находясь вне равновесного положения, будет асимптотически стремиться к нему.

Третий случай

Когда $k<b$, сопротивление, оказываемое средой по сравнению с восстанавливающей силой, велико, и решение дифференциального уравнения (1.142) примет вид:

$$x=C_1 e^{-(b+r)t}+C_2 e^{-(b-r)t}, \tag{1.147}$$

где $r=\sqrt{b^2-k^2}$.

В этом случае движение материальной точки также не является колебательным. Материальная точка, находясь вне равновесного положения, будет стремиться к нему асимптотически.

1.3.1.14. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если на точку кроме постоянной восстанавливающей силы действует переменная сила Q, изменяющаяся по гармоническому закону, то такие колебания считаются *вынужденными*, а сила Q считается *возмущающей* силой.

Рассмотрим частный случай, когда проекция возмущающей силы на ось x при прямолинейных колебаниях меняется по гармоническом закону: $Q_x=Q_0\sin pt$ (проекция возмущающей силы может меняться и по другому гармоническому закону). Вынужденные колебания могут рассматриваться *с учетом сопротивления среды* и при *его отсутствии.*

Для вынужденных колебаний *при отсутствии сопротивления среды* дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x}+k^2\cdot x=P_0\sin pt, \tag{1.148}$$

где

$$\frac{c}{m}=k^2 \quad \text{и} \quad \frac{Q_0}{m}=P_0. \tag{1.149}$$

Здесь $Q_0, [H]$ - величина начальной возмущающей силы;

$P_0, \left[\frac{м}{c^2}\right]$ - начальное ускорение материальной точки массой m; $p, [c^{-1}]$ - круговая частота возмущающей силы.

Решением уравнения (1.148) будет являться выражение вида:

$$x=A\sin(kt+\alpha)+B\sin pt. \tag{1.150}$$

В этом выражении:

A, k - *амплитуда* и *круговая частота собственных колебаний* материальной точки соответственно;

B, p - *амплитуда* и *круговая частота вынужденных колебаний* материальной точки соответственно.

Амплитуда вынужденных колебаний B определяется по формуле:

$$B=\frac{P_0}{k^2-p^2}, \qquad \text{или} \qquad B=\frac{\lambda_0}{\left|1-\frac{p^2}{k^2}\right|}, \tag{1.151}$$

где $\frac{P_0}{k^2}=\frac{Q_0}{c}=\lambda_0$ - величина статического отклонения материальной точки под действием начальной возмущающей силы Q_0. Проанализировав уравнение (1.150), можно прийти к выводу о том, что вынужденные колебания представляют собой совокупность собственных колебаний материальной точки и её вынужденных колебаний. Для вынужденных колебаний принято использовать следующие характеристики:

Коэффициентом расстройки z называется отношение круговой частоты p вынужденных колебаний к круговой частоте k её собственных колебаний:

$$z=\frac{p}{k}. \tag{1.152}$$

Коэффициент расстройки показывает степень несовпадения (расстройку) частот вынужденных и собственных колебаний.

Коэффициентом динамичности η называется отношение амплитуды вынужденных колебаний B к статическому отклонению λ_0 материальной точки под действием начальной возмущающей силы Q_0, т.е.:

$$\eta=\frac{B}{\lambda_0}. \tag{1.153}$$

Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического отклонения λ_0, и зависит от соотношения частот (коэффициента расстройки z).

Коэффициент динамичности η и коэффициент расстройки z связаны между собой зависимостью:

$$\eta=\frac{1}{1-z^2}. \tag{1.154}$$

В случае, если круговая частота собственных колебаний совпадает с круговой частотой вынужденных колебаний, наступает явление *резонанса*.

При резонансе $p=k$ коэффициент расстройки $z=1$ (см. формулу (1.152)); коэффициент динамичности $\eta=\infty$ (см. формулу (1.154)). При конечном значении статического отклонения λ_0 из выражения (1.153) следует, что амплитуда вынужденных колебаний $B\to\infty$.

Для вынужденных колебаний *с учётом сопротивления среды* (например, силы R, пропорциональной первой степени скорости V) дифференциальное уравнение движения будет имеет следующий вид:

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2 x=P_0 \sin pt. \tag{1.155}$$

Решением данного уравнения будет выражение:

$$x=Ae^{-bt}\sin(k_1 t+\alpha)+B\sin(pt-\beta). \tag{1.156}$$

В данном выражении

$$B=\frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2\cdot p^2}} \quad \text{и} \quad \beta=arctg\left(\frac{2bp}{k^2-p^2}\right). \tag{1.157}$$

Вынужденные колебания при наличии вязкого сопротивления, также как и вынужденные колебания без сопротивления, представляют собой совокупность собственных и вынужденных колебаний.

Собственные колебания происходят при этом по закону:

$$x=Ae^{-bt}\sin(k_1 t+\alpha), \tag{1.158}$$

а вынужденные:

$$x=B\sin(pt-\beta). \tag{1.159}$$

Установлено, что собственные колебания быстро затухают в течение так называемого *времени установления* t_y. Таким образом, по истечении времени t_y точка фактически будет совершать колебания по закону, определяемому выражением (1.159). Для вынужденных колебаний с учетом сопротивления среды можно использовать следующие факты:

С учетом того, что $h=b/k$ - величина, характеризующая сопротивление среды, то значение β, $[рад]$, - характеризующее *сдвиг фазы вынужденных колебаний* по отношению к фазе возмущающей силы (рис. 1.101), можно выразить как

$$\beta=arctg\left(\frac{2hz}{1-z^2}\right). \tag{1.160}$$

Проанализировав теоретический материал, можно прийти к выводу о том, что явление резонанса при вынужденных колебаниях с учетом среды сопротивления фактически наступает при значениях коэффициента расстройки z, еще не достигнувшего единицы.

$$z_p=\sqrt{1-2h^2}. \tag{1.161}$$

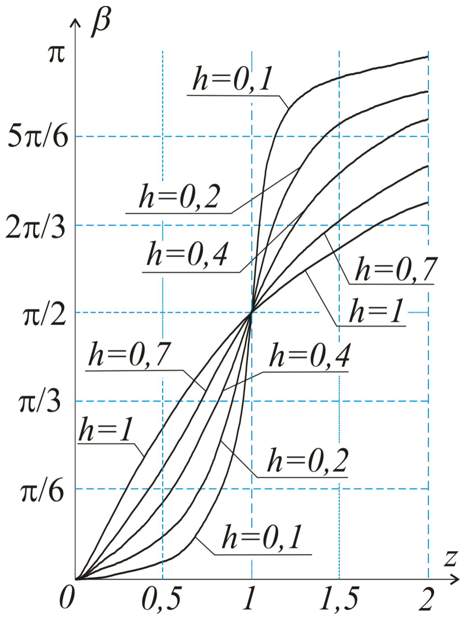


Рис. 1.101. График зависимости сдвига фазы β от коэффициента расстройки z

Согласно выражению (1.161), при малых значениях коэффициента сопротивления среды h значение коэффициента расстройки при резонансе $z_p \approx 1$. Оттуда же следует, что при больших значениях h (см. выражения (1.157), (1.160), (1.161)) явление резонанса не ведет к значительному увеличению амплитуды вынужденных колебаний B (рис. 1.102).

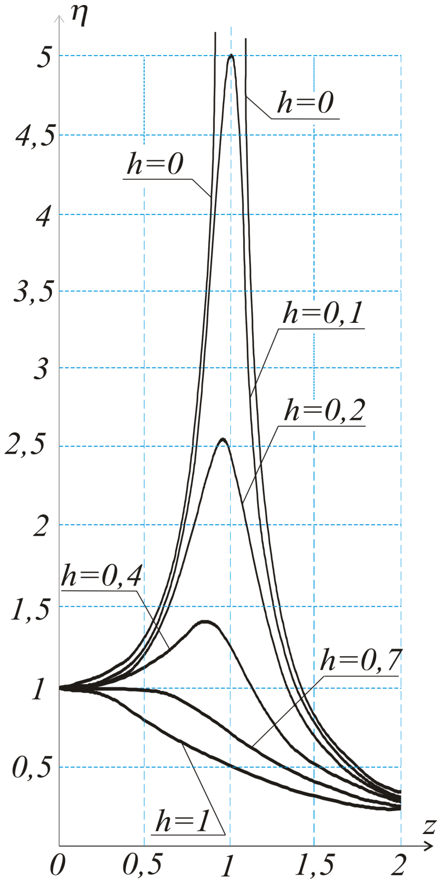


Рис. 1.102. График зависимости коэффициента динамичности η от коэффициента расстройки z

По тому, как соотносятся круговые частоты вынужденных и собственных колебаний, различают следующие частные случаи.

Первый случай

Величина коэффициента расстройки $z \approx 0$. Согласно выражению (1.152), подобная ситуация возникает, когда $p \ll k$. В таком случае амплитуда вынужденных колебаний примерно равна величине статического отклонения $(B \approx \lambda_0)$. Колебания при этом, очевидно, происходят с амплитудой, равной статическому отклонению. Сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы при этом (см. (1.160)) будет примерно равен нулю $(\beta \approx 0)$.

Второй случай

Величина коэффициента расстройки $z \to \infty$. Согласно выражению (1.152), подобная ситуация возникает, когда $p \gg k$.

В таком случае амплитуду вынужденных колебаний при малом сопротивлении среды можно приближенно подсчитать по формуле:

$$B \approx \frac{\lambda_0}{z^2}\,. \tag{1.162}$$

Третий случай

Величина коэффициента расстройки $z \to 1$. Согласно выражению (1.152), подобная ситуация возникает, когда $p \approx k$ и сопровождается явлением резонанса.

В таком случае амплитуду вынужденных колебаний B_p можно приближенно подсчитать по формуле:

$$B_p \approx \frac{\lambda_0}{2h}\,. \tag{1.163}$$

Сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы при этом приближенно можно определить, как $\beta_p \approx \pi/2$ (рис. 1.99).

При вынужденных колебаниях с сопротивлением среды в случае резонанса амплитуда B_p устанавливается в течение так называемого *времени установления* t_y. Чем меньше сопротивление среды, тем больше будет время t_y. При отсутствии сопротивления $(h \to \infty)$ процесс увеличения амплитуды колебаний может происходить бесконечно долго.

Пример 1.28

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний имеет вид $x = A\,e^{-0,5t}\sin(4t+\alpha)$. Определить коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплено тело, если его масса $m = 5\,кг$.

Решение: В общем виде решение дифференциального уравнения имеет вид: $x = A\,e^{-bt}\sin(k_1 t+\alpha)$. Ассоциируем коэффициенты, входящие в заданное уравнение, определяем для данного колебательного процесса:

$b=0{,}5\,c^{-1}$; $k_1=4\,c^{-1}$.

Используем формулу:

$k_1^2=k^2-b^2 \Rightarrow k^2=k^2+b^2=4^2+0{,}5^2=16{,}25$.

Так как $\dfrac{c}{m}=k^2 \Rightarrow c=m\cdot k^2=5\cdot 16{,}25=81{,}25\,H\,/\,м$.

Ответ: $c=81{,}25\,H\,/\,м$.

Пример 1.29

Дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид: $3\,\ddot{x}+36\,\dot{x}+c\,x=0$. Найти максимальное значение коэффициента жесткости c, при котором движение будет апериодическим.

Решение: Работаем с уравнением

$3\,\ddot{x}+36\,\dot{x}+c\,x=0$.

Делим левую и правую часть уравнения на 3:

$\ddot{x}+12\,\dot{x}+\dfrac{c}{3}\,x=0$.

Пишем дифференциальное уравнение в каноническом виде:

$\ddot{x}+2\,b\,\dot{x}+k^2\,x=0 \Rightarrow$

$2\,b=12$; $k^2=\dfrac{c}{3}$.

Рассмотрим предельный случай, соответствующий апериодическому затухающему движению, когда $b=k$.

Приравниваем и получаем: $\dfrac{c}{3}=6^2 \Rightarrow \quad c=108\,H\,/\,м$.

Ответ: $c=108\,H\,/\,м$.

Пример 1.30

На тело, которое подвешено к пружине, действует вертикальная вынуждающая сила $F=60\sin 20\,t$. Определить коэффициент динамичности, если угловая частота собственных колебаний тела $k=40\,рад\,/\,c$.

Решение: Задача на вынужденные колебания. Напишем канонический вид уравнения для вынуждающей силы, откуда определим круговую частоту p вынужденных колебаний: $Q=Q_0\sin p\,t \Rightarrow Q_0=60\,H$; $p=20\,c^{-1}$.

Определим коэффициент расстройки z. Коэффициентом расстройки z называется отношение круговой частоты p вынужденных колебаний материальной точки к круговой частоте k её свободных колебаний. Т.е. $z=p\,/\,k \Rightarrow 20/40=0{,}5$. Далее, используем зависимость коэффициента расстройки и коэффициента динамичности:

$\mu=\dfrac{1}{\left|1-z^2\right|}=\dfrac{1}{\left|1-0{,}5^2\right|}\Rightarrow \mu=1{,}33$.

Ответ: $\mu=1{,}33$.

1.3.1.15. ПОНЯТИЕ СИЛЫ ИНЕРЦИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Применение законов Ньютона не является единственным путём к решению задач механики. В ряде случаев применение общих положений (принципов механики) позволяет найти более рациональное решение. Один из таких общих принципов механики называется *принципом Даламбера*. Введем следующее понятие:

Векторная величина $\vec{\Phi}$, равная по модулю произведению массы точки на её ускорение и направленная противоположно этому ускорению, называется *силой инерции материальной точки*.

$$\vec{\Phi}=-m\vec{a}\,. \qquad (1.164)$$

Тогда *принцип Даламбера* для материальной точки можно представить в виде выражения:

$$\vec{F}^a+\vec{N}+\vec{\Phi}=0 \qquad (1.165)$$

и сформулировать следующим образом:

Если в любой момент времени к действующим на материальную точку активным силам и реакциям связей присоединить силы инерции, то полученная система оказывается уравновешенной.

1.3.1.16 СЛОЖНОЕ (АБСОЛЮТНОЕ) И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ С ПОЗИЦИИ ДИНАМИКИ

Отметим, что второй закон динамики и полученные из него теоремы верны только для абсолютного движения точки, т.е. по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета.

Для абсолютного движения:

$$m\vec{a}=\sum\vec{F}_k\,. \qquad (1.166)$$

Абсолютное ускорение в данном выражении можно представить как $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$.

Введём следующие обозначения: $-m\vec{a}_e=\vec{\Phi}_e$ и $-m\vec{a}_c=\vec{\Phi}_c$.

Вектор $\vec{\Phi}_e$ называется *переносной силой инерции*. Он направлен в сторону, противоположную вектору ускорения $\vec{a}_e$ материальной точки в переносном движении.

Вектор $\vec{\Phi}_c$ называется *кориолисовой силой инерции*. Он направлен в сторону, противоположную вектору кориолисова ускорения $\vec{a}_c$ материальной точки.

В результате подстановки и преобразования выражения (1.166) получим уравнение относительного движения:

$$m\vec{a}_r=\sum\vec{F}_k+\vec{\Phi}_e+\vec{\Phi}_c\,. \qquad (1.167)$$

Сравнивая (1.166) и (1.167), можно прийти к выводу о том, что все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как и для абсолютного движения, но с прибавлением переносной $\vec{\Phi}_e$ и кориолисовой $\vec{\Phi}_c$ сил инерции.

Данная добавка учитывает влияние на относительное движение материальной точки перемещения подвижных осей.

В случае, если подвижная система отсчёта движется поступательно, то кориолисово ускорение $\vec{\Phi}_c=0$, и закон относительного движения принимает вид:

$$m\vec{a}_e=\sum\vec{F}_k+\vec{\Phi}_e. \tag{1.168}$$

В случае, если подвижная система отсчёта движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\vec{\Phi}_c=0$ и $\vec{\Phi}_e=0$.

Закон относительного движения при этом будет таким же, как и закон абсолютного (сложного) движения. Поэтому такой подвижной системе отсчёта также свойственна инерциальность.

Полученный результат позволяет сделать вывод о невозможности путем механических экспериментов установить, находится ли данная система в покое или совершает поступательное равномерное прямолинейное движение.

Данный вывод был получен Галилеем и носит название *принципа относительности классической механики*.

В случае, если точка по отношению к подвижной системе находится в покое, уравнение относительного движения принимает вид:

$$\sum\vec{F}_k+\vec{\Phi}_e=0. \tag{1.169}$$

Данное выражение является *уравнением относительного равновесия материальной точки*. Отсюда можно сделать вывод о том, что уравнение относительного равновесия составляется так же, как и уравнения равновесия для неподвижной системы отсчета, но с прибавлением к действующим на материальную точку переносной силы инерции.

В случае, когда кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c\neq 0$, то:

$$\vec{\Phi}_c=-m\vec{a}_c=-2m\left(\vec{\omega}\times\vec{V}_r\right). \tag{1.170}$$

Модуль кориолисовой силы инерции можно определить как

$$\vec{\Phi}_c=2m\cdot\left|\vec{\omega}\right|\cdot\left|\vec{V}_r\right|\cdot\sin\alpha, \tag{1.171}$$

где $\sphericalangle\alpha=\left(\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r\right)$.

Так как сила $\vec{\Phi}_c$ перпендикулярна $\vec{V}_r$, то уравнение (1.167) в проекции на касательную примет вид:

$$m\frac{dV}{dt}=\sum F_{k\tau}+\Phi_{e\tau}\,. \tag{1.172}$$

По этой же причине $\left(\vec{\Phi}_c \perp \vec{V}_r\right)$ работа кориолисовой силы инерции при относительном перемещении будет равна нулю.

В связи с этим *теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении* имеет вид:

$$\frac{mV_1^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\sum A_k + A\left(\vec{\Phi}_e\right), \tag{1.173}$$

где $\sum A_k$ - сумма работ активных сил на относительном перемещении;

$A\left(\vec{\Phi}_e\right)$ - работа переносной силы инерции при этом перемещении.

В данном выражении кинематические и силовые параметры относятся только к относительному движению.

Пример 1.31

Груз *1* массой $m_1=2\,кг$ (рис.1.103) спускается вниз по наклонной плоскости тела *2*. Тело *2* движется в вертикальных направляющих вниз с ускорением $a_2=4\,м/с^2$. Определить силу давления груза *1* на тело *2*.

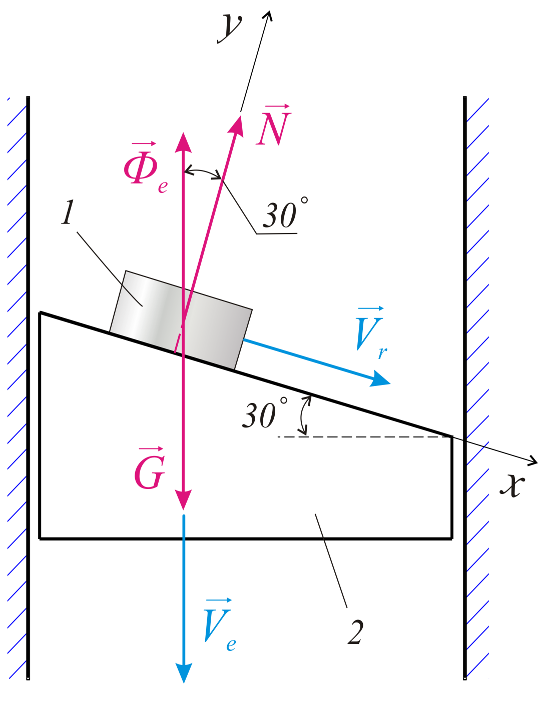


Рис. 1.103. К примеру 1.31

Решение: Движение груза *1* является сложным. Исходя из этого, можно записать уравнение его относительного движения в векторном виде:

$$m\vec{a}_r=\sum \vec{F}_i+\vec{\Phi}_e+\vec{\Phi}_c.$$

Далее, рассуждаем таким образом. Так как переносное движение груза вдоль наклонной плоскости является поступательным, то кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c = 0$. Поэтому векторное уравнение слегка упростится: $m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e$. Составим дифференциальное уравнение относительного движения, в отношении оси y:

$$m \cdot \ddot{y}_r = N - G \cdot \cos 30^\circ + \Phi_e \cdot \cos 30^\circ.$$

Согласно условию задания груз *1* движется только по наклонной поверхности вдоль оси x, поэтому $\ddot{y}_r = 0 \Rightarrow$ дифференциальное уравнение движения в отношении оси y примет вид:

$$0 = N - G \cdot \cos 30^\circ + \Phi_e \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$N = G \cdot \cos 30^\circ - \Phi_e \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$N = m \cos 30^\circ (g - a_2) \Rightarrow \quad N = 2 \cos 30^\circ (9{,}8 - 4) \Rightarrow$$

$$N = 10{,}05\, H.$$

Так как сила давления груза *1* по модулю $Q = N$ (направлена в противоположную сторону)

Ответ: $Q = 10{,}05\, H$.

Пример 1.32

Шарик массой $m = 2\,кг$ (рис. 1.104) движется со скоростью $V_r = \dfrac{2\pi}{3}\, м/с$ относительно вертикальной трубки, которая на расстоянии $l = 0{,}4\, м$ прикреплена к вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega = 3\, c^{-1}$. Определить переносную силу инерции шарика Φ_e.

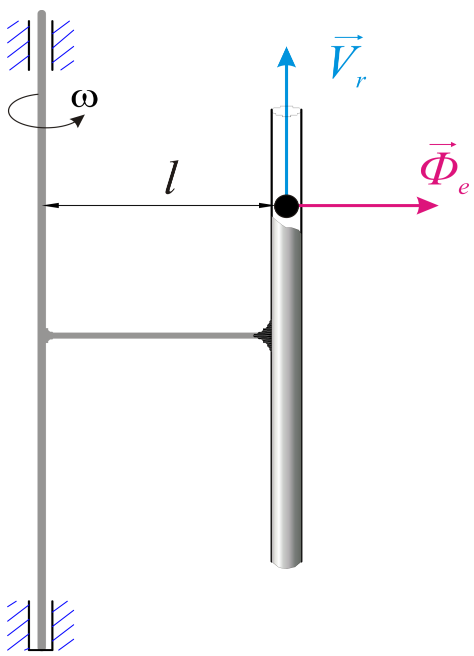


Рис. 1.104. К примеру 1.32

Решение: В условии задачи имеется логический «мусор», поэтому не все данные задачи будут использованы.

По определению: $\Phi_e = m \cdot a_e$. Так как вращение трубки равномерное, то $a_e = a_n = V_e^2 / \rho \Rightarrow$

$$\Phi_e = m \cdot \frac{V_e^2}{\rho} = m \cdot \frac{(\omega \cdot l)^2}{l} = m \cdot \omega^2 \cdot l = 2 \cdot 3^2 \cdot 0{,}4 = 7{,}2\, H\,.$$

Ответ: $\Phi_e = 7{,}2\, H$.

1.3.2. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1.3.2.1. ПОНЯТИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В данном подразделе рассматривается динамика твердых тел и механических систем. Так как твердое тело может совершать вращательное и плоскопараллельное движение, то вопросы динамики в отношении твердого тела, а тем более в отношении механических систем, считаются более сложными. Рассмотрим следующие базовые определения:

Геометрически неизменяемый объект, размерами которого при решении задач нельзя пренебречь, называется в теоретической механике *твердым телом*.

Совокупность взаимосвязанных и механически взаимодействующих между собой материальных точек и/или твердых тел называется *механической системой*.

Механическое взаимодействие между объектами, как необходимое условие существования механической системы, отражается в действии сил. Действующие на механическую систему активные силы и реакции связей подразделяются на внешние и внутренние.

Внешними называются силы $\vec{F}_k^e$, действующие на материальные точки (тела) системы извне.

Внутренними называются силы $\vec{F}_k^i$, с которыми материальные точки (тела) системы взаимодействуют друг с другом.

С учетом допущения теоретической механики об абсолютной жесткости (геометрической неизменяемости) тел внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. Геометрическая сумма *(главный вектор) всех внутренних сил механической системы* равняется нулю в соответствии с третьим законом динамики:

$$\sum \vec{F}_k^i = 0. \qquad (1.174)$$

2. Сумма моментов *(главный момент) всех внутренних сил системы* относительно любой точки и/или любой оси равняется нулю:

$$\sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^i\right) = 0; \quad \sum M_x\left(\vec{F}_k^i\right) = 0. \qquad (1.175)$$

Если система представляет собой абсолютно твердое тело, то внутренние силы образуют уравновешенную систему сил.

Для системы, образованной телами и/или материальными точками, даже несмотря на то, что главный вектор и главный момент внутренних сил механической системы равны нулю, объекты системы могут совершать взаимные перемещения под действием внутренних сил, перераспределяя массу в системе и, соответственно, влияя на движение системы в целом.

1.3.2.2. МАССА СИСТЕМЫ. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ. РАДИУС ИНЕРЦИИ

Из материала предыдущего параграфа следует, что на движение механической системы в целом оказывает влияние как действие внешних, так и действие внутренних сил, участвующих в перераспределении масс данной системы. Таким образом, движение системы не только будет определяться действием внешних сил, но и будет зависеть от массы системы и её распределения.

Рассмотрим данный вопрос поподробней. Введём следующее определение:

Масса механической системы M представляет собой арифметическую сумму масс всех точек и/или твердых тел, входящих в рассматриваемую систему.

$$M = \sum m_k . \tag{1.176}$$

С целью оценки величины и характера распределения масс для механической системы в динамике применяются ряд характеристик.

1. Координаты центра масс.

Геометрическая точка $C\left(x_C, y_C, z_C\right)$ *называется центром масс (центром инерции) механической системы,* если её координаты удовлетворяют выражениям:

$$x_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot x_k ; \quad y_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot y_k ; \quad z_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot z_k , \tag{1.177}$$

где M - масса всей механической системы;

m_k - масса $k-$го объекта механической системы;

$x_k ;\ y_k ;\ z_k$ - координаты центра тяжести $k-$го объекта механической системы.

Геометрическое место центра масс механической системы можно определить при помощи радиуса-вектора:

$$\vec{r}_C = M^{-1} \cdot \sum m_k \cdot \vec{r}_k , \tag{1.178}$$

где $\vec{r}_k$ - радиус–вектор центра массы $k-$го объекта, входящего в данную механическую систему.

Для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положение центра масс и центра тяжести совпадает.

Понятие центра масс, в отличие от понятия центра тяжести, может быть применено в отношении любой механической системы, то есть имеет более общее значение.

2. Момент инерции тела (механической системы).

Моментом инерции тела (механической системы) J_z *относительно оси* z *(или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (объектов системы) на квадраты их расстояний до этой оси:*

$$J_z = \sum m_k \cdot h_k^2. \tag{1.179}$$

Согласно (1.179), осевые моменты инерции - величины всегда положительные, не равные нулю. В системе СИ осевые моменты имеют единицу измерения: $[кг \cdot м^2]$.

Физический смысл момента инерции, как динамической характеристики, заключается в том, что он является мерой инертности тела (системы) при вращательном движении, по аналогии с массой, являющейся мерой инертности в поступательном движении.

При определении моментов инерции относительно декартовых осей для механических систем, представленных материальными точками (телами), применяют следующие формулы:

$$J_x = \sum m_k \cdot \left(y_k^2 + z_k^2\right); \quad J_y = \sum m_k \cdot \left(x_k^2 + z_k^2\right); \quad J_z = \sum m_k \cdot \left(x_k^2 + y_k^2\right), \tag{1.180}$$

где m_k - масса $k-$го объекта механической системы;

$x_k;\ y_k;\ z_k$ - координаты центра тяжести $k-$го объекта механической системы в декартовой системе координат

Для некоторых однородных тел моменты инерции можно определить, используя готовые формулы.

1. Для тонкого однородного стержня массой M и длиной l (рис. 1.105):

$$J_A = \frac{M \cdot l^2}{3}; \tag{1.181}$$

$$J_z = \frac{M \cdot l^2}{12}. \tag{1.182}$$

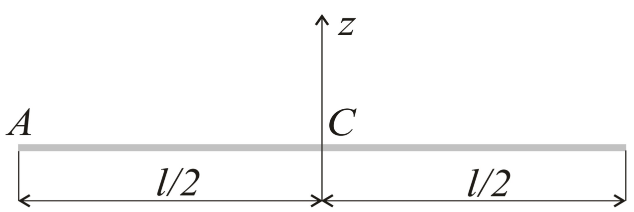


Рис. 1.105. К определению характеристик тонкого однородного стержня

2. Для тонкого круглого однородного кольца массой M и радиусом r (рис. 1.106):

$$J_C = M \cdot r^2. \tag{1.183}$$

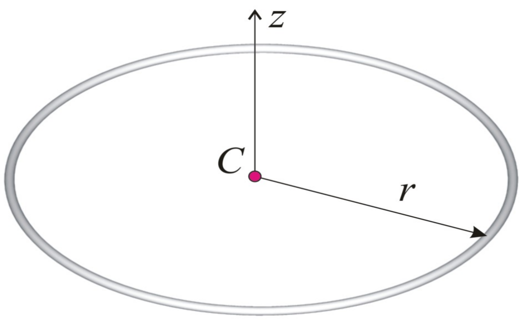


Рис. 1.106. К определению характеристик тонкого однородного кольца

3. Для тонкой цилиндрической оболочки массой M и радиусом r (рис. 1.107):

$$J_z = M \cdot r^2. \tag{1.184}$$

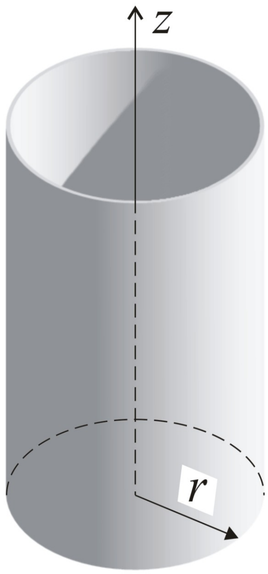


Рис. 1.107. К определению характеристик тонкой цилиндрической оболочки

4. Для тонкого круглого диска массой M и радиусом r (рис. 1.108):

$$J_x = J_y = \frac{M \cdot r^2}{4}; \tag{1.185}$$

$$J_z = \frac{M \cdot r^2}{2}. \tag{1.186}$$

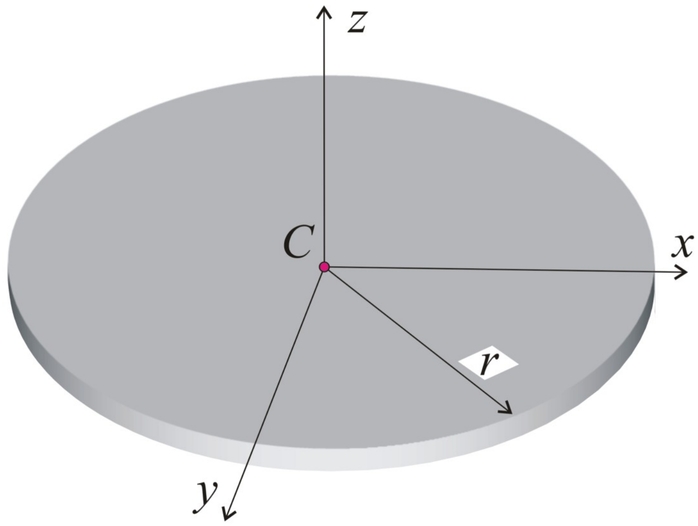


Рис. 1.108. К определению характеристик круглого тонкого однородного диска

5. Для однородной прямоугольной пластины $a \times b$ и массой M (рис. 1.109):

$$J_x = \frac{M \cdot b^2}{3}; \tag{1.187}$$

$$J_y = \frac{M \cdot a^2}{3}; \tag{1.188}$$

$$J_A = \frac{M\left(a^2 + b^2\right)}{3}. \tag{1.189}$$

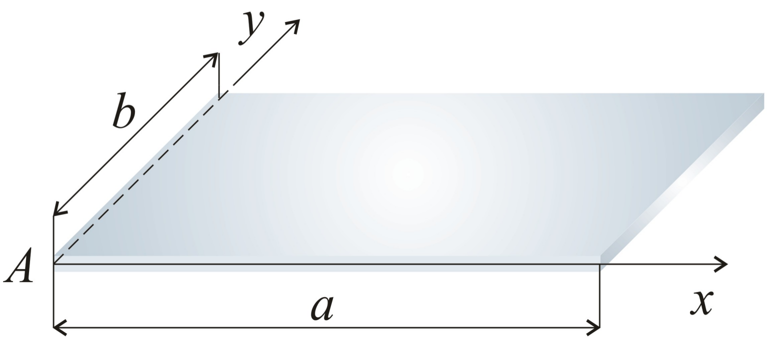


Рис. 1.109. К определению характеристик тонкой однородной прямоугольной пластины

6. Для круглого цилиндра длиной l, массой M и радиусом r (рис. 1.110):

$$J_x = J_y = M \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right); \tag{1.190}$$

$$J_z = \frac{M \cdot r^2}{2}. \tag{1.191}$$

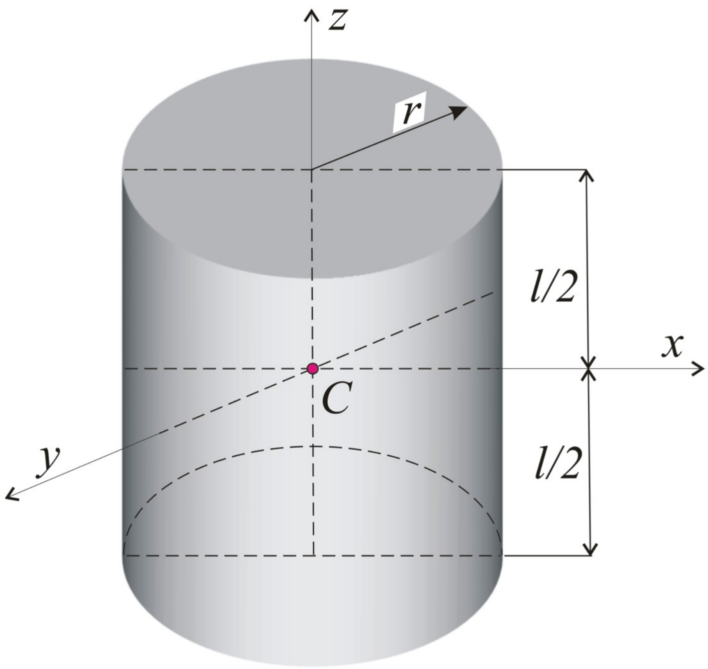


Рис. 1.110. К определению характеристик круглого цилиндра

7. Для круглого полого вала наружним радиусом R, внутренним радиусом r и массой m (рис. 1.111):

$$J_z = \frac{m(R^2 - r^2)}{2}. \qquad (1.192)$$

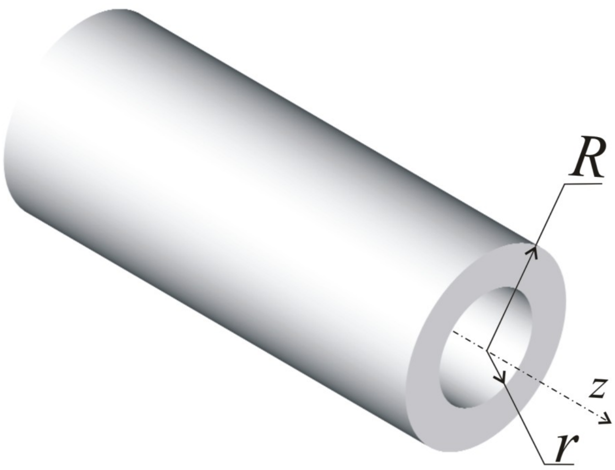


Рис. 1.111. К определению характеристик круглого полого вала

8. Для тонкой сферической сферической оболочки радиуса R и массой m (рис. 1.112):

$$J_z = \frac{2mR^2}{3}. \qquad (1.193)$$

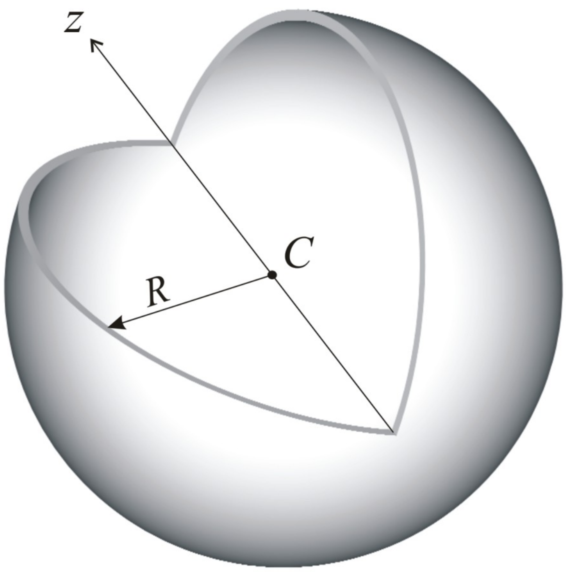


Рис. 1.112. К определению характеристик тонкой сферической оболочки

9. Для круглого конуса массой M и радиусом основания r (рис. 1.113):

$$J_z = 0{,}3 \cdot M \cdot r^2. \tag{1.194}$$

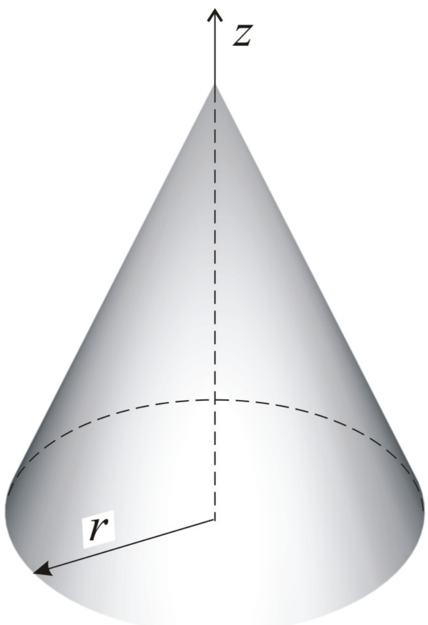


Рис. 1.113. К определению характеристик круглого конуса

10. Для шара радиуса r (рис. 1.114):

$$J_x = J_y = J_z = 0{,}4 \cdot M \cdot r^2. \tag{1.195}$$

$$J_C = 0{,}6 \cdot M \cdot r^2. \tag{1.196}$$

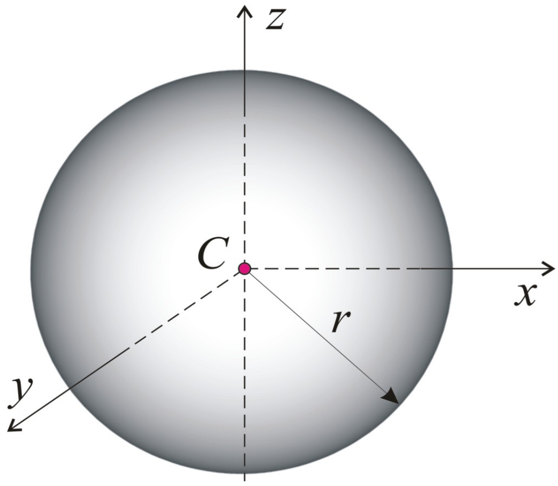


Рис. 1.114. К определению характеристик шара

3. Радиус инерции тела.

В ходе расчётов часто употребляется понятие *радиуса инерции*.

Радиусом инерции тела относительно оси z называется линейная величина ρ_z, определяемая равенством:

$$J_z = M \cdot \rho_z^2. \tag{1.197}$$

Физический смысл радиуса инерции для произвольного твердого тела заключается в том, что его величина соответствует радиусу воображаемой тонкостенной цилиндрической оболочки с эквивалентным для данного тела значением осевого момента инерции.

Пример 1.33

Определить момент инерции относительно плоскости Oxy механической системы (рис. 1.115), состоящей из четырех одинаковых материальных точек, если масса каждой точки $m = 1{,}2\,кг$, а радиус $r = 0{,}5\,м$.

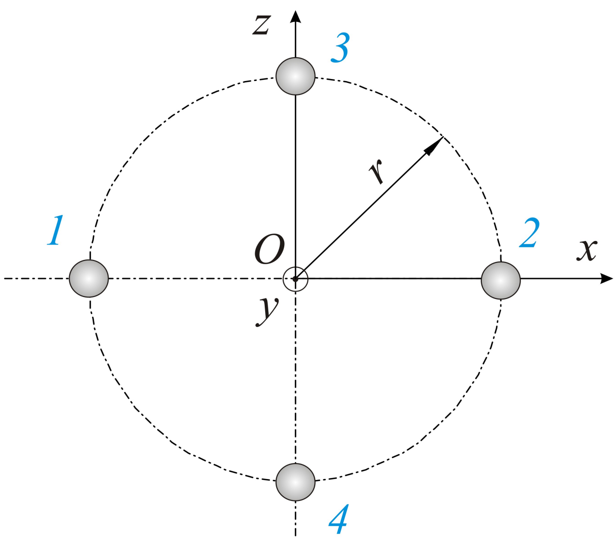


Рис. 1.115. К примеру 1.33

Решение: Очевидно, что точки *1* и *2,* лежащие в плоскости Oxy, не оказывают влияния на величину расчётного момента инерции, поэтому он будет сформирован за счет точек *3* и *4,* равноудалённых от плоскости Oxy на расстояние $\pm z = r$. Таким образом:

$J = \sum m_k \cdot h_k^2 = 2m \cdot r^2 = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}6\,кг \cdot м^2$.

Ответ: $0{,}6\,кг \cdot м^2$.

Пример 1.34. Определить полярный момент инерции механической системы (рис. 1.116), состоящей из трех одинаковых материальных точек, относительно начала координат O, если расстояние $l = 0{,}8\,м$, $m = 0{,}4\,кг$.

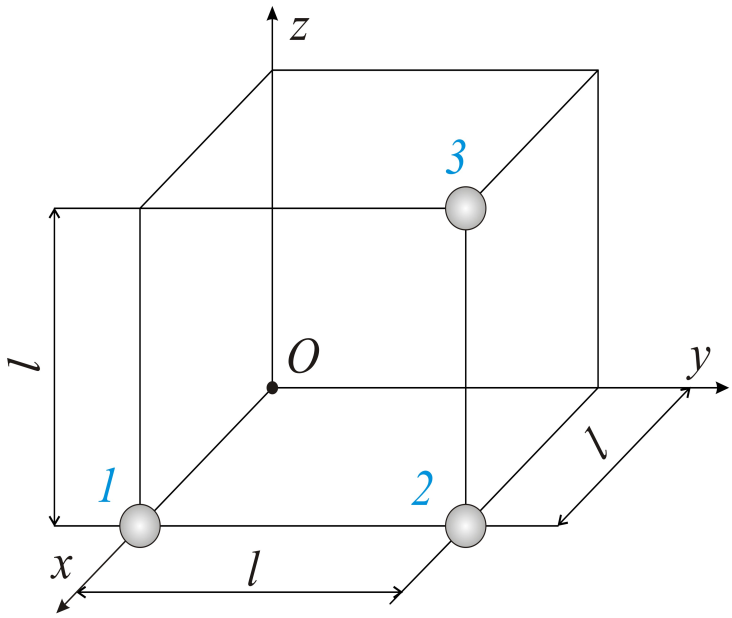


Рис. 1.116. К примеру 1.34

Решение: Пользуясь определением полярного момента, рассчитаем полярные моменты относительно начала координат для каждой из точек по формуле: $J_O = \sum m_k \cdot r^2$, где r - расстояние от материальной точки до начала координат O.

Для точки *1*: $J_{O(1)} = m_1 \cdot (l^2 + 0^2 + 0^2) = 0{,}4(0{,}8^2 + 0^2 + 0^2) = 0{,}256\ кг \cdot м^2$.

Для точки *2*: $J_{O(2)} = m_2 \cdot (l^2 + l^2 + 0^2) = 0{,}4(0{,}8^2 + 0{,}8^2 + 0^2) = 0{,}512\ кг \cdot м^2$.

Для точки *3*: $J_{O(3)} = m_3 \cdot (l^2 + l^2 + l^2) = 0{,}4(0{,}8^2 + 0{,}8^2 + 0{,}8^2) = 0{,}768\ кг \cdot м^2$.

Для всей механической системы: $J_O = \sum J_{Oi} \Rightarrow$

$J_O = J_{O(1)} + J_{O(2)} + J_{O(3)} = 0{,}256 + 0{,}512 + 0{,}768 = 1{,}536\,кг \cdot м^2$.

Ответ: $1{,}536\,кг \cdot м^2$.

Пример 1.35

Определить центробежный момент инерции механической системы (рис. 1.117), состоящей из четырех одинаковых материальных точек, относительно осей Ox, Oy, если расстояния $l_1 = 0{,}3\,м$, $l_2 = 1{,}2\,м$, а масса точки $m = 0{,}8\,кг$.

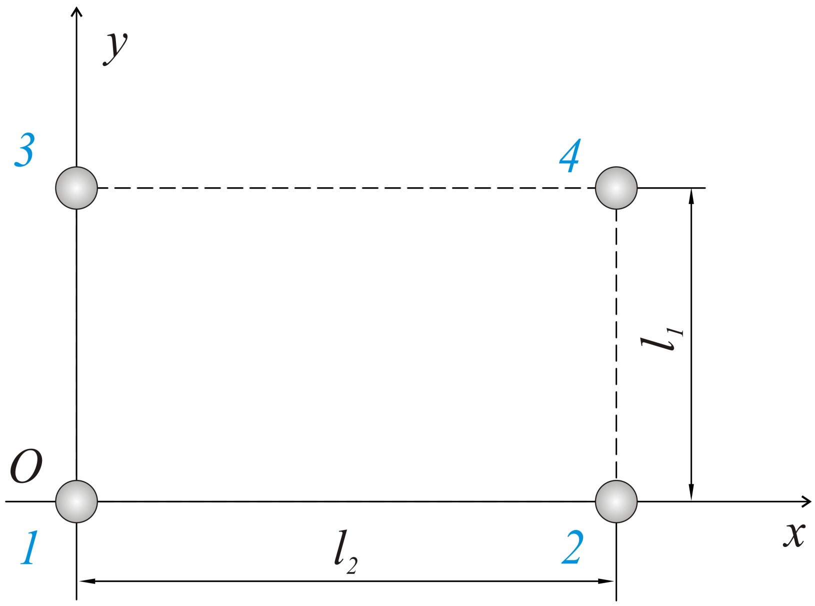


Рис. 1.117. К примеру 1.35

Решение: Очевидно, что материальные точки *1, 2* и *3*, лежащие на осях Ox, Oy, не оказывают влияния на величину центробежного момента относительно этих осей. Его значение будет целиком определяться характеристиками точки *4,* согласно определению.

$J_{xy} = \sum mxy = m_4 \cdot x_4 \cdot y_4 = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}288\, кг \cdot м^2$.

Ответ: $0{,}288\, кг \cdot м^2$.

Пример 1.36. Определить радиус инерции тела массой $100\, кг$ относительно оси Oz (рис. 1.118), если его момент инерции относительно этой оси равен $2\, кг \cdot м^2$.

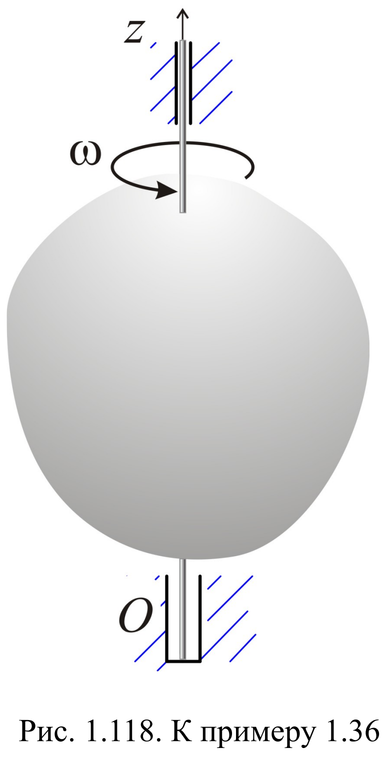


Рис. 1.118. К примеру 1.36

Решение: Согласно определению, радиус инерции можно определить, используя известное значение момента инерции:

$$J_z = m \cdot \rho^2 \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\frac{J_z}{m}} = \sqrt{\frac{2}{100}} \approx 0{,}14\, м.$$

Ответ: $\rho \approx 0{,}14\, м$.

1.3.2.3 МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ. ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА

При решении практических задач часто возникает необходимость определения моментов инерции твердого тела относительно осей, расположенных параллельно к *центральным осям*, в отношении которых данные характеристики уже определены. Здесь под *центральной осью* подразумевается ось, проходящая через центр тяжести рассматриваемого твердого тела. Рассмотрим пример (рис. 1.119).

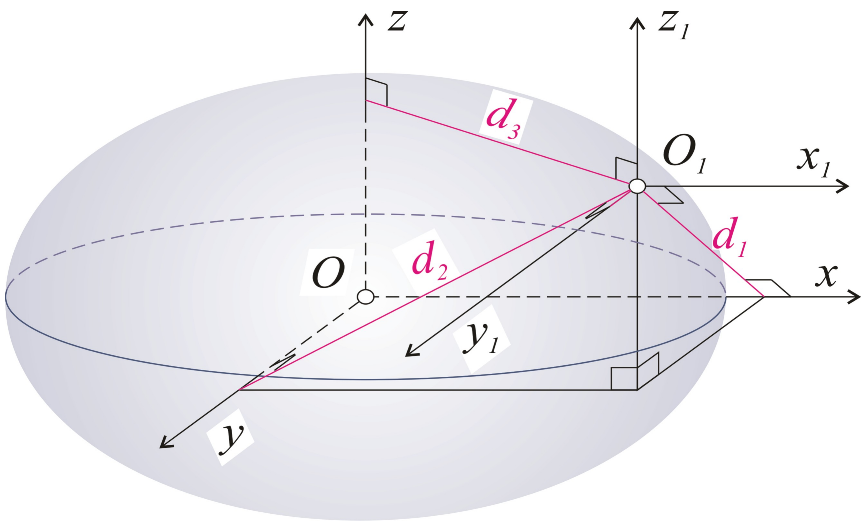


Рис. 1.119. Моменты инерции при параллельном переносе осей

Допустим, что для произвольного плоского тела известны такие характеристики, как J_x, J_y, J_z, причём оси x, y, z проведены через центр тяжести C твердого тела.

Требуется определить $J_{x_1}, J_{y_1} J_z$ для этого же твердого тела по отношению к осям $x_1, y_1 z_1$, причём $x_1 \| x;\ y_1 \| y;\ z_1 \| z$. Применение способа прямого интегрирования с учетом изменившихся пределов интегрирования, пусть даже в отношении тела простой формы, не оправданно.

В таком случае более рациональным способом является применение теоремы Гюйгенса (Штейнера), согласно которой *момент инерции твердого тела относительно оси, параллельной некоторой исходной центральной, равен сумме осевого момента данного тела относительно этой центральной оси и произведения массы данного тела на квадрат расстояния между рассматриваемыми осями*:

$$J_{x_1}=J_x+M\cdot d_1^2;\quad J_{y_1}=J_y+M\cdot d_2^2;\quad J_{z_1}=J_z+M\cdot d_3^2, \qquad (1.198)$$

где $d_1,\ d_2,\ d_3$ - кратчайшие расстояния между осями x и x_1, y и y_1, z и z_1, соответственно.

1.3.2.4. ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

Рассматривая твердое тело (механическую систему), имеющее вполне определенное положение в системе декартовых осей, распределение его массы можно охарактеризовать еще одной величиной – *центробежными моментами инерции*.

Центробежными моментами инерции называют величины J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}, определяемые по формулам:

$$J_{xy}=\sum m_k\cdot x_k\cdot y_k;\ J_{yz}=\sum m_k\cdot y_k\cdot z_k;\ J_{zx}=\sum m_k\cdot z_k\cdot x_k, \qquad (1.199)$$

где m_k - массы точек (тел); x_k; y_k; z_k - координаты точек (тел).

Отметим, что $J_{xy}=J_{yx}$; $J_{yz}=J_{zy}$; $J_{zx}=J_{xz}$;

Центробежные моменты инерции могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, а также быть равными нулю.

Физическая сущность центробежного момента инерции заключается в том, что он характеризует степень статической неуравновешенности тела и позволяет определять положение так называемых главных осей инерции твердого тела.

В случаях, когда центробежный момент обращается в нуль, то те взаимно перпендикулярные оси, чьи нижние индексы в обозначении он содержит, будут являться *главными осями*.

Ось, совпадающая с осью симметрии твердого тела, будет для него главной осью.

Если центробежный момент содержит в нижнем индексе название хотя бы одной главной оси, то и вторая ось, содержащаяся в этом индексе, перпендикулярная первой, также является главной.

Понятие центробежного момента инерции используется для составления динамических уравнений вращающихся тел, применяется при решении задач о центре удара и т.д.

1.3.2.5. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Допустим, для некоторого тела (например, эллипсоида) (рис. 1.120) известны характеристики $(J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx})$ в отношении трех взаимно перпендикулярных осей x, y, z, пересекающихся в точке A, находящейся на его поверхности.

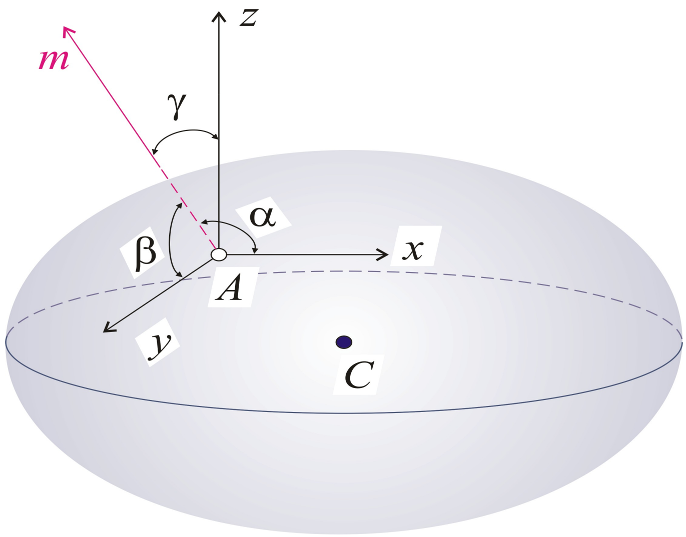


Рис. 1.120. К определению момента инерции J_m по известным характеристикам тела относительно трех произвольных взаимно перпендикулярных осей

Используя выражение (1.198), можно определить момент инерции этого тела J_m относительно любой оси m, проведенной через эту точку:

$$J_m = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \cos^2\beta + \ldots$$
$$\ldots + J_z \cdot \cos^2\gamma - 2J_{xy} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - 2J_{yz} \cdot \cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx} \cdot \cos\gamma\cos\alpha, \qquad (1.200)$$

где $\sphericalangle\alpha = (Am\,^\wedge Ax)$; $\sphericalangle\beta = (Am\,^\wedge Ay)$; $\sphericalangle\gamma = (Am\,^\wedge Az)$.

Если в качестве исходных осей выбираются главные оси, рис. 1.121,

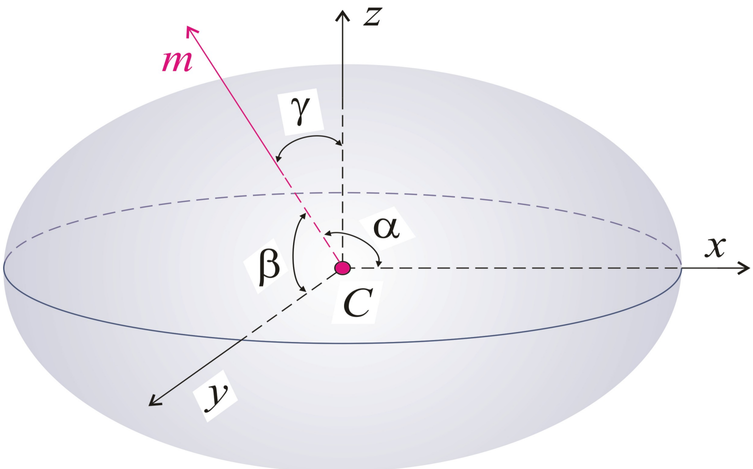


Рис. 1.121. К определению момента инерции J_m по известным характеристикам тела относительно трех главных взаимно перпендикулярных осей

то выражение (1.198) упрощается:

$$J_m = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \cos^2\beta + J_z \cdot \cos^2\gamma. \qquad (1.201)$$

где $\sphericalangle\alpha = (Cm\,^\wedge Cx)$; $\sphericalangle\beta = (Cm\,^\wedge Cy)$; $\sphericalangle\gamma = (Cm\,^\wedge Cz)$.

1.3.2.6. ПОНЯТИЕ О КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Если механическая система представляет собой совокупность материальных точек, то кинетическая энергия такой системы определяется по формуле:

$$T=\sum\frac{m_k V_k^2}{2}. \tag{1.202}$$

Если механическая система представляет собой совокупность твердых материальных тел, то кинетическая энергия каждого тела определяется в зависимости от характера его движения в рассматриваемой системе:

Для поступательно движущего тела:

$$T=\frac{m V_C^2}{2}, \tag{1.203}$$

где V_C, $\left[\frac{м}{с}\right]$ - скорость центра масс C данного тела.

Для тела, совершающего вращательное движение относительно оси z:

$$T=\frac{J_z \omega^2}{2}, \tag{1.204}$$

где J_z, $\left[кг\cdot м^2\right]$ - момент инерции тела относительно оси z.

Для тела, совершающего плоскопараллельное движение (частный вид *формулы Кёнига*):

$$T=\frac{m V_C^2}{2}+\frac{J_C \omega^2}{2}. \tag{1.205}$$

Иначе говоря, *при плоскопараллельном движении тела его кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения со скоростью его центра масс и энергии вращательного движения вокруг этого центра масс.*

Рассмотрев механическую систему, представляющую собой совокупность твердых тел, приходим к выводу, что кинетическая энергия всей механической системы представляет собой сумму кинетических энергий этих тел:

$$T=\sum T_k. \tag{1.206}$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы имеет следующий вид:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1.207)$$

где $T_0 = \sum T_k^0$ - кинетическая энергия механической системы в момент времени t_0;

$T_1 = \sum T_k^1$ - кинетическая энергия механической системы в момент времени t_1;

$\sum A_k^e$ - сумма работ внешних сил, приложенных к системе;

$\sum A_k^i$ - сумма работ внутренних сил, приложенных к системе.

Если расстояния между любыми двумя взаимодействующими точками остаются постоянными, то такая механическая система считается *неизменяемой.* Для неизменяемой системы сумма работ внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Таким образом, теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой механической системы принимает вид:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (1.208)$$

В связи с тем, что применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы сопряжено с определением работы, совершаемой телами системы при различных видах движений, рассмотрим понятие *работы* и методы её оценки.

1.3.2.7 ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЧЕСКОЙ РАБОТЕ. РАБОТА В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Определение работы, совершаемой над твердым телом, зависит от рода силы и от того, какое движение совершает данное тело.

а) При поступательном прямолинейном движении тела под действием постоянной по модулю и направлению силы $\vec{F}$ её работа определяется так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha, \ [Дж], \qquad (1.209)$$

где $F \cdot \cos\alpha$ - проекция вектора силы $\vec{F}$ на ось, вдоль которой осуществляется движение;

s - путь, пройденный телом под действием данной силы;

$\alpha = (\vec{F} \hat{\ } \vec{V})$ - угол между вектором силы и направлением перемещения.

б) При поступательном прямолинейном движении тела под действием постоянной по направлению и переменной по модулю силы $F = f(s)$ её работу можно определить так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = \int_{s_0}^{s_1} f(s)\,ds. \tag{1.210}$$

в) Считая силу трения $\vec{F}_{тр}$ постоянной в поступательном движении при скольжении тела по наклонной шероховатой поверхности, её работу можно определить так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = -f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot s, \tag{1.211}$$

где f - коэффициент трения скольжения между телом и шероховатой поверхностью; α - угол наклона шероховатой поверхности к горизонтали.

г) При прямолинейном колебательном движении твердого тела работа переменной силы упругости $\vec{F}_{упр}$ определяется так же, как и для материальной точки, по формуле:

$$A = \frac{c}{2} \cdot \left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right), \tag{1.212}$$

где c, $[Н/м]$ - жесткость упругого элемента;

λ_0 - отклонение от положения статического равновесия в момент времени t_0;

λ_1 - отклонение от положения статического равновесия в момент времени t_1.

д) При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси под действием постоянного момента M его работу можно определить по формуле:

$$A = M \cdot \varphi, \tag{1.213}$$

где φ, $[рад]$ - угол поворота тела относительно начального положения под действием данного момента M, $[Н \cdot м]$.

е) При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси при действии постоянного момента сопротивления вращению $M_{тр}$ (момента трения) его работа определяется по формуле:

$$A = -M_{тр} \cdot \varphi. \tag{1.214}$$

ж) При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси при действии переменного момента $M = f(\varphi)$ его работа при повороте тела на конечный угол φ_1 определяется по формуле:

$$A = \int_{0}^{\varphi_1} M\,d\varphi. \tag{1.215}$$

Силовое воздействие на вращающееся тело можно оценить мощностью N, определяемой по формуле:

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \cdot \frac{d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (1.216)$$

Анализируя выражение (1.216), приходим к выводу о том, что *при постоянной мощности привода вращающегося тела передаваемый вращающий момент будет обратно пропорционален угловой скорости, сообщаемой данному телу.*

з) Работу сил тяжести, действующих на систему (твердое тело), можно определить по формуле:

$$A = \pm P \cdot h_C, \quad (1.217)$$

где P - вес системы (вес тела), h_C - вертикальное перемещение центра масс системы (центра тяжести тела).

При этом работа сил тяжести при перемещении центра вниз считается положительной, при перемещении вверх - отрицательной.

В неизменяемой механической системе после определения работы каждой силы в отдельности получают сумму работ внешних сил в рассматриваемой механической системе $\sum A_k^e$.

1.3.2.8. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Известно, что работу на перемещении тела по траектории $M_0 M_1$ можно оценить по формуле:

$$A_{M_0 M_1} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{M_0}^{M_1} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right). \quad (1.218)$$

Если неизвестен закон движения, вычислить рассматриваемый интеграл возможно, если сила (равнодействующая) постоянна или зависит только от положения данного тела (материальной точки), то есть определяется координатами x, y, z. В таком случае речь пойдет о силовом поле, образуемом системой данных сил. Аналогично с оценкой вектора силы (равнодействующей) по её проекциям на оси, силовое поле можно задать при помощи уравнений:

$$F_x = \Phi_1(x, y, z); \quad F_y = \Phi_2(x, y, z); \quad F_z = \Phi_3(x, y, z); \quad (1.219)$$

Обозначим элементарную работу силы (равнодействующей) как полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$. Данная функция U, дифференциал которой равен элементарной работе, называется *силовой функцией.*

Силовое поле, определяющее данную функцию, будет называться *потенциальным силовым полем*, а силы, действующее в этом поле, - *потенциальными силами*. С учетом принятых обозначений выражение (1.218) можно представить как

$$A_{M_0 M_1} = \int_{M_0}^{M_1} dU(x,\ y,\ z) = U_1 - U_0, \tag{1.220}$$

где $U_0 = U(x_0,\ y_0,\ z_0)$; $U_1 = U(x_1,\ y_1,\ z_1)$; - значения силовой функции в положениях M_0 и M_1 данного поля, соответственно.

Таким образом, *работа потенциальной силы равна алгебраической разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения и не зависит от траектории движущейся точки.*

К *потенциальным силам* относят силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. К *непотенциальным силам* в таком случае можно отнести силы трения, сопротивления среды. Работа этих сил зависит от траектории движения.

Представим значения силовой функции для полей, образованных потенциальными силами.

Силовая функция для поля, образованного силами тяжести:

$$U = -Gz\,. \tag{1.221}$$

Здесь ось z направлена вверх, и $U = 0$ в точке с координатой $z = 0$.

Силовая функция для поля, образованного силами упругости:

$$U = -\frac{c \cdot x^2}{2}. \tag{1.222}$$

Силовая функция для поля, образованного силами тяготения:

$$U = \frac{GR^2}{r}, \tag{1.223}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Сам факт нахождения материальной точки в силовом поле вне положения, где силовая функция равна нулю, говорит о том, что она может выполнить некоторую работу, связанную с изменением её потенциала внутри рассматриваемого поля.

Так вот, *потенциальной энергией материальной точки* в некотором положении называется скалярная величина Π, равная работе, которую произведут силы данного поля при перемещении этой точки в положение с нулевым потенциалом.

Очевидно, что потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятой с противоположным знаком.

$$\Pi(x,\ y,\ z)=-U(x,\ y,\ x). \qquad (1.224)$$

Так же очевидно, что работу потенциальной силы (1.218) с учётом (1.224) можно представить как

$$A_{M_0M_1}=\Pi_0-\Pi_1. \qquad (1.225)$$

Соответственно, с учетом (1.225):

Потенциал точки, находящейся в поле, образованном силами тяжести:

$$\Pi=Gz. \qquad (1.226)$$

Здесь ось z направлена вверх, и $\Pi=0$ в точке с координатой $z=0$.

Потенциал точки, находящейся в поле, образованном силами упругости:

$$\Pi=\frac{c\cdot x^2}{2}. \qquad (1.227)$$

Потенциал точки, находящейся в поле, образованном силами тяготения:

$$\Pi=-\frac{GR^2}{r}. \qquad (1.228)$$

В отношении механической системы *её потенциальная энергия равна работе, которую произведут силы поля при перемещении системы из заданного положения в положение, где её потенциал станет равным нулю.*

$$\Pi=\sum A_{M_k0_k}. \qquad (1.229)$$

Если сделать допущение о том, что все действующие на систему силы потенциальны, то

$$\Pi_0-\Pi_1=\sum A_k. \qquad (1.230)$$

Вспомним закон изменения кинетической энергии механической системы:

$$T_1-T_0=\sum A_k.$$

Приравнивая выражения для суммы работ внешних сил, из двух последних уравнений получим:

$$T_1+\Pi_1=T_0+\Pi_0=const\,. \qquad (1.231)$$

Данное выражение является *законом сохранения механической энергии для консервативной системы (системы, находящейся под действием потенциальных сил).*

Величина $T_i+\Pi_i$ называется *полной механической энергией системы*.

В случае, если в механической системе присутствуют диссипативные силы (силы трения, сопротивления среды и т.д.), закон сохранения механической энергии видоизменяется и представляет собой выражение:

$$T_1+\Pi_1=T_0+\Pi_0+A_Д, \qquad (1.232)$$

где $A_Д$ - работа диссипативных сил.

Пример 1.37

Груз массой $m=10\,кг$, подвешенный к вертикальной пружине, совершает свободные колебания по закону: $y=0{,}2\,sin(8t+0{,}5\pi)$.

Определить наибольшее значение кинетической энергии груза.

Решение: Закон сохранения механической энергии имеет вид: $T_0+\Pi_0=T_1+\Pi_1$, где $T=\dfrac{mV^2}{2}$ - кинетическая энергия груза; $\Pi=\dfrac{C\,y^2}{2}$ - потенциальная энергия груза.

На основании анализа последних двух выражений можно сделать следующие выводы.

Так как сумма энергий в консервативной системе величина неизменная, очевидно, что своего максимального значения кинетическая энергия достигает при минимальном значении потенциальной энергии, т.е.:

если $|y|=0$, то $\Pi=\Pi_{min}=0$ и $V=V_{max}$, следовательно, $T=T_{max}$.

Определим отличный от нуля момент времени данного колебательного процесса, соответствующий минимальной потенциальной энергии (максимальной кинетической) груза:

$$y=0{,}2\sin(8t+0{,}5\pi)=0\Rightarrow\ 8t+0{,}5\pi=2\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{3\pi}{16}c\,.$$

Определим скорость для момента времени $t=\dfrac{3\pi}{16}c:$

$$V_y=V_{max}=\left(0{,}2\sin(8t+0{,}5\pi)\right)'=1{,}6\cos(8t+0{,}5\pi)=1{,}6\cos\left(8\cdot\frac{3\pi}{16}+0{,}5\pi\right)\Rightarrow$$

$$V_{max}=1{,}6\,м/c\,.$$

Отсюда следует:

$$T_{max}=\frac{m\cdot V_{max}^2}{2}=\frac{10\cdot 1{,}6^2}{2}=12{,}8\,Дж\,.$$

Ответ: $T_{max}=12{,}8\,Дж$.

1.3.2.9. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Количеством движения механической системы называется векторная величина $\vec{Q}$, равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q}=\sum m_k\cdot\vec{V}_k. \qquad (1.233)$$

Для механической системы, состоящей из твердых тел, *количество движения в такой системе равно произведению массы всей системы на скорость центра её масс* C, т.е.:

$$\vec{Q}=M\cdot\vec{V}_C. \qquad (1.234)$$

Для механической системы *теорема об изменении количества движения* интерпретируется следующим образом:

Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на систему, на протяжении этого промежутка времени, т.е.:

$$\vec{Q}_1-\vec{Q}_0=\sum\vec{S}_k^e. \qquad (1.235)$$

Закон сохранения количества движения для механической системы говорит о том, что *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

1.3.2.10. ПОНЯТИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Если для характеристики поступательного движения системы используется *количество движения* системы, то для характеристики её вращательного движении применяется *кинетический момент*.

Кинетическим моментом, или *главным моментом количеств движения системы,* называется величина $\vec{K}_O$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра, т.е.:

$$\vec{K}_O=\sum\vec{M}_O\left(m_k\vec{V}_k\right), \quad \text{или} \quad \vec{K}_O=\sum\vec{L}_{Ok}. \qquad (1.236)$$

Определим кинетический момент механической системы, вращающейся относительно неподвижной оси вращения z:

$$K_z = \left(\sum m_k h_k^2\right) \cdot \omega, \qquad \text{или} \qquad K_z = J_z \omega. \tag{1.237}$$

Кинетический момент K_z *твердого тела, вращающегося относительно оси* z, *равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость этого тела.*

В случае, если механическая система состоит из твердых тел, вращающихся относительно одной и той же оси z, кинетический момент K_z можно определить как

$$K_z = \sum J_k \omega_k. \tag{1.238}$$

Кинетический момент механической системы и сумма моментов всех внешних сил относительно одного и того же центра O образуют между собой дифференциальную зависимость:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right). \tag{1.239}$$

Данная зависимость выражает теорему моментов для механической системы, согласно которой *производная по времени от кинетического момента системы относительно произвольного неподвижного центра* O *равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно этого же центра.*

Проекции вектора кинетического момента на декартовые оси определяются как

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_x\left(\vec{F}_k^e\right); \tag{1.240}$$

$$\frac{dK_y}{dt} = \sum M_y\left(\vec{F}_k^e\right); \tag{1.240$^/$}$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right). \tag{1.240$^{//}$}$$

На основании теоремы об изменении кинетического момента можно прийти к следующим выводам.

Если сумма моментов всех действующих на систему сил равна нулю, то кинетический момент системы будет оставаться величиной постоянной. Внутренние силы не могут изменить кинетический момент.

Для механической системы, вращающейся относительно неподвижной оси z, в таком случае справедливо равенство:

$$K_z = J_z \omega = const. \qquad (1.241)$$

Проанализируем последнее выражение.

Если механическая система - неизменяемая $(J_z = const)$, то угловая скорость такого тела $\omega = const$, и тело будет вращаться с постоянной угловой скоростью. Если механическая система изменяемая (например, в случае, если под действием внутренних сил происходит движение материальных точек с изменением их расстояний до оси вращения), то изменение момента инерции J_z при этом будет обратно пропорционально изменению угловой скорости тела ω.

В отношении механической системы принцип Даламбера будет заключаться в том, что:

Если в любой момент времени к каждой из точек системы, помимо действующих на неё внешних и внутренних сил, присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применить уравнения статики.

Пример 1.38

В плоскости Oxy движутся материальные точки M_1 и M_2, массы которых $m_1 = m_2 = 2\,кг$, рис.1.122.

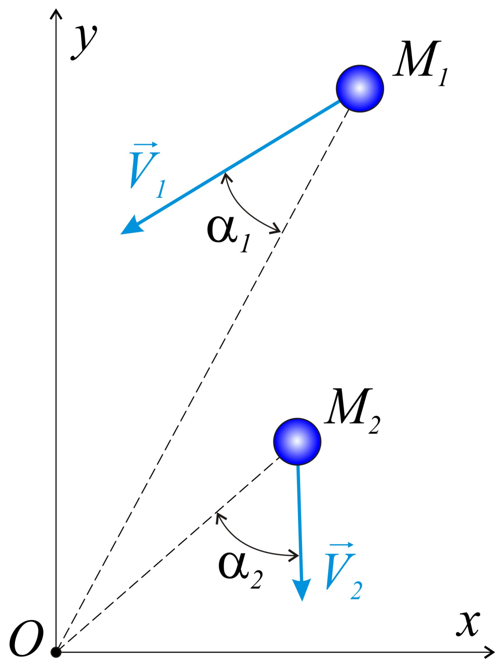


Рис. 1.122. К примеру 1.38

Определить кинетический момент данной системы материальных точек относительно точки O в положении, когда скорости $V_1 = 3V_2 = 6\,м/с$, расстояния $OM_1 = 2OM_2 = 5\,м$ и углы $\alpha_1 = 30^\circ$. $\alpha_2 = 45^\circ$.

Решение: В данной задаче неизвестно положение векторов скоростей по отношению к координатным осям.

В этом случае разложим скорости на касательные и нормальные составляющие к их кратчайшим расстояниям от этих точек до начала координат.

Очевидно, что касательные составляющие векторов скоростей проходят через точку, относительно которой определяется момент, и поэтому момент количества движения от них равен нулю.

С учетом знака моментов:

$$K_O = \sum M_O(m_k \vec{V}_k) = m(V_1 \cdot \sin\alpha_1 \cdot |OM_1|) - V_2 \cdot \sin\alpha_2 \cdot |OM_2| \Rightarrow$$

$$K_O = 2 \cdot (6 \cdot \sin 30^\circ \cdot 5 - 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2{,}5) \approx 22{,}93\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}.$$

Ответ: $K_O \approx 22{,}93\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}$.

Пример 1.39

Однородный стержень длиной $l = 2\ м$ и массой $m = 1{,}2\ кг$ (рис. 1.123) вращается с угловой скоростью $\omega = 5\ с^{-1}$.

Определить кинетический момент стержня относительно центра O.

Решение: Для тонкого однородного стержня момент инерции относительно конца определится как:

$$J_O = \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}2 \cdot 2^2 = 1{,}6\ кг \cdot м^2 \Rightarrow$$

Отсюда, применяя формулу для кинетического момента, получим:

$$K_O = J_O \cdot \omega = 1{,}6 \cdot 5 = 8\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}.$$

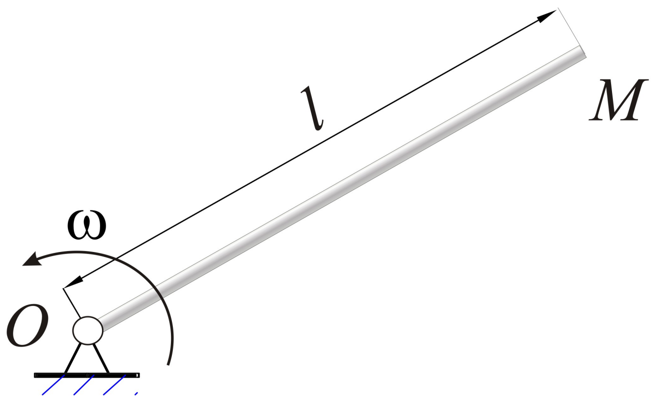


Рис. 1.123. К примеру 1.39

Ответ: $K_O = 8\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}$.

Пример 1.40

На барабан 2 (рис. 1.124), момент инерции которого относительно оси вращения $J_z = 0{,}1\ кг \cdot м^2$, намотаны нити, к которым прикреплены грузы *1* и *3* массой $m_1 = 2 m_3 = 4\ кг$.

Определить кинетический момент системы тел относительно оси вращения, если угловая скорость $\omega = 4\ с^{-1}$, радиусы $R = 2r = 40\ см$.

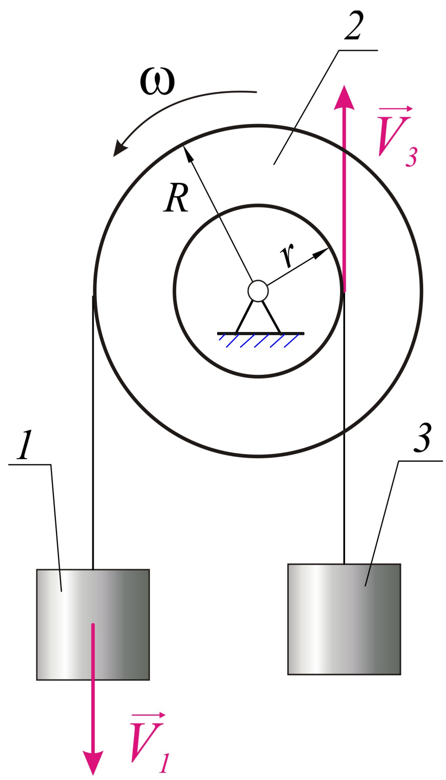


Рис. 1.124. К примеру 1.40

Решение: Определим скорости грузов:

$V_1 = \omega \cdot R = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6\ м/с.$

$V_3 = \omega \cdot r = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\ м/с.$

Кинетический момент системы относительно оси вращения:

$K_z = K_{zб} + K_{z1} + K_{z3} = J_z \cdot \omega + m_1 \cdot V_1 \cdot R + m_3 \cdot V_3 \cdot r \Rightarrow$

$K_z = 0{,}1 \cdot 4 + 4 \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 3{,}28\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}.$

Ответ: $K_z = 3{,}28\ кг \cdot м^2 \cdot с^{-1}.$

1.3.2.11. СВЯЗИ

С понятием *связи* мы знакомились при изучении статики. В динамике данное понятие имеет более расширенное толкование.

Связи, не изменяющиеся с течением времени, называются *стационарными*, в противном случае - *нестационарными*.

Связи, ограничивающие положение элементов механической системы, называются *геометрическими*.

Связи, ограничивающие скорость движения элементов системы, называются *кинематическими (дифференциальными)*. В случае, когда дифференциальную связь можно представить как геометрическую, то такая связь называется *интегрируемой*, иначе – *неинтегрируемой*.

Геометрические и интегрируемые связи называют *голономными,* а неинтегрируемые дифференциальные связи – *неголономными*.

Согласно приведенной классификации, механические системы по наличию тех или иных связей также подразделяют на голономные и неголономные.

Кроме приведенной классификации, связи можно также разделять на *удерживающие* и *неудерживающие*. Удерживающие связи сохраняют свои ограничения при любом положении механической системы, а неудерживающие – нет. В последнем случае система может от таких связей «освобождаться».

Наличие и сочетание тех или иных связей в механической системе будет напрямую определять возможность перемещения элементов данной системы.

Введем следующие понятия.

Возможным перемещением механической системы называется совокупность элементарных перемещений элементов данной системы из занимаемого в данный момент положения, которые допускаются всеми действующими в системе связями.

Под *допускаемыми перемещениями*, в случае неудерживающих связей, понимают те возможные перемещения, при которых связи сохраняются (не «освобождаются»).

Число независимых друг от друга возможных перемещений механической системы называется *числом степеней свободы* этой системы.

Следует отметить следующее.

У свободной материальной точки три степени свободы (три независимые координаты X, Y, Z).

У свободного твердого тела шесть степеней свободы (три независимые линейные координаты и три независимых угла поворота относительно этих осей: X, Y, Z, UX, UY, UZ).

Для механической системы с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом её степеней свободы. Число степеней свободы системы можно определить по числу независимых возможных перемещений, допускаемых в данной системе.

1.3.2.12. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Приведенная в предыдущем параграфе классификация связей не является исчерпывающей.

По отношению к понятию работы, совершаемой в механической системе, связи могут быть *идеальными* и *неидеальными*.

Идеальными считаются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum \delta A_k^r = 0. \qquad (1.242)$$

Условимся возможную работу активной силы обозначать как δA^a, а возможную работу реакции связи δA^r.

Можно доказать, что в случае, если механическая система с идеальными связями находится в состоянии равновесия, то выполняется следующее условие:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0. \qquad (1.243)$$

Это же условие обуславливает *принцип возможных перемещений, согласно которому для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на неё сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю*, т.е.:

$$\sum \left(F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k \right) = 0. \qquad (1.244)$$

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия в механической системе с идеальными связями и позволяет исключать из рассмотрения неизвестные наперед реакции связей.

1.3.2.13. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Из материала предыдущего параграфа следует, что принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики.

Применение принципа Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Совместное применение изложенных принципов позволяет получить общий метод решений задач динамики.

Данный метод выражается в *принципе Даламбера-Лагранжа*, согласно которому *при движении механической системы с идеальными связями в любой момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю*:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0, \qquad (1.245)$$

или в аналитической форме:

$$\sum \left((F_{kx}^a + F_{kx}^u) \delta x_k + (F_{ky}^a + F_{ky}^u) \delta y_k + (F_{kz}^a + F_{kz}^u) \delta z_k \right) = 0. \qquad (1.246)$$

Уравнения 1.245 - 1.246 называются *общими уравнениями динамики* и позволяют составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

1.3.2.14. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ, ОБОБЩЕННЫЕ СКОРОСТИ, ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ В ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно степени свободы системы s, однозначно определяющие положение системы, называются *обобщенными координатами*:

$$q_1, \ldots q_s. \qquad (1.247)$$

При переходе к обобщенной системе координат для любой k -й материальной точки системы можно использовать зависимость вида $x_k = x_k(q_1 \ldots q_s)$. В отношении радиуса-вектора $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$ этой материальной точки обобщенный радиус-вектор принимает вид:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_{1,} \ldots q_s). \tag{1.248}$$

Так как эти координаты независимы по отношению к друг другу, то их элементарные приращения будут также независимы:

$$\delta q_{1,} \ldots \delta q_s. \tag{1.249}$$

При движении механической системы её координаты с течением времени будут меняться согласно закону, определяемому уравнениями:

$$q_1 = f_1(t), \ldots q_s = f_s(t). \tag{1.250}$$

Данные уравнения называются *уравнения движения системы в обобщенных координатах*.

Производные от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями* системы:

$$\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_s. \tag{1.251}$$

Размерности обобщенных скоростей зависят от размерности соответствующих обобщенных координат. Рассмотрим систему со степенью свободы s, состоящую из n материальных точек, на которые действуют силы $\vec{F}_{1,} \vec{F}_2 \ldots \vec{F}_n$, положение которой определятся обобщенными координатами.

Сообщим данной системе некоторое независимое перемещение, при котором приращение получает только одна обобщенная координата q_1, а остальные координаты остаются величинами постоянными.

В таком случае каждый из радиусов-векторов $\vec{r}_k$ получит элементарное приращение $(\delta \vec{r}_k)_1$. В соответствии с правилами математики, данную величину можно представить как частный дифференциал:

$$(\delta \vec{r}_k)_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1. \tag{1.252}$$

Сумма элементарных работ всех действующих сил на элементарном перемещении:

$$\delta A_1 = \vec{F}_1 \cdot (\delta \vec{r}_1)_1 + \vec{F}_2 \cdot (\delta \vec{r}_2)_1 + \ldots + \vec{F}_n (\delta \vec{r}_n)_1. \tag{1.253}$$

Выражая $(\delta \vec{r}_k)_1$ для каждой силы, согласно (1.248) и подставляя в (1.249), окончательно получим:

$$\delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1, \tag{1.254}$$

где
$$Q_1 = \sum \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \tag{1.255}$$

является *обобщенной силой* для координаты q_1.

Последовательно сообщая системе независимые возможные перемещения, при которых меняются единственные координаты $q_2 \dots q_s$, получаем аналогичные выражения для других *обобщенных активных сил системы* $Q_2 \dots Q_s$.

Если системе сообщается такое возможное перемещение, при котором одновременно меняются все обобщенные координаты, то сумма элементарных работ приложенных сил определится равенством:

$$\sum \delta A_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 + \dots + Q_s \cdot \delta q_s. \tag{1.256}$$

Выражение (1.251) представляет собой выражение *полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах.*

Размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}. \tag{1.257}$$

Например, если q - линейная величина, то обобщенная сила Q имеет размерность $[H]$. Если q - угол (безразмерная величина), то Q имеет размерность $[H \cdot м]$. Если q - объем, то Q имеет размерность $[H / м^2]$.

Таким образом, понятие обобщенной силы охватывает все меры механического взаимодействия.

1.3.2.15. РАВНОВЕСИЕ ГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Равновесие в обобщенных координатах рассматривается в полном соответствии с принципом возможных перемещений:

$$Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_s \delta q_s = 0. \tag{1.258}$$

С учетом независимого действия сил условие (1.258) выполняется только тогда, когда каждая обобщенная сила равна нулю. Таким образом, *для* *равновесия голономной механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам, были равны нулю*. Число уравнений равновесия в данном случае будет равняться числу степеней свободы данной системы s.

Согласно принципу Даламбера-Лагранжа, для механической системы в обобщенных координатах должно выполняться равенство:

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^u = 0. \qquad (1.259)$$

По аналогии с (1.256):

$$\sum \delta A_k^u = Q_1^u \cdot \delta q_1 + \ldots + Q_s^u \cdot \delta q_s. \qquad (1.260)$$

где $Q_1^u, + \ldots + Q_s^u$ - обобщенные силы инерции, равные:

$$Q_1^u = \sum \vec{F}_k^u \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}, \ \ldots \ Q_s^u = \sum \vec{F}_k^u \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}. \qquad (1.261)$$

Подставляя выражения для обобщенных сил и обобщенных сил инерции (1.260) в (1.258), получим:

$$Q_1 + Q_k^u = 0, \ \ldots \ Q_s + Q_s^u = 0. \qquad (1.262)$$

На примере первой обобщенной силы Q_1 выведем уравнение движения механической системы в обобщенных координатах.

Учитывая, что сила инерции любой материальной точки системы $\vec{F}_k^u = -m_k \cdot \vec{a}_k$, то:

$$-Q_1^u = \sum \left(m_k \cdot \frac{d \vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right). \qquad (1.263)$$

Преобразуем выражение:

$$\frac{d \vec{V}_k}{d t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{d t} \left(\vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) - \vec{V}_k \cdot \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right). \qquad (1.264)$$

Преобразуем (1.264), подставляя в него следующие зависимости:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1} \quad \text{и} \quad \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_1}.$$

Принимая во внимание, что сумма производных есть производная суммы, а $\vec{V}_k^2 = V_k^2$, $T = \sum \frac{m_k \cdot V_k^2}{2}$, выражение (1.264) приводим к виду: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$. Аналогично, для других обобщенных сил можно получить подобные выражения, совокупность которых образуют систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \end{aligned}\right\}. \tag{1.265}$$

Данные выражения представляют *дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа).*

Число уравнений Лагранжа соответствует степени свободы данной механической системы.

Полученные уравнения дают возможность достаточно просто решать задачи динамики, так как вид и число уравнений Лагранжа не зависят ни от количества тел (материальных точек), входящих в систему, ни от того, как эти тела (точки) двигаются. В случае, если все силы в механической системе являются потенциальными, то данная система уравнений Лагранжа примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.266}$$

где $L = T - \Pi$ - функция от обобщенных координат и обобщенных скоростей, равная разности между кинетической и потенциальной энергиями *(функция Лагранжа* или *кинетический потенциал).*

Состояние голономной механической системы, на которую действуют только потенциальные силы, определяется только функцией Лагранжа. Зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения.

Пример 1.41. Однородный стержень длиной $l = 4\,м$ и массой $m = 50\,кг$ вращается в вертикальной плоскости (рис. 1.125). Определить обобщённую силу, соответствующую обобщённой координате φ, в момент времени, когда угол $\varphi = 45^\circ$.

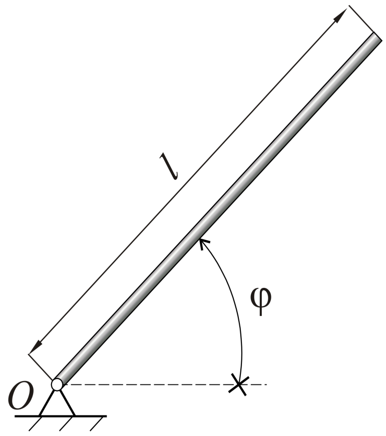


Рис. 1.125. К условию примера 1.41

Решение: Приложим силу тяжести, действующую на стержень, рис. 1.126.

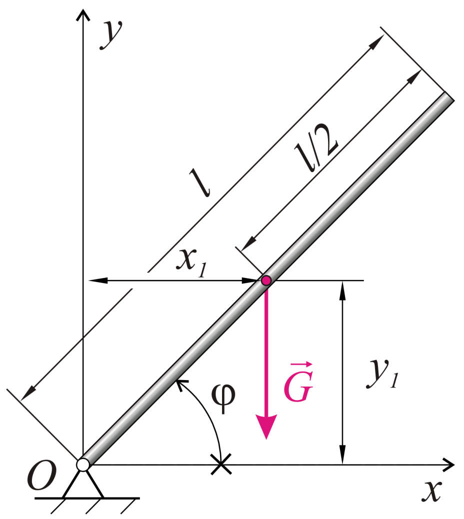


Рис. 1.126. К решению примера 1.41

Свяжем координаты центра тяжести стержня, где приложена сила $\vec{G}$, с обобщённой координатой φ: $x_1 = \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi$; $y_1 = \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi$.

Отсюда находим:

$\delta x_1 = -\frac{l}{2} \cdot \sin\varphi\, \delta\varphi$; $\delta y_1 = \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi\, \delta\varphi$;

Проекции заданных сил (в данном случае силы $\vec{G}$) на координатные оси равны:

$X_1 = 0$; $Y_1 = -G$.

Составим сумму элементарных работ заданных сил (силы $\vec{G}$) при возможном перемещении системы (стержня):

$$\sum_{i=1}^{1} \delta A_i = X_1 \cdot \delta x_1 + Y_1 \cdot \delta y_1 = 0 \cdot \left(-\frac{l}{2} \cdot \sin\varphi\, \delta\varphi \right) - G \cdot \left(\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi\, \delta\varphi \right) \Rightarrow$$

$$\sum \delta A_i = -G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45^\circ\, \delta\varphi .$$

Так как $\sum \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_i$, то для нашего случая с обобщённой координатой φ можно записать для обобщённой силы:

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A_i}{\delta \varphi} \Rightarrow \quad Q_1 = -G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45^{\circ} = -50 \cdot g \cdot \frac{4}{2} \cdot \cos 45^{\circ} \approx -683{,}7\, Н \cdot м.$$

Ответ: $Q_1 \approx -683{,}7\, Н \cdot м$.

Пример 1.42. Тело *1* массой $40\, кг$ и блок *2* радиуса $r = 0{,}5\, м$ соединены гибкой связью, рис. 1.127. Определить обобщённую силу, соответствующую обобщённой координате x, если коэффициент трения скольжения между телом *1* и поверхностью составляет $f = 0{,}1$, а к блоку приложена пара сил с моментом $M = 45\, Н \cdot м$.

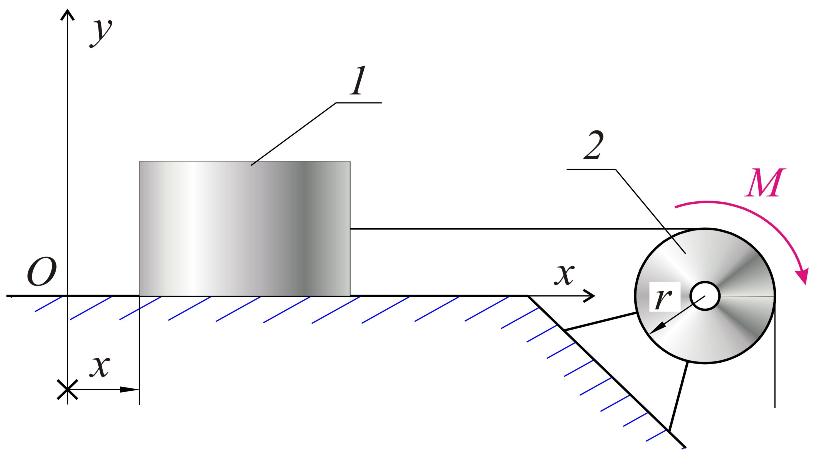


Рис. 1.127. К условию примера 1.42

Решение: Рассмотрим действующие силы и сообщим системе элементарное перемещение по обобщенной координате x, рис. 1.128.

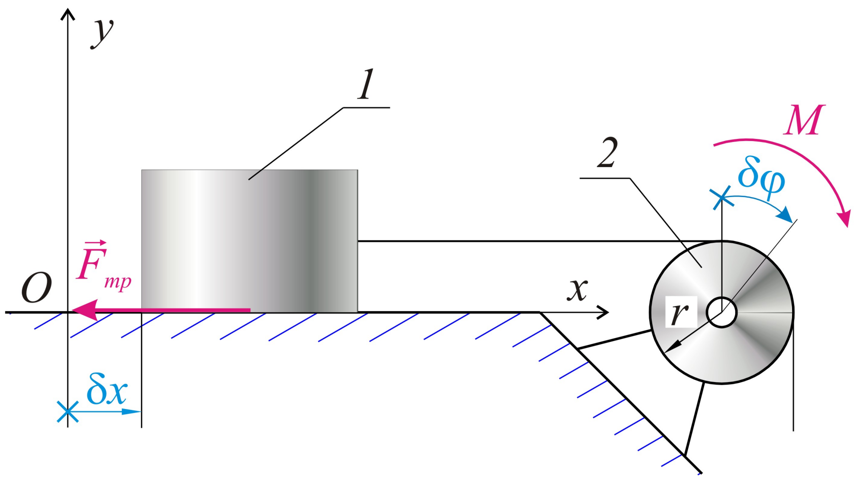


Рис. 1.128. К решению примера 1.42

Распишем сумму элементарных работ всех заданных сил:

$$\sum_{i=1}^{2} \delta A_i = M \cdot \delta \varphi - F_{тр} \cdot \delta x.$$

Выразим элементарное перемещение барабана через линейное $\delta\varphi = \dfrac{\delta x}{r}$ и упростим написанное выше выражение.

$$\sum_{i=1}^{2} \delta A_i = \left(\frac{M}{r} - m g \cdot f\right) \cdot \delta x .$$

С учётом, что $\sum \delta A_i = Q_1 \cdot \delta q_i \Rightarrow$
обобщённая сила определится как:

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A_i}{\delta x} \Rightarrow \quad Q_1 = \left(\frac{45}{0,5} - 40 g \cdot 0,1\right) \Rightarrow \quad Q_1 \approx 50,8\, H .$$

Ответ: $Q_1 \approx 50,8\, H$.

РАЗДЕЛ II. ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

2.1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

2.1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория механизмов и машин (ТММ) является одной из основных машиностроительных дисциплин. Она посвящена изучению наиболее общих вопросов исследования и проектирования механизмов и машин. К этим вопросам относятся:

- изучение строения (структуры) механизмов;
- определение положений механизмов и траекторий, описываемых отдельными точками;
- определение скоростей и ускорений отдельных точек и звеньев механизмов;
- исследование и проектирование различных механизмов;
- определение различных сил, действующих на звенья механизма;
- изучение энергетического баланса машин;
- изучение истинного закона движения машин под действием заданных сил;
- изучение способов регулирования скорости хода машин;
- изучение способов уравновешивания сил инерции.

В соответствии с этими вопросами ТММ является наукой, изучающей строение, кинематику и динамику механизмов.

Для решения своих задач ТММ привлекает методы математики, физики, теоретической механики и др.

При современном состоянии развития науки и техники машину и механизм можно определить следующим образом:

- *машиной* называется искусственная система материальных тел, предназначенная для замены физического или умственного труда человека и повышения его производительности;
- *механизмом* называется искусственная система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемое движение других тел.

Любой механизм состоит из деталей, отдельно изготовленных частей, одни из которых подвижны, другие неподвижны.

Подвижная деталь или группа деталей, движущаяся как одно целое, называется *подвижным звеном.* На рис. 2.1, *а* показан шатун, представляющий собой подвижное звено, состоящее из нескольких деталей: тела шатуна - корпуса, шатунной крышки, болтов, и т.п. При решении многих задач теории механизмов и машин можно не учитывать конструктивное оформление звена и изображать его упрощенно с помощью условных обозначений, отражающих те размеры, которые определяют движение этого и других звеньев механизма [8].

Например, шатун на рис. 2.1, *а* может быть изображен отрезком прямой, длина которого равна расстоянию между осями *A* и *B* (рис. 2.1, *б*). А вот шатун, показанный на рис. 2.1, *в,* будет изображаться в виде треугольника (рис. 2.1, *г*).

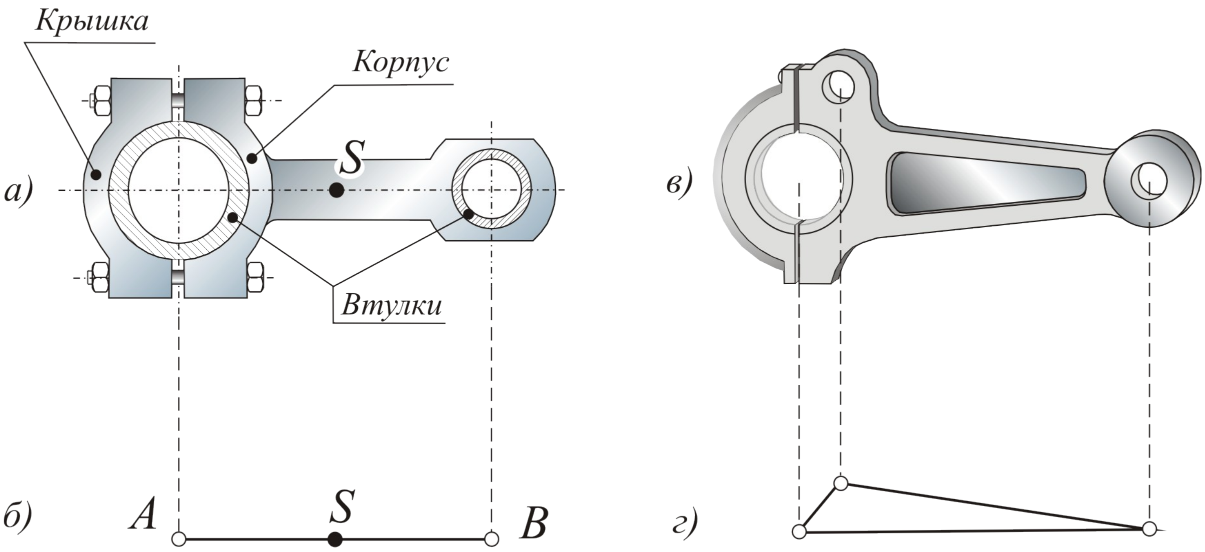


Рис. 2.1. Шатун: *а, в*) натуральный вид; *б, г*) условные обозначения

Все неподвижные детали образуют одно звено - *неподвижное звено* или *стойку.* В дальнейшем мы будем обозначать стойку нулевым звеном или *0*.

Если рассмотреть кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.2), предназначенный для преобразования вращательного движения кривошипа *1* в поступательное движение ползуна *3* (либо на рис. 2.2 оборот), то это будет четырехзвенный механизм, состоящий из трех подвижных звеньев (*1*,*2* и *3*) и стойки *0*.

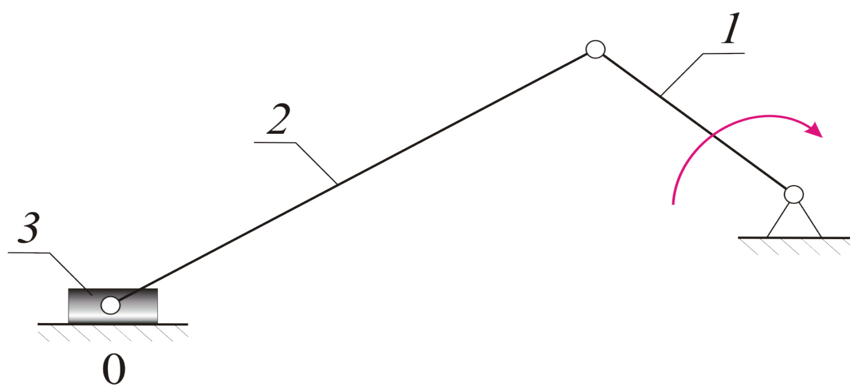


Рис. 2.2. Кривошипно-ползунный механизм

В зависимости от вида движения звена относительно стойки его называют:

-*кривошипом,* если звено совершает полный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;

-*коромыслом,* если звено делает неполный оборот вокруг оси, связанной со стойкой, совершая возвратные вращательные движения;

-*шатуном,* если звено соединено с подвижными звеньями и совершает сложное (плоское) движение (звено *2* на рис. 2.2);

-*ползуном,* если звено совершает поступательное движение относительно стойки;

-*кулисой,* если это звено служит подвижной направляющей для другого звена;

-*камнем кулисы* или *кулисным камнем,* если это звено движется поступательно относительно кулисы (рис. 2.3).

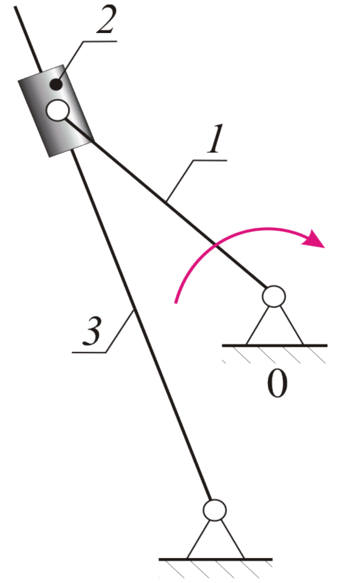


Рис. 2.3. Кулисный механизм: *0* – стойка; *1* -кривошип;
2- кулисный камень; *3* – кулиса-коромысло

Кроме перечисленных выше звеньев, широко распространенных в рычажных механизмах, в различных машинах достаточно часто используют механизмы с зубчатым зацеплением (рис. 2.4), а также кулачковые механизмы.

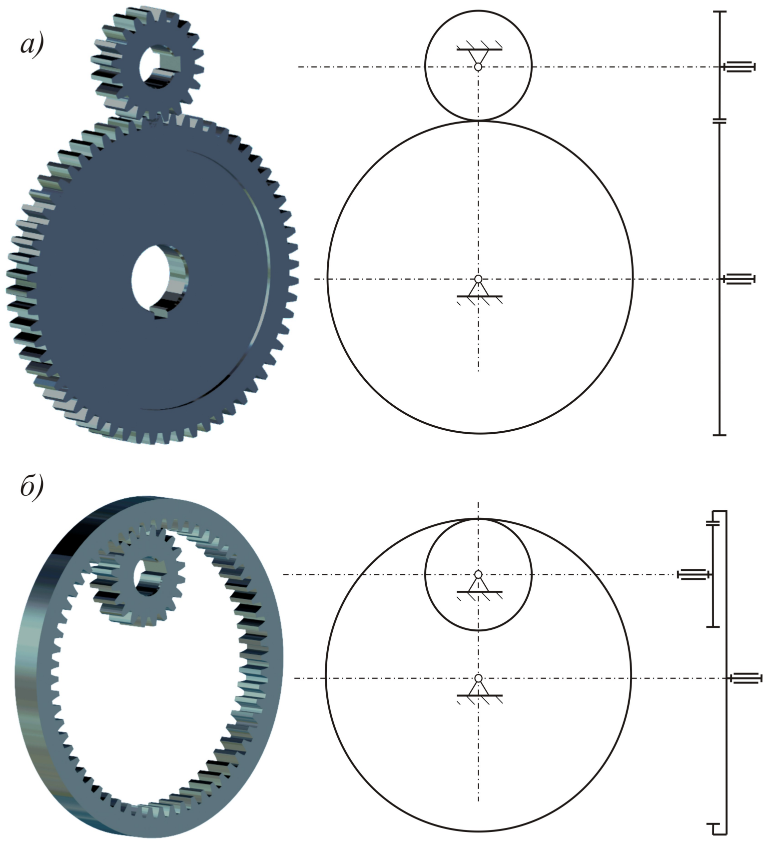


Рис. 2.4. Зацепление зубчатых колёс: *а*) внешнее зацепление колёс;
б) внутреннее зацепление колёс

Зубчатым механизмом называют механизм, в состав которого входят зубчатые колеса, т. е. звенья, имеющие выступы (зубья) для передачи движения посредством взаимодействия с зубьями другого колеса.

Зубчатые колеса изображают условно окружностями, которые при относительном движении колес перекатываются друг по другу без скольжения, т. е. центроидами колес в их относительном движении, либо их диаметрами (см. рис. 2.4).

В теории зубчатого зацепления эти окружности называются *начальными окружностями*.

Кулачковым механизмом называют механизм, в состав которого входит кулачок (рис. 2.5).

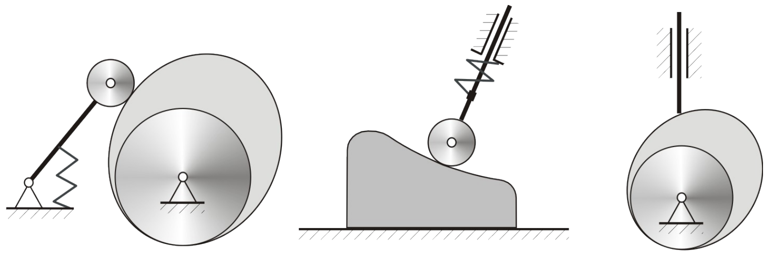


Рис. 2.5. Виды кулачковых механизмов

Кулачком называют звено со сложной формой рабочей поверхности (поверхность переменной кривизны), за счет которой обеспечивается требуемый закон движения выходного звена, (рис. 2.6, звено *1*). Выходное звено кулачкового механизма обычно называют *толкателем.*

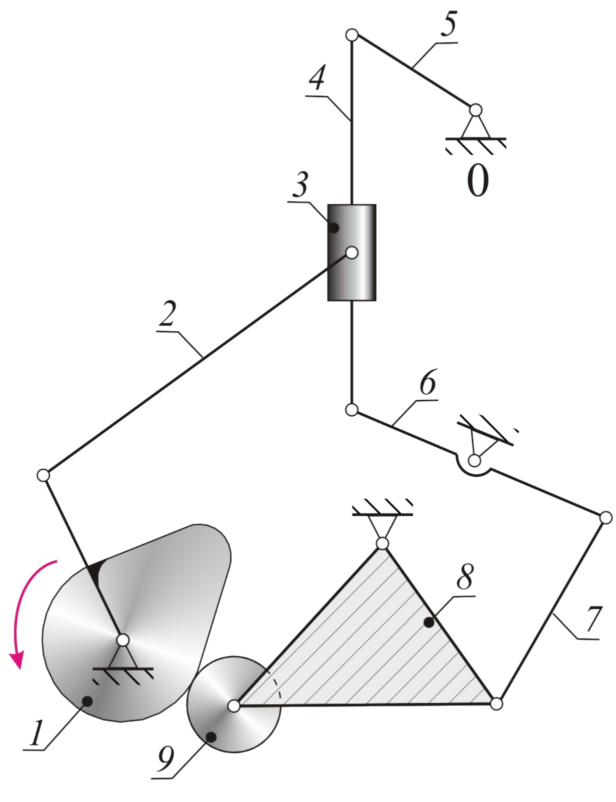


Рис. 2.6. Кинематическая схема механизма: *1*- кулачок-кривошип; *2*- шатун; *3*- кулисный камень; кулиса-шатун; *5*-коромысло; *7*-шатун; *8*- коромысло толкатель; *9* – ролик толкателя

В десятизвенном механизме, показанном на рис. 2.6, девять звеньев подвижны. Укажем вид движения этих звеньев.

Кулачок-кривошип *1* - вращательное движение; шатун *2* - плоское движение; кулисный камень *3* - сложное движение; кулиса-шатун *4* - плоское движение; коромысла *5, 6* - вращательные движения; шатун *7* – плоское движение; коромысло-толкатель *8* - движение вращательное; ролик толкателя *9* - движение сложное вращательное.

Рассмотрим механизм, показанный на рис. 2.7.

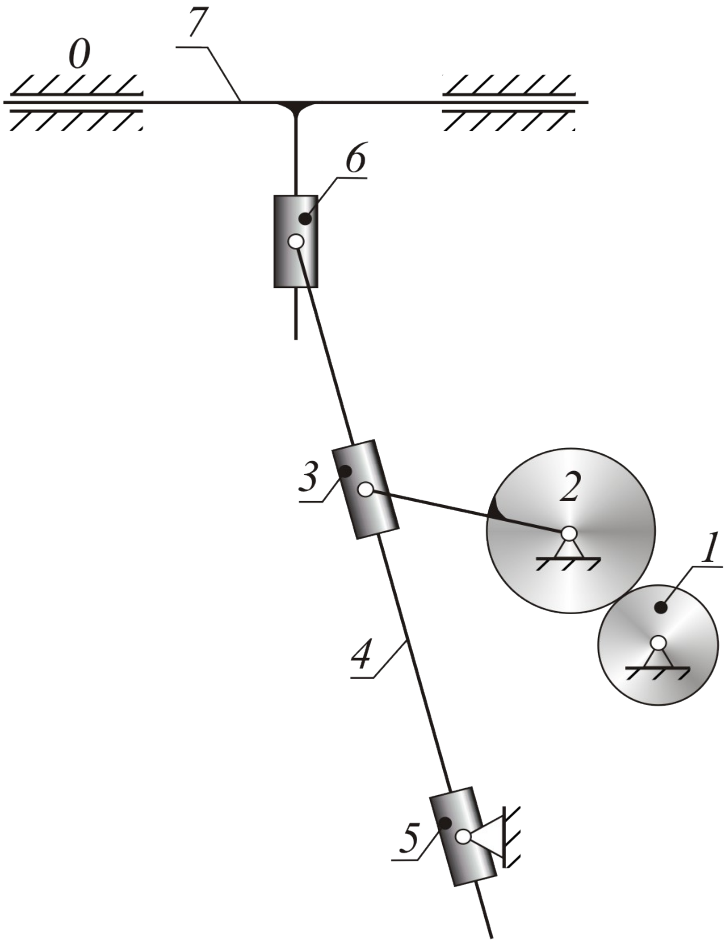


Рис. 2.7. Схема механизма: *0* - стойка; *1*- ролик; *2*- ролик-кривошип; *3* -кулисный камень; *4*-шатун-кулиса; *5*- кулисный камень; *6* -кулисный камень; *7* - ползун-кулиса

В данном восьмизвенном механизме семь звеньев подвижны и совершают следующие виды движений: ролик *1*- движение вращательное; ролик-кривошип *2* - движение вращательное; кулисный камень *3* - движение сложное;- шатун-кулиса *4* - движение плоское; кулисный камень *5* - движение вращательное; кулисный камень *6* - движение сложное; ползун-кулиса *7* - движение поступательное.

Иногда возникают затруднения: какое звено в кулисной паре (кулиса - кулисный камень) назвать кулисой, а также - кулисным камнем (например, в кинематической паре *4-5* на рис. 2.7).

В дальнейшем из двух звеньев кулисной пары будем называть кулисой звено, имеющее большие линейные размеры.

2.1.2. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ПАРА. ЭЛЕМЕНТ ПАРЫ

Любой механизм состоит из стойки и нескольких подвижных звеньев. Причем звенья в механизме соединяются между собой таким образом, что всегда имеется возможность их движения относительно друг друга.

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев называется *кинематической парой.*

Иными словами, два звена, соединенные подвижно, образуют кинематическую пару.

Определим количество кинематических пар, образованных звеньями различных механизмов.

Звенья кривошипно-ползунного механизма (рис. 2.2) образуют 4 кинематические пары: *0-1, 1-2, 2-3, 3-0.*

Такое же количество кинематических пар имеется в кулисном механизме, показанном на рисунке 2.3: *0-1, 1-2, 2-3, 3-0.*

13 кинематических пар образованы звеньями механизма, показанного на рисунке 1.6: *0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-0, 4-6, 6-0, 6-7, 7-8, 8-0, 8-9, 9-1.*

Совокупность точек, линий, поверхностей, по которым происходит касание звеньев, образующих кинематическую пару, называется *элементами пары.*

Можно говорить, что кинематическая пара - это совокупность двух элементов, каждый из которых принадлежит одному звену.

При изучении структуры и кинематики механизмов обычно принимают следующие допущения:

-звенья механизма являются абсолютно твердыми телами;

-элементы кинематических пар изготовлены абсолютно точно;

-в кинематических парах отсутствуют зазоры.

Для непрерывного контакта звеньев, образующих кинематическую пару, необходимо обеспечить замыкание кинематической пары.

Различают силовое и геометрическое замыкание кинематической пары.

При силовом замыкании кинематическая пара образуется за счет прижатия одного звена к другому силой тяжести звена либо другой дополнительной силой, например, силой пружины (см. рис.2.5).

Геометрическое замыкание осуществляется за счет соответствующего конструктивного оформления элементов кинематической пары (рис. 2.8, рис. 2.12).

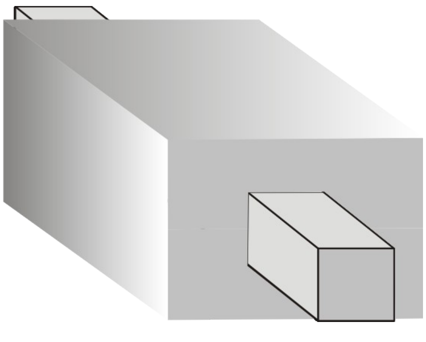


Рис. 2.8. Геометрическое замыкание кинематической пары

В зависимости от количества кинематических пар, в которые входит данное звено, оно может быть:

-одноэлементным или однопарным, если оно входит в одну кинематическую пару (рис. 2.9, *а*);

-двухэлементным или двухпарным, если оно входит в две кинематические пары (рис. 2.9, *б*);

-трехэлементным или трехпарным, если оно входит в три кинематические пары (рис. 2.9, *в* или рис. 2.9, *г*) и так далее.

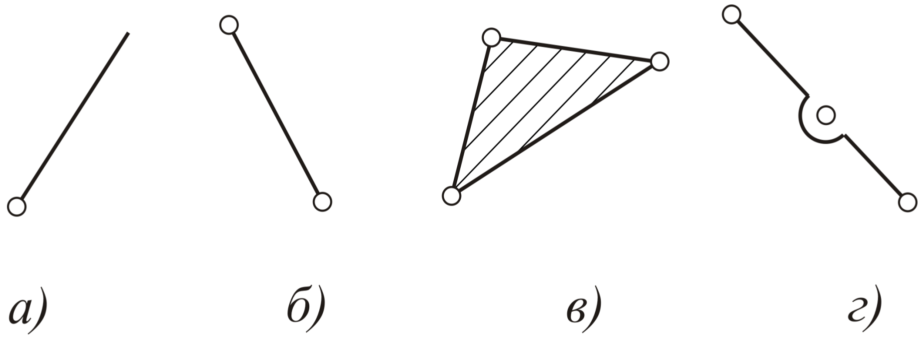


Рис. 2.9. Варианты изображений звеньев: *а*) одноэлементных; *б*) двухэлементных; *в,г*) трехэлементных

Совокупность звеньев, связанных кинематическими парами, называется *кинематической цепью.*

2.1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. МЕХАНИЗМ

Различают кинематические цепи:

-простые и сложные;

-замкнутые (закрытые) и незамкнутые (открытые);

-плоские и пространственные.

Кинематическая цепь называется *простой,* если каждое ее звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 2.10, *а*, рис. 2.2, рис. 2.3).

Кинематическая цепь называется *сложной,* если в ее составе имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары (рис. 2.10, *б*, рис. 2.7 - звено *4* - трехэлементное).

Замкнутой называется кинематическая цепь, в которой каждое звено входит, по крайней мере, в две кинематические пары (рис. 2.10, *а*, рис. 2.2, рис. 2.3).

Незамкнутой, или *открытой,* кинематической цепью называется кинематическая цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее только в одну кинематическую пару (рис. 2.10, *б*).

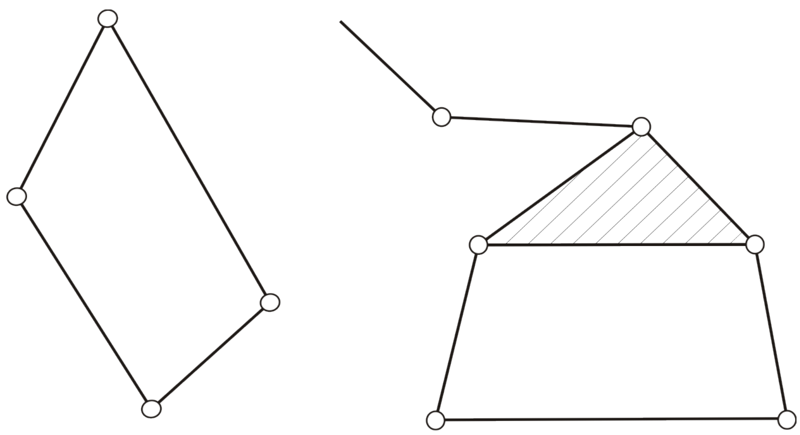
Кинематическая цепь называется *плоской*, если все ее звенья движутся в параллельных плоскостях, в противном случае кинематическая цепь будет *пространственной.*

Звено или звенья, движения которых заданы, называются *входными.*

Звено, совершающее требуемое движение, для реализации которого был создан механизм, называется *выходным.*

Применяют также термины ведущее и ведомое звено.

Звено, к которому приложены движущие силы, называется *ведущим.*



а) *б*)

Рис. 2.10. Кинематические цепи: *а*) простая, замкнутая; *б*) сложная, открытая

Звено, к которому приложены силы полезного или производственного сопротивления, называется *ведомым.*

2.1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Кинематические пары принято классифицировать по следующим признакам:

-по характеру относительного движения звеньев;

-по характеру соприкасания звеньев;

-по числу ограничений (условий связи), налагаемых на относительное движение звеньев.

По характеру относительного движения звеньев кинематические пары делятся на *плоские* и *пространственные.*

Кинематическая пара называется *плоской,* если звенья, образующие пару, перемещаются в параллельных плоскостях, в противном случае кинематическая пара будет *пространственной.*

Так, вращательная пара, показанная на рис. 2.11, *а*, является плоской кинематической парой, а сферическая пара или шаровой шарнир (рис. 2.11, *б*) относится к пространственным кинематическим парам.

(Стрелками показаны возможные перемещения одного звена относительно другого).

По характеру соприкасания звеньев кинематические пары делятся на *низшие* и *высшие.*

Кинематическая пара называется *низшей,* если соприкасание звеньев происходит по поверхности.

При этом рассматриваются идеальные кинематические пары, т.е. без наличия зазоров.

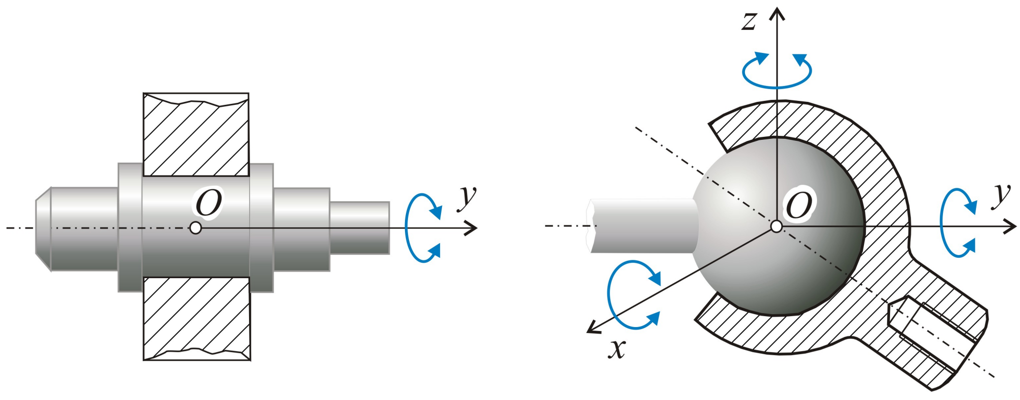


Рис. 2.11. Кинематические пары: *а*) плоская кинематическая пара; *б*) пространственная кинематическая пара

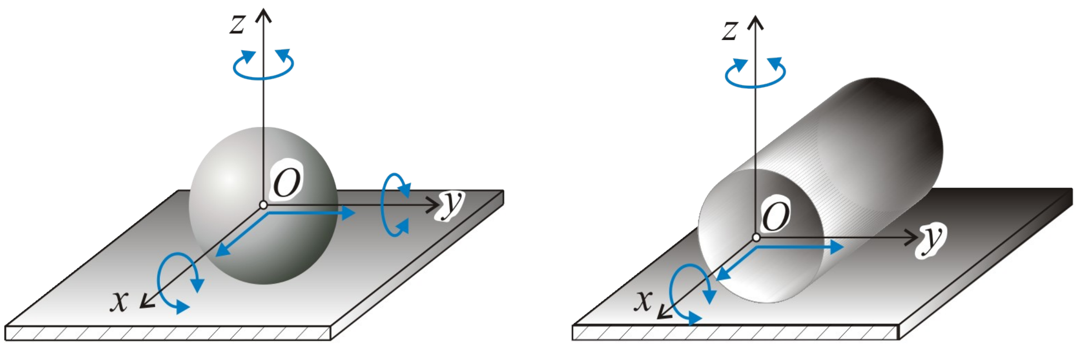


Рис. 2.12. Кинематические пары: *а*) шар-плоскость; *б*) цилиндр - плоскость

Кинематическая пара называется *высшей,* если звенья, образующие пару, соприкасаются в точке или по линии.

По количеству ограничений или условий связи, налагаемых на относительное движение звеньев, различают кинематические пары пяти классов. При этом номер класса пары совпадает с числом условий связи, наложенных на относительное движение звеньев, и может быть подсчитан по формуле

$$S = 6 - H, \qquad (2.1)$$

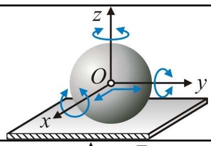
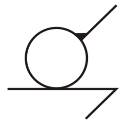
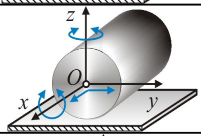
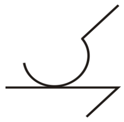
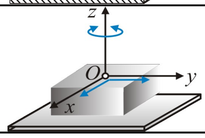
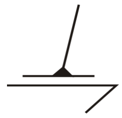
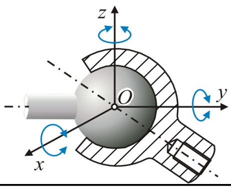
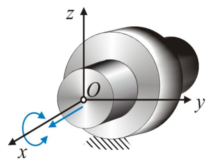
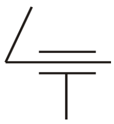
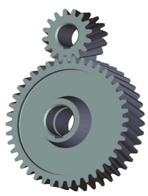
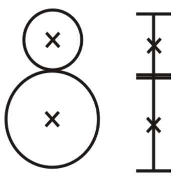
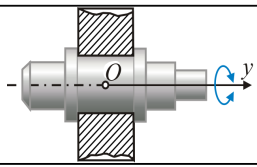
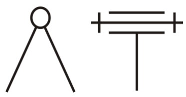
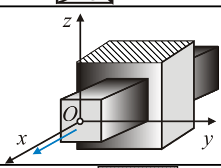
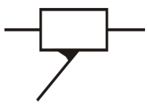
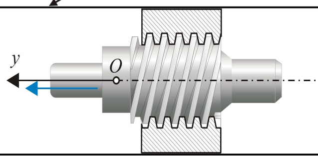
где H - *число степеней свободы* кинематической цепи, представляющее число независимых параметров (обобщенных координат), однозначно определяющих положение данной цепи; S - число условий связи, номер класса пары.

Число H можно легко подсчитать, имея в виду, что свободное тело в пространстве обладает шестью степенями свободы и его движение может быть представлено в виде трех поступательных и трех вращательных движений относительно координатных осей x, y, z.

В данном пособии используем классификацию кинематических пар по классам. В табл. 2.1 приведена классификация некоторых кинематических пар и показаны их условные обозначения.

Таблица 2.1

Классификация кинематических пар по классам

Название пары	Рисунок	Условное изображение	Число степеней свободы	Число условий связи, класс пары
Шар-плоскость			5	I
Цилиндр-плоскость			4	II
Плоскостная			3	III
Сферическая			3	III
Цилиндрическая			2	IV
Внешнее зубчатое зацепление цилиндрических колес			2	IV
Вращательная			1	V
Поступательная			1	V
Винтовая			1	V

Например, в кинематической паре «шар-плоскость», см. табл. 2.1, шар обладает пятью степенями свободы в относительном движении.

Следовательно, $S = 6 - 5 = 1$, т.е. эта пара является парой первого класса.

Кинематическая пара «цилиндр-плоскость» будет парой второго класса, т.к. $S = 6 - 4 = 2$.

2.1.5. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА МЕХАНИЗМА

Механизм можно изобразить техническим чертежом, полуконструктивной, кинематической и структурной схемами.

Чтобы изучить движение звеньев механизма, необходимо знать не только количество звеньев, число и виды кинематических пар, но и те параметры, которые влияют на движение звеньев: расстояние между осями кинематических пар, взаимное расположение осей и направляющих, числа зубьев колес и так далее. Все это показывают на кинематической схеме механизма.

Кинематической схемой механизма называют такую схему, на которой в масштабе с помощью условных обозначений показывают все те параметры механизма, которые влияют на движение его звеньев.

Для изучения строения (структуры) механизма обычно вычерчивают его структурную схему.

Структурной схемой называют такую схему механизма, на которой с помощью условных обозначений показывают последовательность соединения звеньев, число и виды кинематических пар.

Структурная схема вычерчивается без учета геометрических размеров звеньев механизма и часто отличается от его кинематической схемы тем, что она выполнена без соблюдения масштабов длин звеньев.

Этот способ изображения структурной схемы механизма не является единственным: в зависимости от решаемой задачи структурная схема может быть представлена, например, в виде буквенного выражения, отражающего последовательность соединения кинематических пар и их виды.

Как уже было сказано выше, при вычерчивании кинематических схем механизмов применяют условные изображения звеньев и кинематических пар.

Если звено входит в две вращательные пары, то его условно изображают отрезком AB прямой линии с двумя кружками на концах независимо от фактической конфигурации этого звена (рис. 2.13).

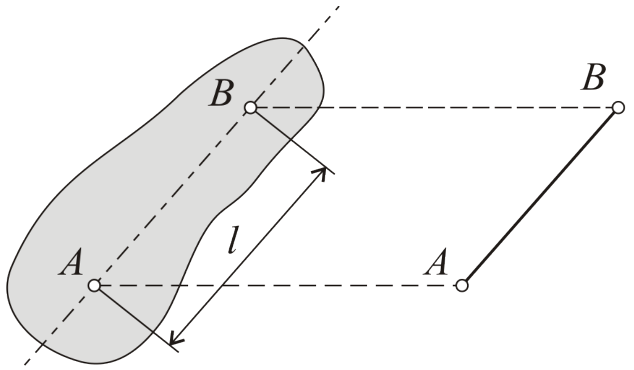


Рис. 2.13. Условное изображение звена

Основным размером такого звена считается расстояние l между точками A и B. Аналогичная методика используется при изображении более сложных звеньев.

На рис. 2.14 показаны два способа изображения трехшарнирного (трехэлементного) звена.

При изображении поступательных пар основными параметрами являются угол α, определяющий положение неподвижной направляющей, и плечо h между центром вращательной пары и направляющей (рис. 2.15).

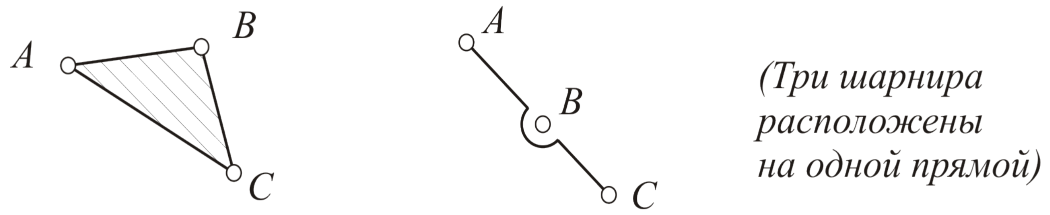


Рис. 2.14. Условные изображения трёхшарнирного звена

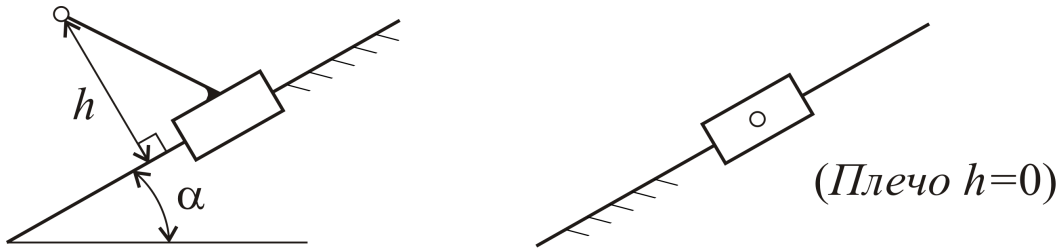


Рис. 2.15. Условные изображения поступательных пар

На рис. 2.16 - 2.17 показаны различные способы условного изображения наиболее встречающихся в различных механизмах вращательных (рис. 2.16) и поступательных (рис. 2.17) пар.

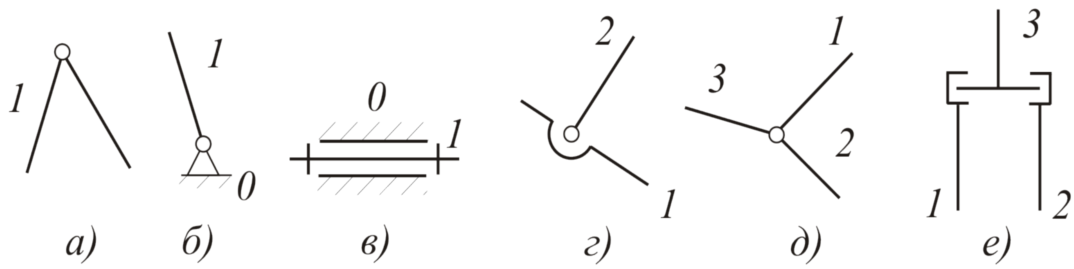


Рис. 2.16. Условные изображения вращательных кинематических пар

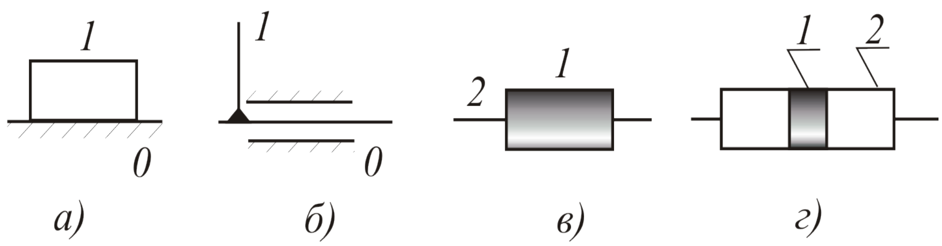


Рис. 2.17. Условные изображения поступательных кинематических пар

Неподвижное звено обозначается штриховкой.

Вращательную пару часто называют *шарниром.* Если вращательная пара расположена в средней части звена (рис. 2.16, *г*), то около кружка, обозначающего пару, вычерчивается дуга, показывающая, что в шарнире соединено только два звена.

Если шарнир соединяет более двух звеньев (рис. 2.16, *д*), то он называется *кратным.* При этом кратность шарнира, т.е. число образованных кинематических пар, равна числу соединяемых звеньев минус единица.

На рисунке 2.16, *д*, *е* изображен двойной шарнир. Звенья *1*, *2* и *3* образуют две кинематические пары *1-3* и *2-3*. Если двойной шарнир показан только видом (рис. 2.18), то при подсчете количества кинематических пар в этом соединении достаточно указать любые две пары: *1-2* и *1-3* или *1-2* и *2-3*.

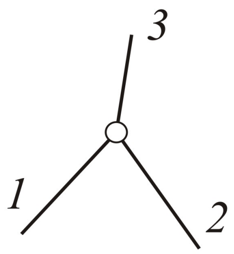


Рис. 2.18
Двойной шарнир

При решении различных инженерных задач приходится использовать размеры, измеряемые на кинематических схемах исследуемых механизмов. Введем понятие вычислительного масштаба длины μ_l, имеющего размерность $м/мм$.

Вычислительным масштабом длины называют число μ_l, показывающее, сколько метров истинной длины содержится в одном миллиметре чертежа.

Если чертежный масштаб $M\ 1:m$, то ему соответствует вычислительный масштаб длины

$$\mu_l = 0{,}001 \cdot m \frac{м}{мм}. \qquad (2.2)$$

\`

Например, если $M\ 1:2$, то $\mu_l = 0{,}001 \cdot 2 = 0{,}002 \frac{м}{мм}$;

если $M\ 4:1$, то $\mu_l = 0{,}001 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}00025 \frac{м}{мм}$.

Пусть l_{OA} - истинная длина звена OA в метрах,

OA - отрезок в *мм*, изображающий звено OA на чертеже.

Тогда

$$l_{OA} = OA \cdot \mu_l,\ м. \qquad (2.3)$$

2.1.6. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

Под *структурным анализом механизма* понимают определение степени подвижности механизма; разложение его на структурные группы и входные звенья; определение класса и порядка групп, а также класса и порядка всего механизма. Структурный анализ производится для удобства выполнения кинематического и силового расчета механизма.

Число степеней свободы H кинематической цепи зависит от количества звеньев, входящих в эту цепь, от числа и вида образованных этими звеньями кинематических пар.

Число степеней свободы кинематической цепи, состоящей из k звеньев, p_5 пар *V* класса, p_4 пар *VI* класса, p_3 пар *III* класса, p_2 пар *II* класса и p_1 пар *I* класса определяется формулой:

$$H=6k-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1. \qquad (2.4)$$

Степенью подвижности W кинематической цепи называют число ее степеней свободы относительно звена, принятого за стойку.

Так как неподвижное звено отнимает шесть степеней свободы, то

$$W=H-6=6\cdot(k-1)-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1$$

или

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1, \qquad (2.5)$$

где n - число подвижных звеньев кинематической цепи.

Равенства типа (2.5), связывающие степень подвижности кинематической цепи с количеством звеньев, а также с числом и видом кинематических пар, называют *структурными формулами*.

Формула (2.5) называется структурной формулой Сомова-Малышева.

Эта формула впервые в несколько другом виде была получена в 1887 году профессором П.И. Сомовым и развита профессором А.П. Малышевым в 1923 году.

Например, если $W=1$, то механическая система подвижна и для получения определенности в ее движении необходимо задать движение одному из ее звеньев, совершающему вращательное или поступательное движение.

При $W=2$ в механизме должно быть два входных звена.

Если $W\leqslant 0$, то механическая система двигаться не может, т.к. она является жесткой системой, т.е. вырождается в ферму.

Формулой (2.5) пользуются в тех случаях, когда на движения звеньев механизма не налагаются какие - то общие ограничения, т.е. для определения степени подвижности пространственных механизмов.

Если же на относительные движения звеньев механизма налагаются общие ограничения, то вид структурной формулы изменяется.

Так, в плоских механизмах, наиболее распространенных в технике, для того чтобы обеспечить движение звеньев в параллельных плоскостях, оси всех вращательных пар должны быть параллельными и перпендикулярными к плоскости движения. В результате на относительные движения звеньев налагаются 3 общих условия связей (говорят, что эти механизмы относятся к 3-му семейству).

Тогда свободные подвижные звенья будут обладать $(6-3)n$ степенями свободы, пары пятого класса будут налагать $(5-3)p_5$ условий связи, а пары четвертого класса - $(4-3)p_4$ условий связи.

Кинематические пары третьего, второго и первого классов не должны входить в плоские механизмы, как обеспечивающие пространственный характер относительного движения звеньев. Для плоских механизмов степень подвижности будет определяться по формуле

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \tag{2.6}$$

Эта формула получена знаменитым русским ученым П.Л. Чебышевым и называется *структурной формулой Чебышева.*

Необходимо отметить, что в плоских механизмах к парам пятого класса относятся все низшие пары, а к парам четвертого класса - все высшие пары (пары идеальные, без зазоров). Из структурных формул видно, что для того чтобы получить механизм определенной подвижности, т.е. с определенным числом входных звеньев, нельзя произвольно задаваться количеством звеньев, числом и видом кинематических пар. Все эти параметры взаимосвязаны соотношением, которое нам дает структурная формула.

2.1.7. ПАССИВНЫЕ СВЯЗИ И ЛИШНИЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Избыточными, *или пассивными*, связями называют такие связи, которые повторяют (дублируют) ограничения, наложенные другими связями на относительное движение некоторых звеньев.

В некоторых механизмах кроме звеньев и пар, активно оказывающих влияние на характер движения механизма, имеются звенья и кинематические пары, не оказывающие такого влияния.

Удаление их из механизма не нарушает характера движения остальных звеньев механизма. Такие лишние условия связи называются – пассивными, а степени свободы – *лишними степенями свободы*. Применение в механизмах пассивных связей и лишних степеней свободы вызывается не кинематической необходимостью, а соображениями иного порядка - конструктивными для увеличения прочности и жесткости системы, уменьшения потерь на трение, перераспределения нагрузки, удобством при ремонте или замене деталей и т.п.

При структурном анализе пассивные связи и лишние степени свободы механизма обязательно должны быть выявлены и при определении степени подвижности *не должны учитываться*.

Структурным синтезом механизма называют проектирование структурной схемы механизма, т.е. схемы, на которой показана последовательность соединения звеньев и виды кинематических пар.

Замена высших пар IV класса на кинематические цепи с парами V класса осуществляется следующим образом. Любая высшая пара IV класса в плоских механизмах может быть заменена цепью с парами V класса. Для того чтобы заменяющие цепи с парами только V класса были эквивалентными цепями с парами IV класса, надо, чтобы степень подвижности после замены пар IV класса на пары V класса не изменилась и характер относительно движения звеньев для данного момента времени заменяющей цепи сохранился. Одна пара IV класса при замене её на пары V класса эквивалентна введению в механизм одного звена *(фиктивного)* с двумя парами V класса.

Общие правила замены высших пар IV класса цепями только с парами V класса:

1. В месте контакта двух звеньев, образующих пару V класса, проводится касательная $\tau - \tau$, а затем нормаль $(n-n)$ к профилям элементов звеньев, и на ней определяется положение центров кривизны.

2. В центрах кривизны устанавливаются вращательные пары. В случае если один из профилей очерчен по прямой и его радиус кривизны равен бесконечности, устанавливается поступательная пара.

3. Центр кривизны профилей соединяется между собой условным *(фиктивным)* звеном.

Следует отметить, что замена высших пар IV класса на пары V класса – это условная операция, необходимая только при принятой классификации механизмов Ассура – Артоболевского и в некоторых случаях для анализа кулачковых механизмов.

У действительных механизмов замена высших пар не производится.

Механизмы, в которых высшие кинематические пары заменены низшими, называют *заменяющими*.

Примеры замены пар IV класса на пары V класса механизмов, наиболее часто встречающихся, приведены на рис. 2.19-2.23.

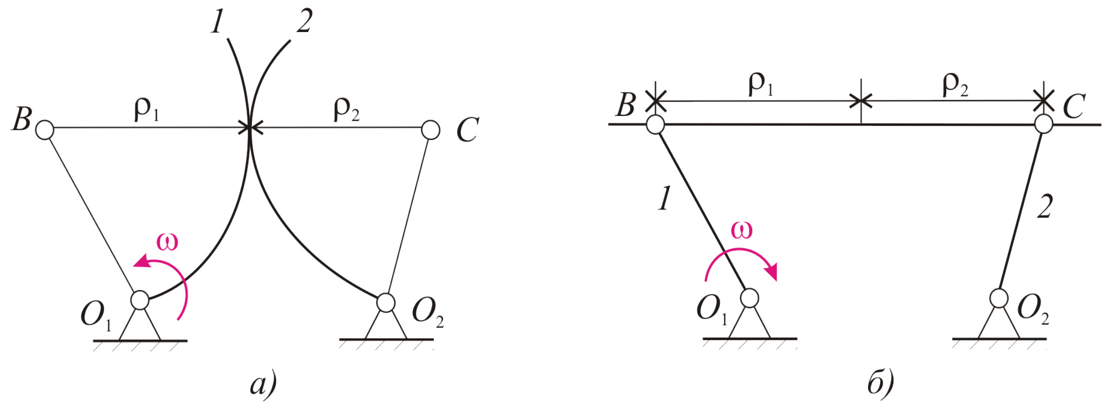


Рис. 2.19. Замена высшей пары низшей (пример 1): *а*) основной механизм; *б*) заменяющий механизм: ρ_1 и ρ_2 - радиусы, проведённые из центров кривизн поверхностей *1* и *2*

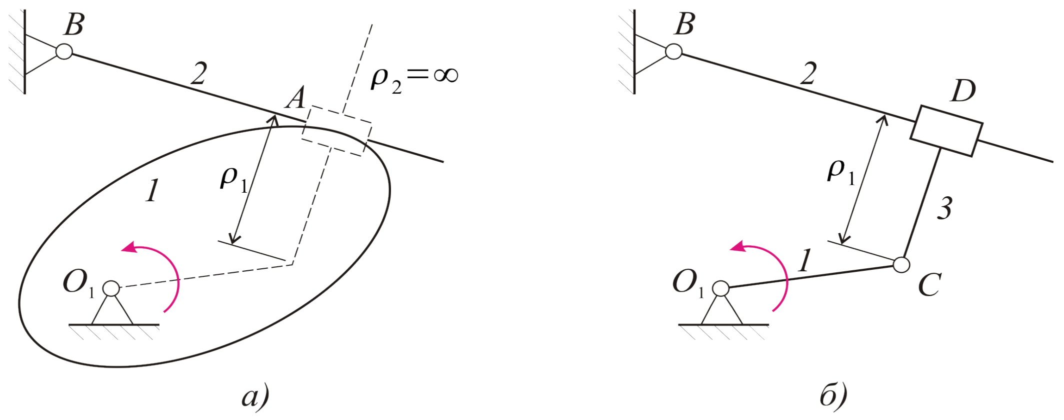


Рис. 2.20. Замена высшей пары низшей (пример 2): *а*) основной механизм; *б*) заменяющий механизм: ρ_1 и ρ_2 - радиусы, проведённые из центров кривизн поверхностей *1* и *2*

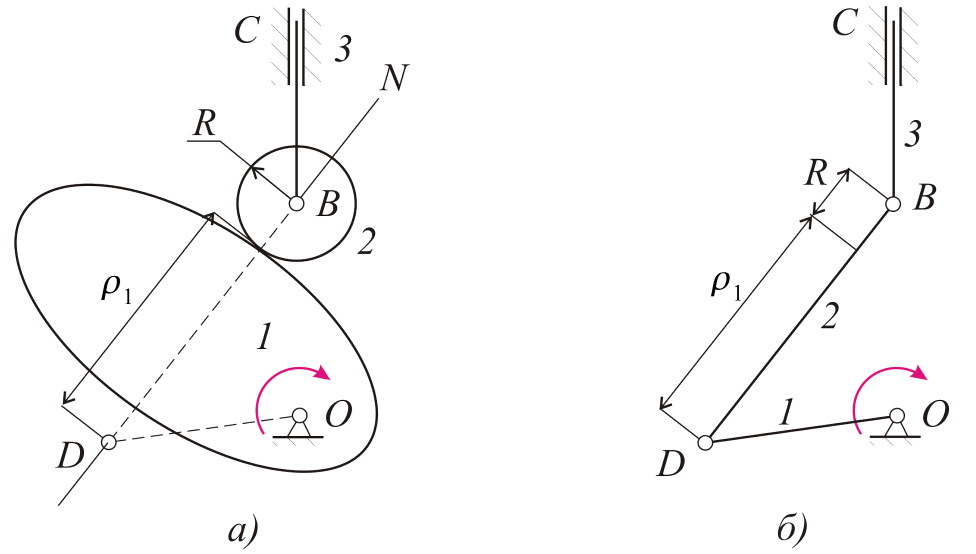


Рис. 2.21. Замена высшей пары низшей (пример 3): *а*) основной механизм; *б*) заменяющий механизм: ρ_1 и ρ_2 - радиусы, проведённые из центров кривизн поверхностей *1* и *2*

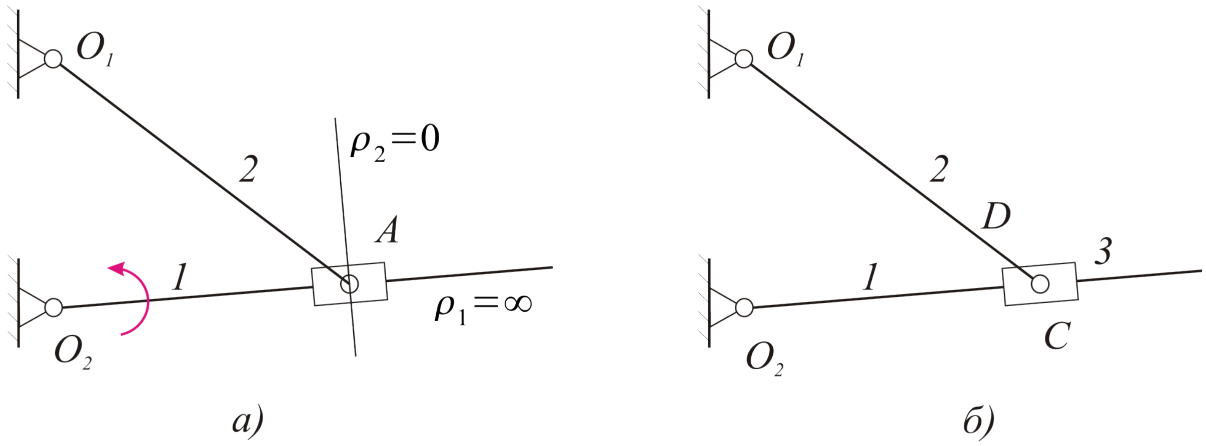


Рис. 2.22. Замена высшей пары низшей (пример 4): *а*) основной механизм; *б*) заменяющий механизм: ρ_1 и ρ_2 - радиусы, проведённые из центров кривизн поверхностей *1* и *2*

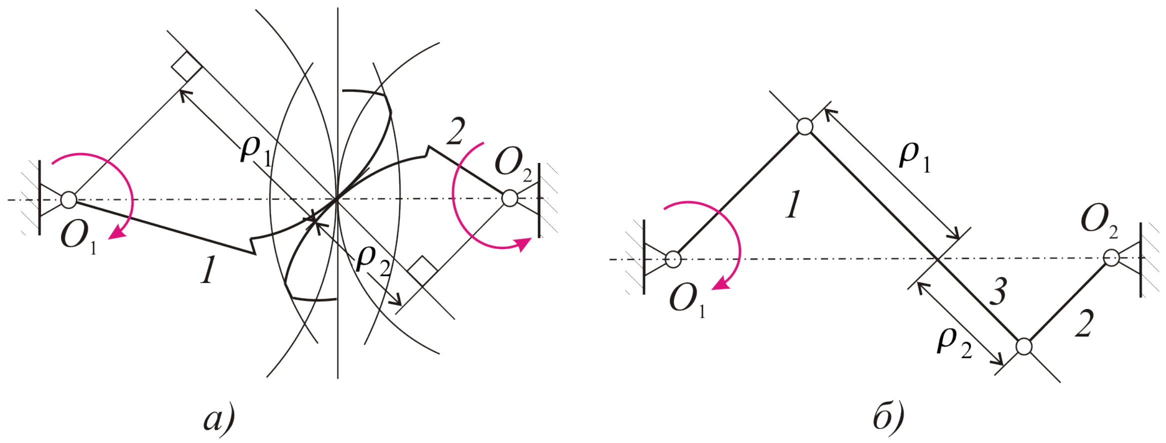


Рис. 2.23. Замена высшей пары низшей (пример 5): *а*) основной механизм (зубчатая пара); *б*) заменяющий механизм: ρ_1 и ρ_2 - радиусы, проведённые из центров кривизн поверхностей *1* и *2*

2.1.8. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Основы структурной классификации применительно к плоским рычажным механизмам были разработаны русским ученым Л.В. Ассуром, дополнены и развиты И.И. Артоболевским, Н.Г. Бруевичем, В.В. Добровольским и др.

В основу классификации механизмов положен *принцип образования механизмов*, заключающийся в следующем:

любой механизм может быть образован путем последовательного присоединения (наслоения) к начальному звену и стойке кинематических цепей, называемых структурными группами (группами Ассура).

Структурной группой, *или группой Ассура,* называют открытую кинематическую цепь, которая после присоединения ее свободными элементами к стойке обладает нулевой подвижностью и не распадается на более простые кинематические цепи, удовлетворяющие этому условию.

Для плоских кинематических цепей пары IV класса могут быть заменены на пары V класса (вращательные и поступательные), и тогда структурная формула будет:

$$W_{гр}=3n-2p_5=0,$$

или

$$3n-2p_5=0.$$

В группе Ассура число пар V класса должно быть в 3/2 раза больше числа n – подвижных звеньев.

Сочетание кинематических пар и числа звеньев в группах будет следующим:

Таблица 2.2

К классификации механизмов

n	2	4	6	8
p_5	3	6	9	12

Простейшей группой будет сочетание двух подвижных звеньев и трех кинематических пар V класса (n=2, P_5=3), эта группа получила название двухповодковой группы *II класса 2 порядка*.

Номер класса группы определяется числом кинематических пар, образующих наиболее сложный замкнутый контур.

Порядок группы определяется количеством ее свободных элементов, т.е. числом ее мест присоединения.

Модификация групп II класса 2 порядка

Существует 5 видов двухповодковых групп (рис. 2.24).

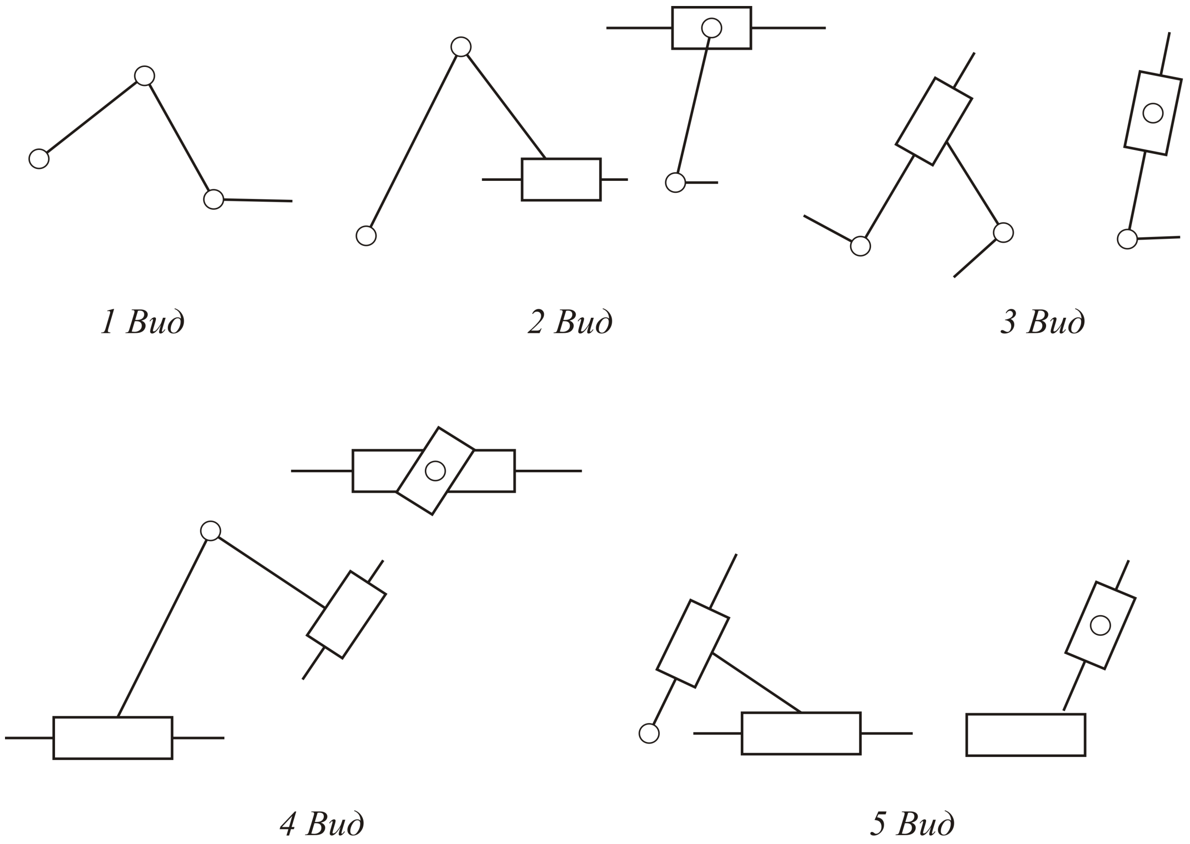
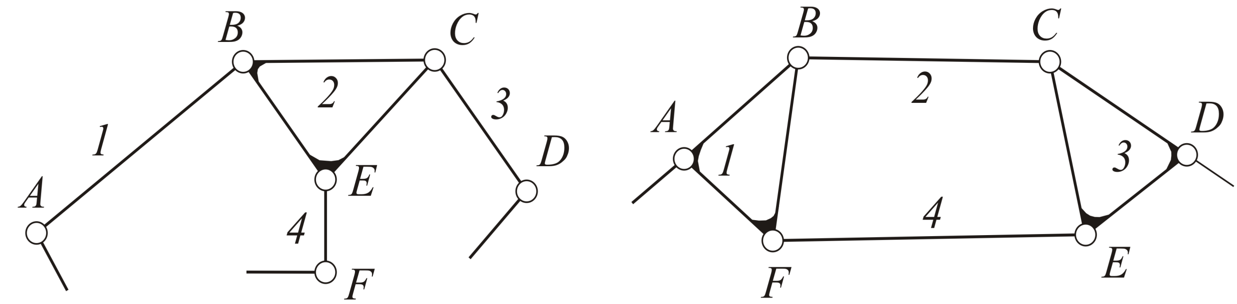


Рис. 2.24. Виды двухповодковых групп

Более сложные группы показаны на рис 2.25.



B, *C*, *D* - *внутренние пары*
III класса 3 порядка
(n=4; P_5=6)

B, *C*, *D*, *F* - *внутренние пары*
IV класса 2 порядка
(n=4; P_5=6)

Рис. 2.25. Группы *III* и *IV* класса

Класс группы Ассура выше второго определяется числом внутренних кинематических пар, образующих так называемый исходный контур (рис. 2.26).

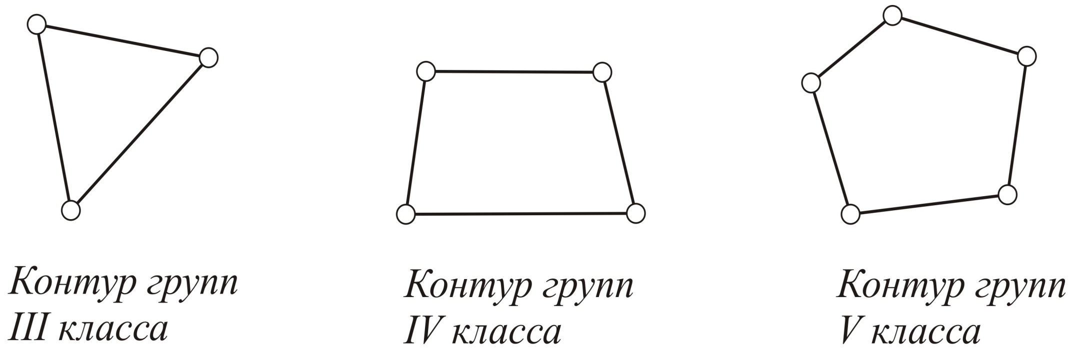


Рис. 2.26. Контуры групп Ассура

Из приведенного выше следует:

а) *класс группы Ассура* определяется классом наивысшего замкнутого контура;

б) *порядок группы Ассура* определяется числом свободных поводков, при помощи которых она присоединяется к звеньям механизма;

в) класс и порядок механизма определяются классом и порядком наиболее сложной группы, входящей в этот механизм.

Входное звено с одной кинематической парой.

Входное звено с одной кинематической парой, вращательное или поступательное, называется *начальным механизмом или механизмом I класса* (рис. 2.27).

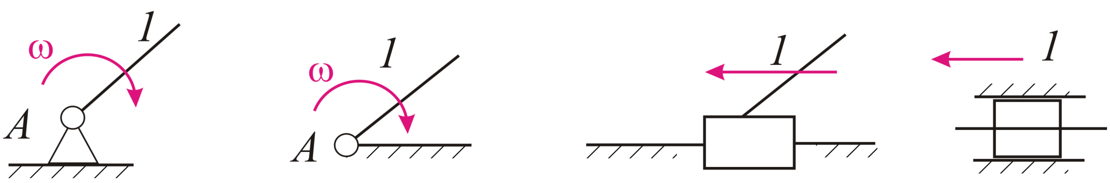


Рис. 2.27. Начальные механизмы

Большинство плоских рычажных механизмов, нашедших распространение в машиностроении, относится к механизмам, включающим в себя структурные группы *II* класса 2-го порядка, реже – группы более высоких классов.

Последовательность структурного анализа механизмов:

1. Удалить из кинематической схемы механизма избыточные (пассивные) связи;

2. Построить структурную схему механизма, строго соблюдая последовательность соединения звеньев;

3. Если степень подвижности механизма $W=1$, то выделяют на структурной схеме один механизм *1*-го класса или начальный механизм (кривошип, соединенный со стойкой), обводя его замкнутым контуром (при $W=k$ необходимо выделить k начальных механизмов);

4. Разложить полученную кинематическую цепь на структурные группы,

обводя их замкнутым контуром;

5. Записать формулу строения механизма и определить класс и порядок механизма, который определяется классом и порядком наиболее сложной группы, входящей в этот механизм.

Пример 2.1

Произвести структурный анализ механизма газораспределения двигателя внутреннего сгорания (рис. 2.28).

1. Определим степень подвижности механизма:

$$W=3n-2p_5-p_4,$$

где $n=4$ – число подвижных звеньев; $p_{5вр.}=3$ – вращательные пары (*А,С,Д*); $p_{5пост.}=1$ – поступательная пара (*F*); $p_4=2$ – высшие пары (*B* и *E*).
$W=3\cdot4-2\cdot4-2=2(?)$.

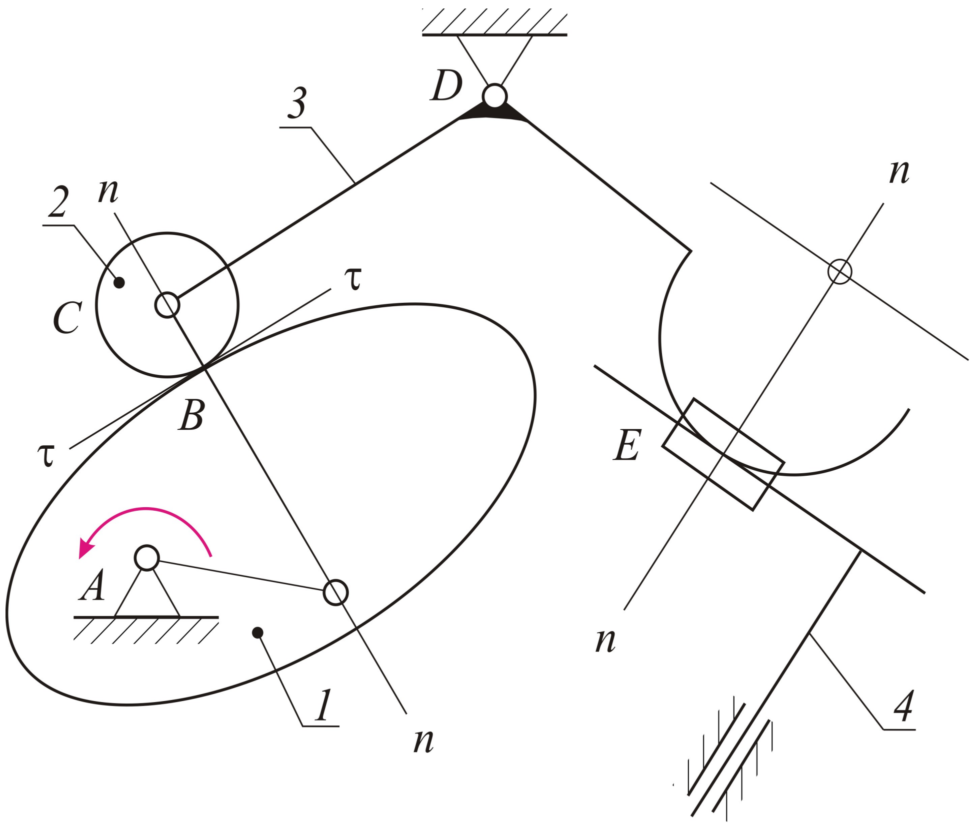


Рис. 2.28. Схема механизма газораспределения (пример 2.1)

Если $W=2$, должно быть два входных звена, на самом же деле достаточно одного вращения кулачка (*1*). Это несоответствие вызвано наличием шарнира C – лишней степенью свободы. Не будь пары C, характер движения звена *3* не изменился бы, поэтому надо считать $W=1$, а не 2 (число подвижных звеньев в этом случае считать не 4, а 3 и $p_5=3$).

Произведем замену высших пар *IV* класса на пары *V* класса и построим заменяющий механизм (рис. 2.29).

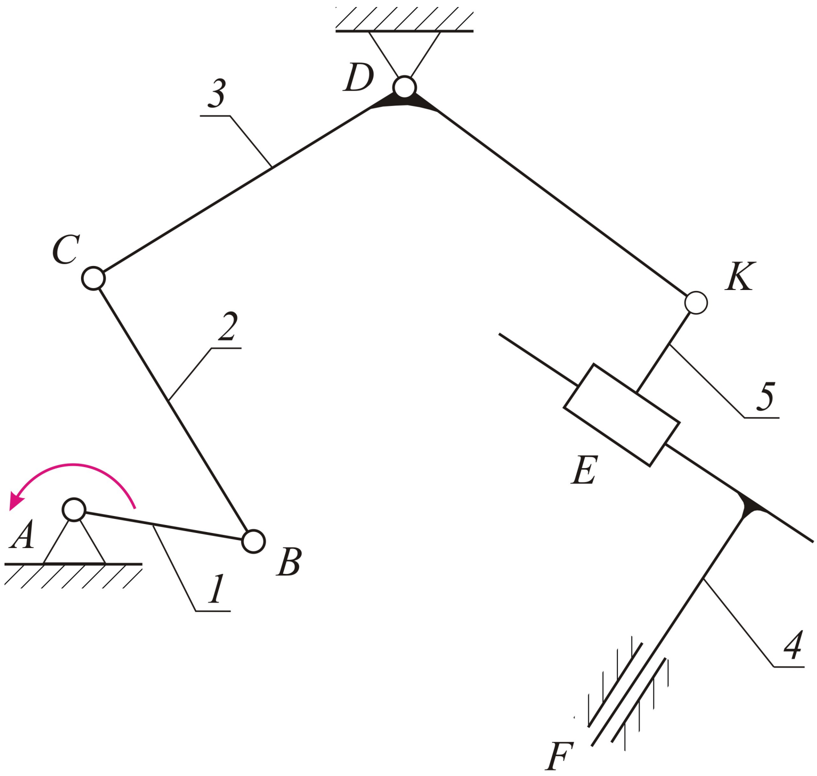


Рис. 2.29. Заменяющий механизм

Определим степень подвижности заменяющего механизма:

$$W = 3n - 2p_5,$$

где $n = 5$; $p_{5вр.} = 5$; $p_{5пост.} = 2$; $p_4 = 0$.

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Расчленение начнем с группы II класса 2 порядка, наиболее удаленных от входного звена. Вероятно, это будут *4* и *5* звенья и пары K, E и F (группа 5 вида).

Проверим степень подвижности оставшейся группы:

$n = 3$; $p_{5вр.} = 4$, тогда $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$, следовательно, выделение произведено верно.

Выделим группу звеньев *2* и *3* с парами B, C и $Д$ – это группа II класса 2 порядка (группа 1 вида).

Осталось одно входное звено с парой A.

Вот так произошло расчленение: в этом механизме две структурные группы II класса 2 порядка, входное звено I.

Весь механизм II класса 2 порядка (рис. 2.30).

Формула строения механизма: $I(1{,}0) \rightarrow II(2{,}3) \rightarrow II(4{,}5)$.

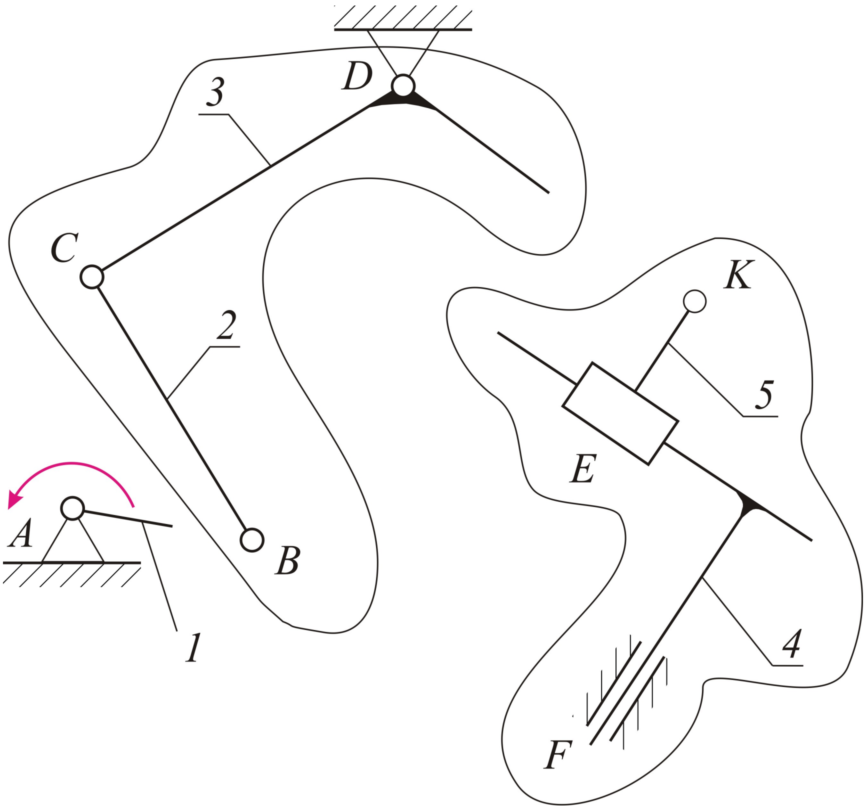


Рис. 2.30. Расчленение механизма на структурные группы

В формуле строения механизма римскими цифрами обозначают класс структурной группы, а в скобках указывают номера звеньев, образующих эту группу. Эта формула определяет строение механизма и означает первоначальное звено *1* с парой *A*, к этому звену была присоединена группа *2-3*, при этом элементом *B* вращательной пары группа присоединилась к первому звену, а элементом вращательной пары *Д* - к стойке. Далее к развитию звена *3* была присоединена группа *5-4*, при этом элементом вращательной пары *K* группа присоединилась к звену *3,* а элементом поступательной пары *F* звена *4* присоединилась к стойке.

На основании структурного анализа делаем вывод о том, что исследуемый механизм является механизмом *II* класса 2 порядка, определяемый наиболее сложной группой Ассура, входящей в его состав.

2.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

2.2.1. ЗАДАЧИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

При анализе кинематических параметров системы применимы уже изученные нами законы и методы кинематики.

Задачами кинематического анализа являются: положения всех звеньев или их точек в пространстве; скорости точек звеньев и угловые скорости звеньев; ускорения точек звеньев и угловые ускорения звеньев.

Все эти параметры определяются векторными величинами, т.е.

математическое описание осуществляется векторными соотношениями, в результате решения которых могут быть получены требуемые параметры.

Существуют такие методы кинематического анализа:

- ✔ аналитический;
- ✔ векторно-графический;
- ✔ графический;
- ✔ экспериментальный.

Кинематический анализ плоского рычажного механизма включает в себя:

- выбор, назначение и использование масштабов скоростей и ускорений;
- построение плана скоростей и чтение его;
- определение величины и направление линейной скорости любой точки механизма по плану скоростей;
- определение величины и направление угловой скорости любого звена механизма;
- построение плана ускорения;
- определение величины и направления абсолютного, нормального и касательного ускорения любой точки механизма по плану ускорений;
- определение величины и направления углового ускорения любого звена механизма по плану ускорений.

В данном пособии рассматривается векторно-графический метод (метод планов и ускорений).

2.2.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЁХЗВЕННИКА

Рассмотрим схему шарнирного четырёхзвенника (рис. 2.31, *а*)

Исходными данными для кинематического анализа являются:

- геометрическая схема механизма;
- угловая скорость начального звена $\omega_1 = const$, c^{-1};
- угловое ускорение начального звена $\varepsilon_1 = 0$, c^{-2}.

Формула строения механизма (структурная формула) выглядит следующим образом:

$$I(0;1) \rightarrow II(2;3). \tag{2.7}$$

Число степеней свободы определяется формулой Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1. \tag{2.8}$$

Кинематический анализ приводим в соответствии с формулой строения механизма.

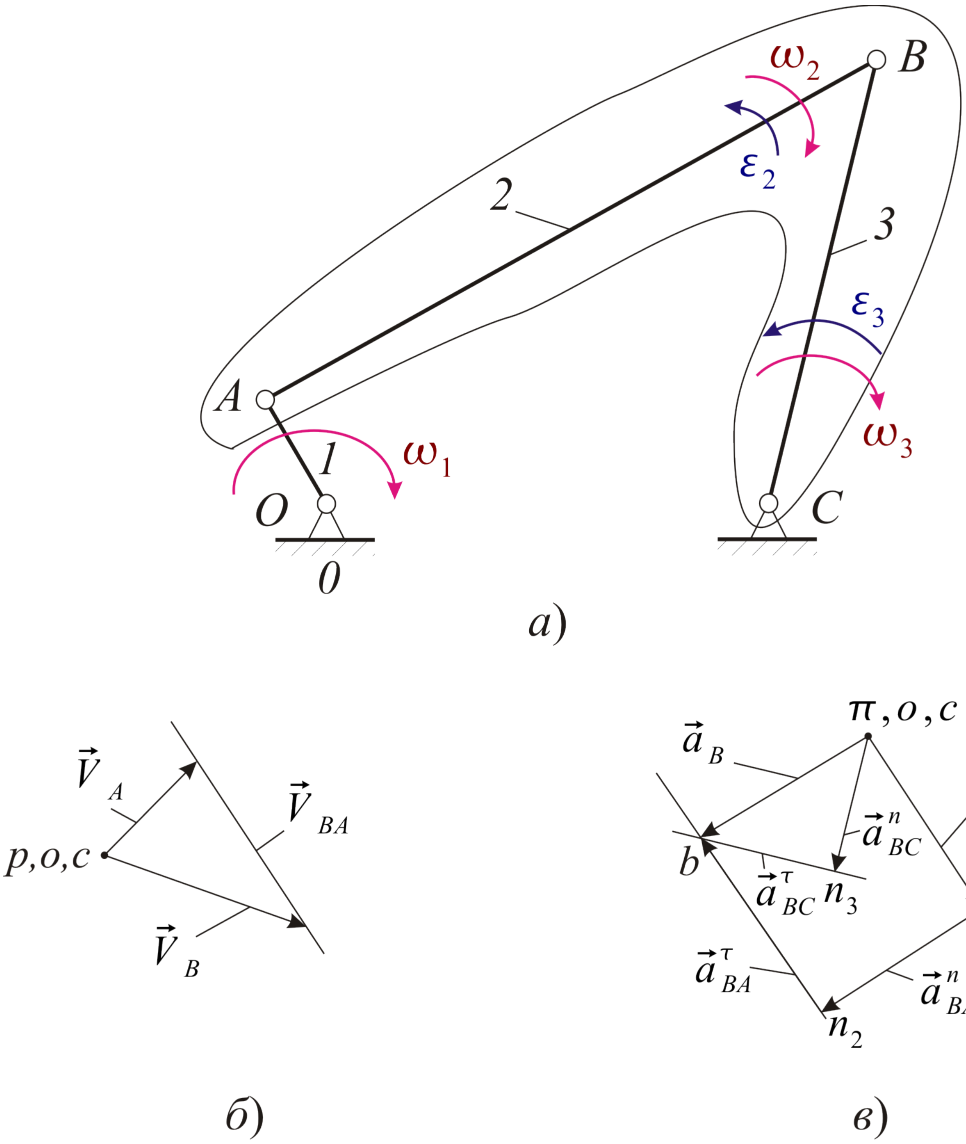


Рис. 2.31. Механизм шарнирного четырёхзвенника: *а*) кинематическая схема (0- стойка, 1-кривошип, 2- шатун, 3-коромысло); *б*) план скоростей; *в*) план ускорений

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев.

Расчёт начального звена *I(0;1)*. Определим скорость точки A из выражения:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}, \ \frac{м}{c}. \tag{2.9}$$

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно к звену OA в сторону вращения кривошипа *1*.

Выбираем масштабный коэффициент для построения планов скоростей μ_V из отношения:

$$\mu_V = \frac{\text{истинная скорость точки}}{\text{изображаемая скорость точки}} = \frac{V_A}{pa}, \ \ \frac{м/c}{мм}, \tag{2.10}$$

где p - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана скоростей, рис. 2.31, *б*). Откладываем вектор скорости точки $A\,(\vec{pa})$ в выбранном масштабе μ_V.

Расчёт группы $II\,(2\,;3)$.

Для определения скорости точки B составим систему векторных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ \vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC} \end{cases}. \tag{2.11}$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.11). Скорость точки $A\,(\vec{V}_A)$ определена ранее. Относительная скорость $(\vec{V}_{BA})$ направлена перпендикулярно звену *2* и поэтому на плане скоростей (рис. 2.31, *б*) из точки b отложим прямую перпендикулярно звену *2*.

Рассмотрим вторую часть системы (2.11). Так как скорость точки C равна нулю, помещаем её в полюс плана скоростей (рис. 2.31, *б,* точка *с*). Из этой точки C откладываем вектор относительной скорости $\vec{V}_{BC}$, перпендикулярный звену *3*.

На пересечении относительных скоростей $\vec{V}_{BA}$ и $\vec{V}_{BC}$ получаем точку b (рис. 2.31, *б*), которая является искомой. Соединяем её с полюсом p и получаем вектор $\vec{pb}$. Для получения величины скорости точки B используем выражение:

$$V_B = pb \cdot \mu_V, \ \frac{м}{с}. \tag{2.12}$$

Определим величины и направления угловых скоростей звеньев *2* и *3*, используем выражения:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{BA}} = \frac{ba \cdot \mu_V}{l_{BA}}, \ c^{-1}. \tag{2.13}$$

$$\omega_3 = \frac{V_{BC}}{l_{BC}} = \frac{bc \cdot \mu_V}{l_{BC}}, \ c^{-1}. \tag{2.14}$$

Для определения направлений ω_2 и ω_3 необходимо перенести векторы относительных скоростей $\vec{V}_{BA}$ и $\vec{V}_{BC}$, изображённых на планах скоростей (рис. 2.31, *б*, $\vec{ab}$ и $\vec{cb}$), в точку B, и стрелки этих векторов покажут направление ω_2 и ω_3.

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Расчёт начального звена $I\,(0\,;1)$.

Определим ускорение точки A из выражения:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}, \ \frac{м}{с^2}. \tag{2.15}$$

Данные ускорения направлены к центру вращения кривошипа *1*.

Выбираем масштабный коэффициент для построения планов ускорений из выражения:

$$\mu_a = \frac{\text{истинное ускорение точки}}{\text{изображаемое ускорение точки}} = \frac{a_A}{\pi a}, \ \frac{м/с^2}{мм}, \tag{2.16}$$

где π - произвольная точка, выбранная в качестве полюса планов ускорений.

Откладываем вектор ускорения точки $A(\vec{\pi a})$ в выбранном масштабе μ_a (рис. 2.31, *в*).

Расчёт группы $II(2;3)$.

Для определения ускорения точки B составим систему векторных уравнений

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n = \vec{a}_{BA}^\tau \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n = \vec{a}_{BC}^\tau \end{cases}. \tag{2.17}$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.17). Ускорение точки $A - \vec{a}_A$, определено ранее. Нормальное ускорение $\vec{a}_{BA}^n$ определим из выражения:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{BA}, \ \frac{м}{с^2}. \tag{2.18}$$

Направлено это ускорение от точки B к A.

Вектор $a\vec{n}_2$ откладываем на плане ускорений от точки a в направлении от B к A (см. рис. 2.31, *в*). Вектор ускорения $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлен перпендикулярно к звену *2*, который откладываем от точки n_2.

Рассмотрим вторую часть системы (2.17).

Ускорение плана C равно нулю. Помещаем её в полюс плана ускорений (см. рис. 2.31, *в*, точка *с*). Из этой точки откладываем вектор нормального ускорения $\vec{a}_{BC}^n$, который определяется из выражения:

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC}, \ \frac{м}{с^2}. \tag{2.19}$$

Направлено это ускорение от B к C. Величина a_{BC}^n определяется из выражения:

$$cn_3 = \frac{a^n_{BC}}{\mu_a}, \text{ мм}. \qquad (2.20)$$

Вектор $\vec{a}^n_{BC}$ откладываем на плане ускорений от точки c (cn_3, см. рис. 2.31, *в*). Вектор $\vec{a}^\tau_{BC}$ направлен перпендикулярно звену *3*, который откладывается от точки n_3.

На пересечении линий $\vec{a}^\tau_{BA}$ и $\vec{a}^\tau_{BC}$ получаем искомую точку b, которую соединяем с полюсом π и получаем вектор $\vec{\pi b}$.

Истинное значение ускорения точки B равно:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a, \ \frac{м}{с^2}. \qquad (2.21)$$

Для определения величины угловых ускорений используем выражения:

$$\varepsilon_2 = \frac{a^\tau_{BA}}{l_{BA}} = \frac{n_2 b \cdot \mu_a}{l_{BA}}, \ с^{-2}. \qquad (2.22)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a^\tau_{BC}}{l_{BC}} = \frac{n_3 b \cdot \mu_a}{l_{BC}}, \ с^{-2}. \qquad (2.23)$$

Для определения направлений ε_2 и ε_3 необходимо перенести векторы тангенциальных ускорений $\vec{a}^\tau_{BA}$ и $\vec{a}^\tau_{BC}$, изображённых на плане ускорений (см. рис. 2.31, *в*), в точку B, и стрелки этих векторов покажут направления угловых ускорений ε_2 и ε_3.

2.2.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА

Рассмотрим схему кривошипно-шатунного механизма (рис. 2.32). Исходными данными для кинематического анализа являются:

- ✔ геометрическая схема механизма;
- ✔ угловая скорость начального звена $\omega_1 = const$, $с^{-1}$;
- ✔ угловое ускорение начального звена $\varepsilon_1 = 0$.

Формула строения механизма (структурная формула) выглядит следующим образом:

$$I(0;\ 1) \rightarrow II(2;\ 3). \qquad (2.24)$$

Число степеней свободы определяется формулой Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1. \qquad (2.25)$$

Кинематический анализ проводим в соответствии с формулой строения механизма.

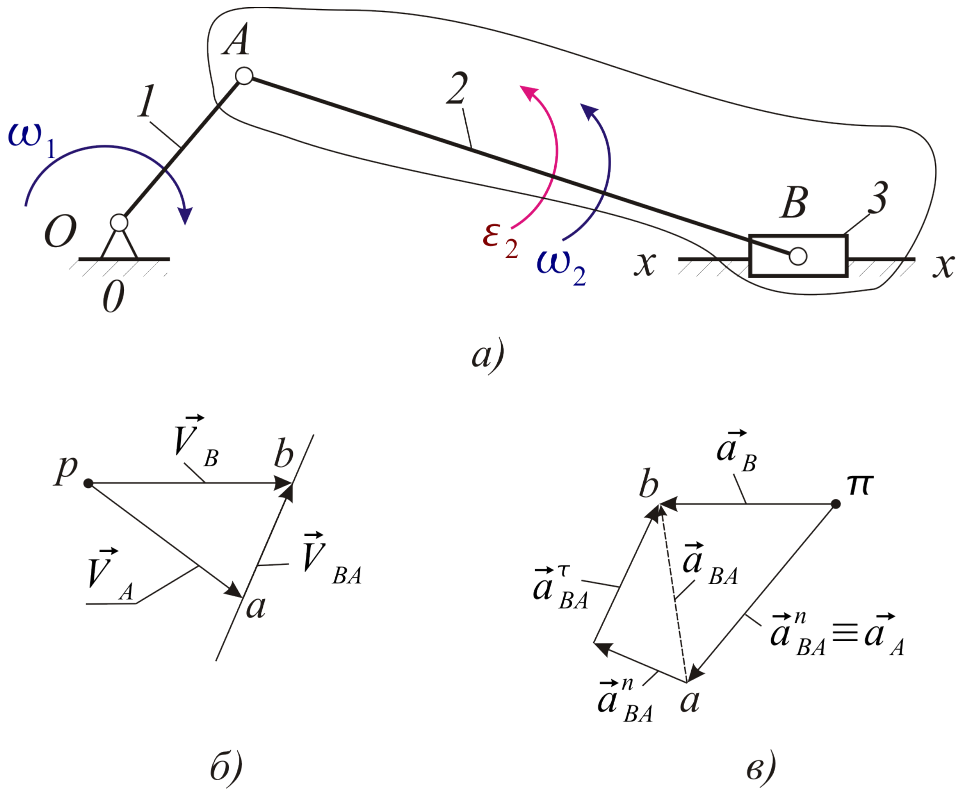


Рис. 2.32. Кривошипно-ползунный механизм: *а*) кинематическая схема: *0* - стойка, *1* - кривошип, *2* - шатун, *3* - ползун; *б*) план скоростей; *в*) план ускорений

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев.

Расчёт начального звена $I(0;1)$.

Определим скорость точки A из выражения:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{oA}, \ \frac{м}{с}. \tag{2.26}$$

Данная скорость $\vec{V}_A$ направлена перпендикулярна к звену OA в сторону вращения кривошипа *1*.

Выбираем масштабный коэффициент μ_V для построения планов скоростей из выражения:

$$\mu_V = \frac{\text{истинная скорость точки}}{\text{изображаемая скорость точки}} = \frac{V_A}{pa}, \ \frac{м/с}{мм}, \tag{2.27}$$

где p - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана скоростей (см. рис. 2.32, *б*).

Откладываем вектор скорости точки $A(\vec{pa})$ в выбранном масштабе μ_V.

Расчёт группы $II(2;3)$.

Для определения скорости точки B составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ V_B \to (x-x) \end{cases}. \qquad (2.28)$$

Данную систему решаем графически.

Рассмотрим первую часть системы (2.28). Скорость точки $A(V_A)$ определена ранее. Относительная скорость $\vec{V}_{BA}$ направлена перпендикулярно звену *2*, и поэтому на плане скоростей (см. рис. 2.32, *б*) из точки b отложим прямую, перпендикулярно звену *2*.

Рассмотрим вторую часть системы (2.28). Движение точки B ограничено направляющей $(x-x)$, поэтому на плане скоростей (см. рис. 2.32, *б*) через полюс проводим горизонтальную прямую, соответствующую направлению $(x-x)$.

На пересечении относительной скорости V_{BA} и $(x-x)$ получаем точку b (см. рис. 2.32, *б*), которая является искомой. Соединяем её с полюсом p и получаем вектор $\vec{pb}$. Для получения величины скорости точки B используем выражение:

$$\vec{V}_B = pb \cdot \mu_V, \ \text{мм}. \qquad (2.29)$$

Определим величину угловой скорости звена *2*, используя выражение:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{BA}} = \frac{pb \cdot \mu_V}{l_{BA}}, \ c^{-1}. \qquad (2.30)$$

Для определения направления ω_2 необходимо перенести вектор относительной скорости $\vec{V}_{BA}$, изображённого на плане скоростей (см. рис. 2.32, *б*, $\vec{ab}$), в точку B, и стрелка этого вектора показывает направление ω_2.

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Расчёт начального звена $I(0;1)$.

Определим ускорение точки A из выражения:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}, \ \frac{м}{c^2}. \qquad (2.31)$$

Данное ускорение направлено к центру вращения кривошипа *1* от A к O (см. рис. 2.32, *а*).

Выбираем масштабный коэффициент для построения планов ускорений из выражения:

$$\mu_a = \frac{\text{истинное ускорение точки}}{\text{изображаемое ускорение точки}} = \frac{a_A}{\pi a}, \quad \frac{м/с^2}{мм}. \tag{2.32}$$

где π - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана ускорений.

Откладываем вектор ускорения точки $A(\vec{\pi a})$ в выбранном масштабе μ_a (см. рис. 2.32, *в*).

Расчёт группы $II(2;3)$.

Для определения ускорения точки B составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^\tau_{BA} \\ \vec{a}_B \to (x - x) \end{cases}. \tag{2.33}$$

Данную систему решаем графически.

Рассмотрим первую часть системы (2.33). Ускорение точки A определено ранее. Нормальное ускорение a^n_{BA} определим из выражения:

$$a^n_{BA} = \omega_1^2 \cdot l_{BA}, \quad \frac{м}{с^2}. \tag{2.34}$$

Направлено это ускорение от точки B к A.

Величина an_2, изображаемая на плане ускорений (см. рис. 2.32, *в*) равна:

$$an_2 = \frac{a^n_{BA}}{\mu_a}, \quad мм. \tag{2.35}$$

Вектор $\vec{an}_2$ откладываем на плане ускорений от точки *а* (см. рис. 2.32, *в*) в направлении от B к A.

Вектор ускорения $\vec{a}^\tau_{BA}$ направлен перпендикулярно к звену *2*, который откладываем от точки n_2.

Рассмотрим вторую часть системы (2.35). Движение точки B ограничено направляющей $(x - x)$, поэтому на плане ускорений (см. рис. 2.32, *в*) через полюс проводим горизонтальную прямую, соответствующую направлению $(x - x)$.

На пересечении тангенциальной составляющей a^τ_{BA} и $(x - x)$ получаем точку b (см. рис. 2.32, *в*), которая является искомой.

Истинное значение ускорения точки B равно:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a, \quad \frac{м}{с^2}. \tag{2.36}$$

Для определения величины углового ускорения используем выражение:

$$\varepsilon_2 = \frac{a^{\tau}_{BA}}{l_{BA}} = \frac{n_2 b \cdot \mu_a}{l_{BA}}, \ \ c^{-2}. \tag{2.37}$$

Для определения направления ε_2 необходимо перенести вектор тангенциального ускорения a^{τ}_{BA}, изображённого на плане ускорений (см. рис. 2.32, *в*), в точку B, и стрелка этого вектора покажет направление ε_2.

2.2.4. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КУЛИСНОГО МЕХАНИЗМА

Рассмотрим схему кулисного механизма (рис. 2.33).

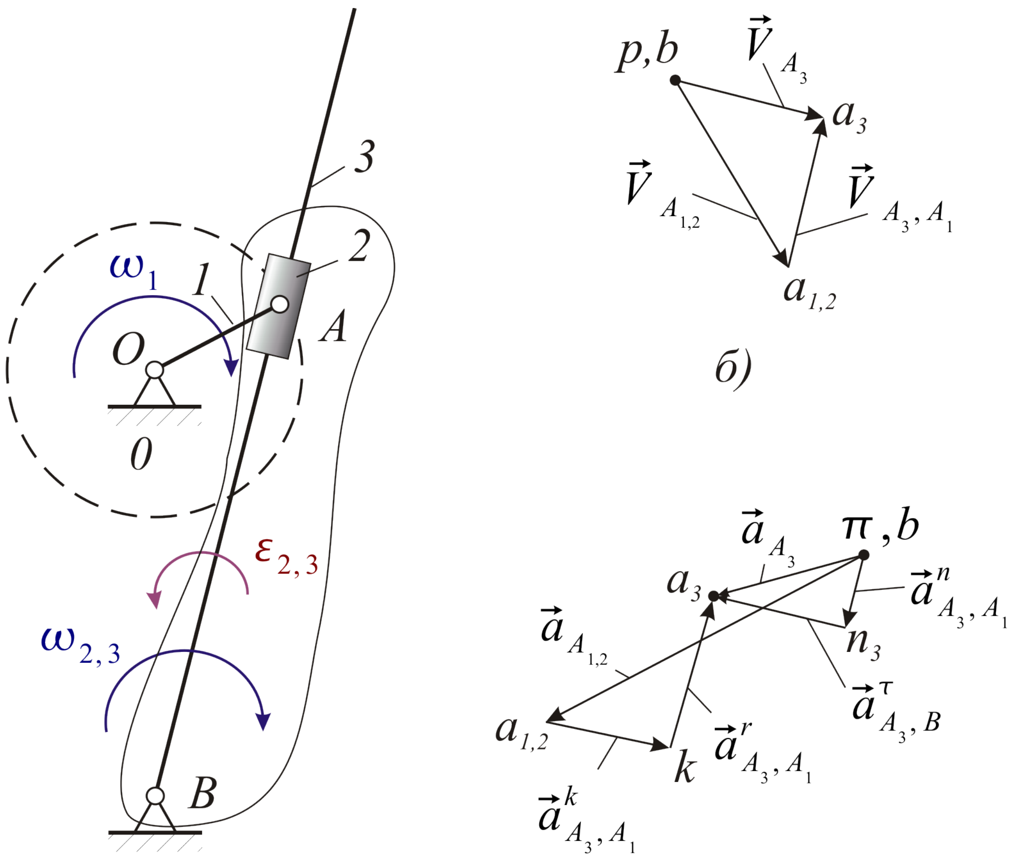


Рис. 2.33. Кулисный механизм: *а*) кинематическая схема: *0*-стойка, *1*-кривошип, *2*-ползун (кулисный камень), 3-кулиса; *б*) план скоростей; *в*) план ускорений

Исходными данными для кинематического анализа являются:

- ✔ геометрическая схема механизма;
- ✔ угловая скорость начального звена $\omega_1 = const$, c^{-1};
- ✔ угловое ускорение начального звена $\varepsilon_1 = 0$, c^{-2}.

Формула строения механизма (структурная формула) выглядит следующим образом:

$$I(0;1) \rightarrow II(2;3). \tag{2.38}$$

Число степеней свободы определяется формулой Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1. \tag{2.39}$$

Кинематический анализ проводим в соответствии с формулой строения механизма.

Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев.

Расчёт начального звена $I(0;1)$.

Определим скорость точки A. Точка A в кулисном механизме, см. рис. 2.33, *а*), является «тройной», так как принадлежит кривошипу $1(A_1)$, кулисному камню $2(A_2)$ и кулисе $3(A_3)$. Кинематические параметры этих точек различны. Скорости точек A_1 и A_2 равны и определяются из выражения:

$$V_{A_1} = V_{A_2} = V_{A_{1,2}} = \omega_1 \cdot l_{OA}, \ \frac{м}{с}. \tag{2.40}$$

Данная скорость $V_{A_{1,2}}$ направлена перпендикулярна к звену OA в сторону вращения кривошипа *1*.

Выбираем масштабный коэффициент μ_V для построения планов скоростей из выражения:

$$\mu_V = \frac{\text{истинная скорость точки}}{\text{изображаемая скорость точки}} = \frac{V_{A_{1,2}}}{p a_{1,2}}, \ \frac{м/с}{мм}, \tag{2.41}$$

где p - произвольная точка, выбранная в качестве полюса плана скоростей (см. рис. 2.33, *б*).

Откладываем вектор скорости точки $A_{1,2}(p\vec{a}_{1,2})$ в выбранном масштабе μ_V.

Расчёт группы $II(2;3)$.

Для определения скорости точки A_3 составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_{1,2}} + \vec{V}_{A_3 A_{1,2}} \\ \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{A_3 B} \end{cases}. \tag{2.42}$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.42). Скорость точки $A_{1,2}(\vec{V}_{A_{1,2}})$ определена ранее. Относительная скорость $\vec{V}_{A_3 A_{1,2}}$ направлена в соответствии с движением кулисного камня (параллельно кулисе), и поэтому на плане скоростей (см. рис. 2.33, *б*) из точки $a_{1,2}$ проведем прямую, параллельную кулисе *3*.

Рассмотрим вторую часть системы (2.42). Так как скорость точки B равна нулю, помещаем её в полюс плана скоростей (см. рис. 2.33, *б*, точка *b*). Из этой точки b откладываем вектор относительной скорости $\vec{V}_{A_3 B}$, перпендикулярный звену *3*. На пересечении относительных скоростей $\vec{V}_{A_3 A_{1,2}}$ и $\vec{V}_{A_3 B}$ получаем точку a_3 (см. рис. 2.33, *б*), которая является искомой. Соединяем её с полюсом p и получаем вектор $\vec{pa_3}$. Для получения величины скорости точки A_3 используем выражение:

$$V_{A_3} = p a_3 \cdot \mu_V, \ \frac{м}{с}. \tag{2.43}$$

Определим величины угловых скоростей звеньев *2* и *3*, используя выражение:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_{A_3 B}}{l_{AB}} = \frac{p a_3 \cdot \mu_V}{l_{AB}}, \ c^{-1}. \tag{2.44}$$

Для определения направления ω_2, ω_3 и необходимо перенести вектор относительной скорости $\vec{V}_{A_3 B}$, изображённый на плане скоростей (см. рис. 2.33, *б*, $\vec{pa_3}$), в точку A, и стрелка этого вектора покажет направление ω_2, ω_3.

Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.

Расчёт начального звена $I(0;1)$. Определим ускорение точки $A_{1,2}$ из выражения:

$$a A_1 = a_{A_2} = a_{A_{1,2}} = \omega_1^2 \cdot l_{OA}, \ \frac{м}{с^2}. \tag{2.45}$$

Данное ускорение направлено к центру вращения кривошипа *1* (см. рис. 2.33, *в*). Выбираем масштабный коэффициент для построения планов ускорений из выражения:

$$\mu_a = \frac{\text{истинное ускорение точки}}{\text{изображаемое ускорение точки}} = \frac{a_{A_{1,2}}}{\pi a_{1,2}}, \ \frac{м/с^2}{мм}, \tag{2.46}$$

где π - произвольная точка, выбранная в качестве полюса планов ускорений.

Откладываем вектор ускорения точки $A_{1,2}$ $(\pi \vec{a}_{1,2})$ в выбранном масштабе μ_a (см. рис. 2.33, *в*).

Расчёт группы $II(2;3)$.

Для определения ускорения точки A_3 составим систему векторных выражений:

$$\begin{cases} \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_{1,2}} + \vec{a}^{k}_{A_3 A_{1,2}} + \vec{a}^{r}_{A_3 A_{1,2}} \\ \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_B + \vec{a}^{n}_{A_3 B} + \vec{a}^{\tau}_{A_3 B} \end{cases}. \tag{2.47}$$

Данную систему решаем графически. Рассмотрим первую часть системы (2.47). Ускорение точки $A_{1,2}$ определено ранее. Кориолисово ускорение $\vec{a}^{k}_{A_3 A_{1,2}}$ найдём из выражения:

$$a^{k}_{A_3 A_{1,2}} = 2\omega_2 \cdot V_{A_3 A_{1,2}}, \ \frac{м}{c^2}. \tag{2.48}$$

Направлено это ускорение по правилу Жуковского (вектор относительной скорости $\vec{V}_{A_3 A_{1,2}}$ переносим в точку A (см. рис. 2.33, *а*) и поворачиваем в сторону вращения кулисы по часовой стрелке на 90° $a_{1,2}k$).

Величина $\vec{a}^{k}_{A_3 A_{1,2}}$, изображаемая на плане ускорений (см. рис. 2.33, *в*), равна:

$$a_{1,2}k = \frac{a^{k}_{A_3 A_{1,2}}}{\mu_a}, \ мм. \tag{2.49}$$

Вектор $\overrightarrow{a_{1,2}k}$ откладываем на плане ускорений от точки a (см. рис. 2.33, *в*) в направлении, перпендикулярном кулисе *3*. Вектор относительного ускорения $\vec{a}^{r}_{A_3 A_{1,2}}$ направлен параллельно звену *3*, который откладываем от точки *k*.

Рассмотрим вторую часть системы (2.47).

Ускорение точки B равно нулю. Помещаем её в полюс плана ускорений (см. рис. 2.33, *в*, точка *b*). Из этой точки откладываем вектор нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{A_3 B}$, который определяется из выражения:

$$a^{n}_{A_3 B} = \omega_3^2 \cdot l_{AB}, \ \frac{м}{c}. \tag{2.50}$$

Направлено это ускорение от A к *B*. Величина bn_3 определяется из выражения:

$$bn_3 = \frac{a^{n}_{A_3 B}}{\mu_a}, \ мм. \tag{2.51}$$

Вектор bn_3 откладываем на плане ускорений от точки b (bn_3 см. рис. 2.33, *в*). Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{A_3 B}$ направлен перпендикулярно звену *3*, который откладывается от точки n_3. На пересечении линий $\vec{a}^{r}_{A_3 A_{1,2}}$ и $\vec{a}^{\tau}_{A_3 B}$ получаем искомую точку b, которую соединяем с полюсом π и получаем вектор $\pi\vec{a}_3$.

Истинное значения ускорения точки A_3 равно:

$$a_{A_3} = \pi a_3 \cdot \mu_a, \quad \frac{м}{c^2}. \qquad (2.52)$$

Для определения величины угловых ускорений используем выражения:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a^{\tau}_{A_3B}}{l_{AB}} = \frac{n_3 a_3 \cdot \mu_a}{l_{AB}}, \quad c^{-2}. \qquad (2.53)$$

Для определения направлений $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ необходимо перенести вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{A_3B}$, изображённый на плане ускорений (рис. 2.33, *в*, $n_3\vec{a}_3$), в точку A, и стрелки этих векторов покажут направления $\varepsilon_2, \varepsilon_3$, которые направлены против часовой стрелки.

2.3. ПЕРЕДАЧИ

2.3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕДАЧАХ

Передачами называются различного рода механизмы, которые передают движение от источника к исполнительным органам машины.

Передачи бывают самого разнообразного вида, но в технике больше всего нашли применение передачи для преобразования и передачи вращательного движения. Процесс передачи вращения может происходить путём использования силы трения (фрикционные передачи) или прямым контактом твердых тех, т.е. путем зацепления. Такие передачи вращения осуществляются непосредственным касанием ведущего и ведомого звеньев или же путём применения гибкой нити (ремня, ленты, цепи и т.д.).

Различают два типа передач вращения:

- при равномерном вращении ведущего звена ведомое вращается также равномерно;
- при равномерном вращении ведущего колеса ведомое звено вращается неравномерно.

В первом случае самыми распространёнными являются круглые колёса фрикционные (или зубчатые), а также круглые шкивы, осуществляющие передачу при помощи гибкой связи.

Во втором, более редком, случае применяют не круглые колеса (колёса с неполным числом зубьев (зубчатые секторы)), мальтийские кресты и т.п.

Оси валов, между которыми осуществляется передача вращательного движения, могут быть расположены произвольным образом: быть параллельными, пересекаться под любыми углами, скрещиваться.

2.3.2. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

В тех случаях, когда особенно важным является постоянство передаточного отношения $(u_{12}=const)$, применяют зубчатые передачи. Зубчатые передачи получили широкое применение в станкостроительной, автотракторной и ряде других отраслях промышленности.

Зубчатые передачи - одни из самых распространённых видов приводов, т.е. вспомогательных механизмов, включаемых между машиной-двигателем и исполнительной машиной. Строгое постоянство передаточного отношения $u_{12}=const$ важно не только с кинематической, но и с динамической точки зрения. При непостоянстве передаточного отношения $(u_{12}\neq const)$ возникают колебания звеньев, дополнительные динамические нагрузки, шум. Положительными свойствами зубчатых передач является их компактность, долговечность, высокий КПД. К недостаткам зубчатых передач относят сложность изготовления, затраты на ремонт в случае поломки. Передача вращения в зубчатой передаче осуществляется нажатием боковой поверхности зуба ведущего колеса на боковую поверхность зуба ведомого колеса.

Передаточным отношением пары зубчатых колес называется отношение их угловых скоростей:

$$u_{12}=\pm\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{n_1}{n_2}, \tag{2.54}$$

или передаточное отношение равно обратному отношению чисел зубьев этих зубчатых колес:

$$u_{12}=\pm\frac{z_2}{z_1}. \tag{2.55}$$

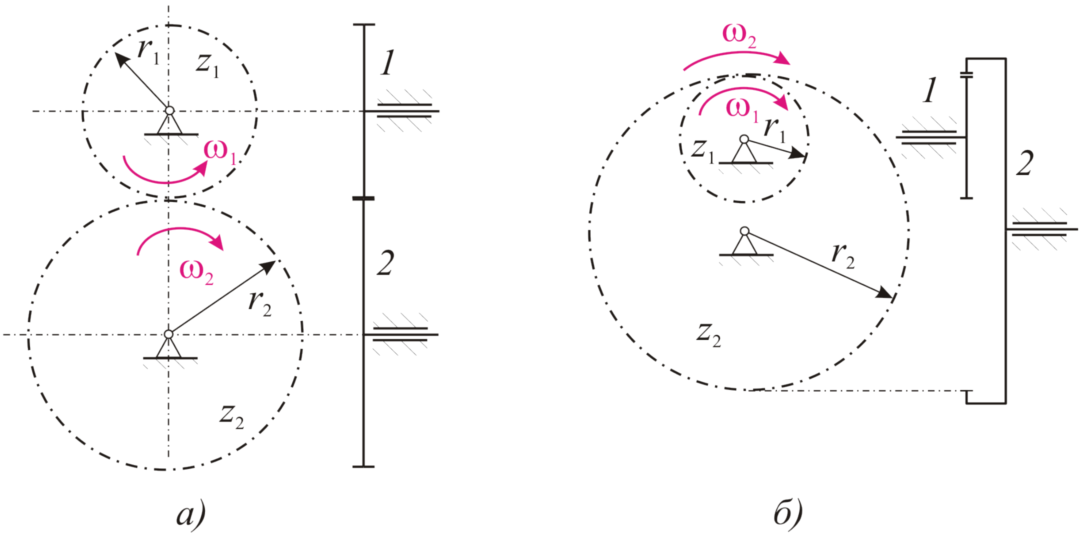


Рис. 2.34. Простейшая зубчатая передача: *а*) с внешним зацеплением; *б*) с внутренним зацеплением

Условно принято считать передаточное отношение отрицательным $(u_{12}<0)$ для пары зубчатых колёс с внешним зацеплением (в этом случае колёса вращаются в противоположные стороны) и принято считать передаточное отношение положительным $(u_{12}>0)$ для пары зубчатых колёс с внутренним зацеплением (колёса в этом случае вращаются в одну и ту же сторону).

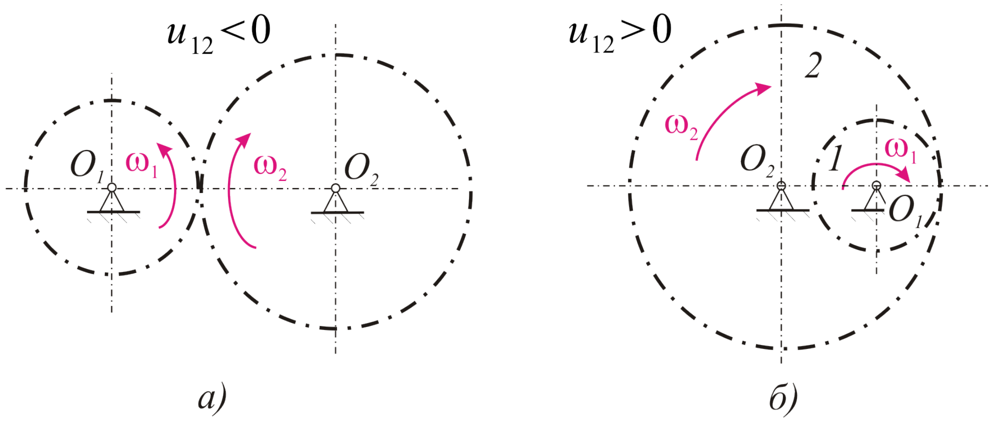


Рис. 2.35. Знак передаточного отношения: *а*) при внешнем зацеплении колёс; *б*) при внутреннем зацеплении колёс

В частном случае, когда радиус второго колеса будет бесконечно большим, это колесо превращается в прямолинейную зубчатую рейку. Такое зацепление называется реечным и служит для преобразования вращательного движения колеса в поступательное движение зубчатой рейки или наоборот.

Представим, что на перекатывающихся друг по другу без скольжения катках радиусами r_1 и r_2 фрикционной передачи закреплены зубчатые венцы. Тогда получим зубчатую передачу, в которой передаточное отношение:

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}. \tag{2.56}$$

Окружности, которые при зацеплении зубчатых колёс перекатываются без скольжения и радиусы которых обратно пропорциональны угловым скоростям, называются *начальными*.

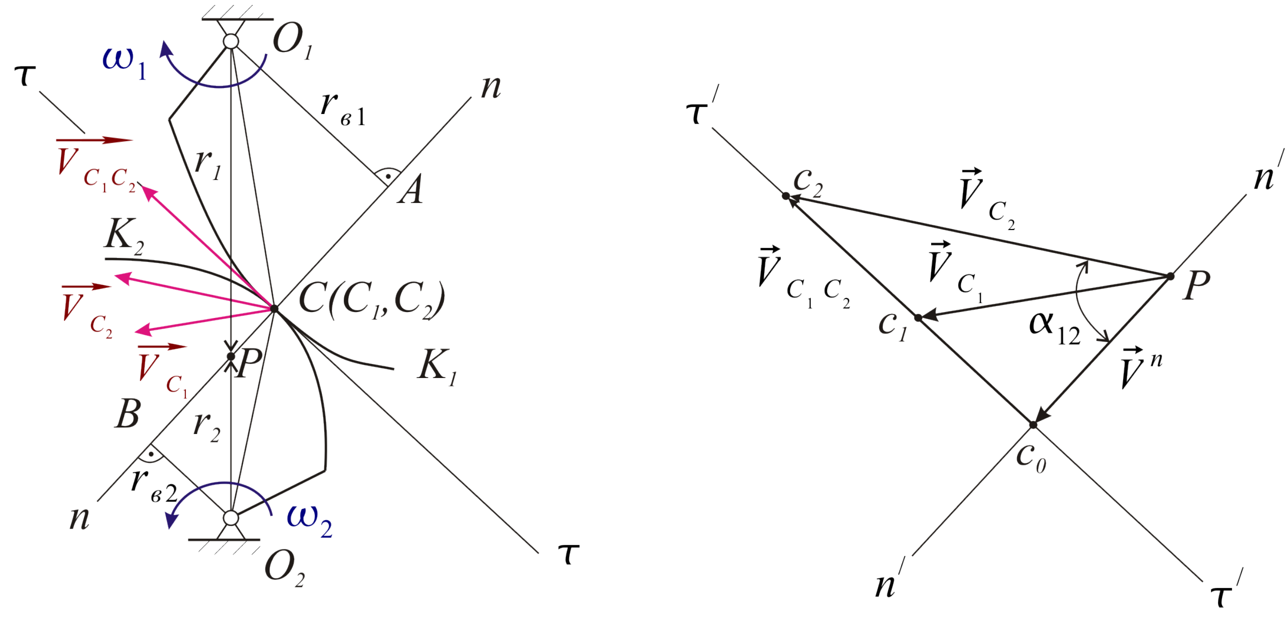
2.3.3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Пусть передача вращения между двумя осями O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 осуществляется посредством взаимоогибаемых кривых K_1 и K_2, принадлежащих звеньям *1* и *2*.

Проведём в точке соприкосновения C кривых K_1 и K_2, нормаль $n-n$ и касательную $\tau-\tau$ к этим кривым.

Скорости точек C_1 и C_2, принадлежащих звеньям *1* и *2*, связаны между собой соотношением [7]:

$$\vec{V}_{C_2}=\vec{V}_{C_1}+\vec{V}_{C_2C_1}.$$



а) *б)*

Рис. 2.36. К теореме зацепления: *а*) геометрия и кинематика зацепления; *б*) план скоростей

Из точек O_1 и O_2 опускаем на нормаль $n-n$ перпендикуляры O_1A и O_2B, а из полюса плана скоростей перпендикуляр pc_0 на направление $\tau^/-\tau^/$. Отрезок pc_0 представляет собой нормальную составляющую $\vec{V}^n$ векторов $\vec{V}_{C_1}$ и $\vec{V}_{C_2}$.
Так как:

$$\left.\begin{aligned}\Delta O_1AC_1 \sim \Delta pc_0c_1\\ \Delta O_2BC_2 \sim \Delta pc_0c_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{pc_0}{pc_1}=\frac{O_1A}{O_1C_1};\quad \frac{pc_0}{pc_2}=\frac{O_2B}{O_2C_2}.$$

Отрезки pc_0, pc_1 и pc_2 представляют собой $\vec{V}^n$, $\vec{V}_{C_1}$ и $\vec{V}_{C_2}$.

Так как $\dfrac{V^n}{V_{C_1}}=\dfrac{O_1A}{O_1C_1}$; $\dfrac{V^n}{V_{C_2}}=\dfrac{O_2B}{O_2C_2}$, отсюда $V^n=V_{C_1}\dfrac{O_1A}{O_1C_1}$ и $V^n=V_{C_2}\dfrac{O_2B}{O_2C_2}$, с учётом $V_{C_1}=\omega_1\cdot O_1C_1$ и $V_{C_2}=\omega_2\cdot O_2C_2$ $\Rightarrow$

$$\omega_1\cdot\frac{\cancel{O_1C_1}\cdot O_1A}{\cancel{O_1C_1}}=\omega_2\cdot\frac{\cancel{O_2C_2}\cdot O_2B}{\cancel{O_2C_2}} \Rightarrow \quad \omega_1\cdot O_1A=\omega_2\cdot O_2B.$$

Следовательно, передаточное отношение

$$u_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{O_2B}{O_1A}=\frac{r_{в_1}}{r_{в_2}}.$$

Так как $\Delta O_1 AP \sim \Delta O_2 BP \Rightarrow \quad \frac{O_2 B}{O_1 A} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{O_2 P}{O_1 P}$.

Окончательно:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (*)$$

Равенство (*) называется *основной теоремой зацепления*, которую можно интерпретировать следующим образом:

Нормаль в точке касания элементов высшей пары качения и скольжения делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Точка P, делящая линию $O_1 O_2$ на части, обратно пропорциональные угловым скоростям, является мгновенным центром вращения в относительном движении звеньев *1* и *2* и называется *полюсом зацепления*. Радиусы-векторы r_1 и r_2 являются радиусами-векторами *центроид* в относительном движении звеньев *1* и *2*.

2.3.4. ЭВОЛЬВЕНТА КРУГА

При выборе заданий на профилирование зубьев на практике необходимо руководствоваться соображениями кинематического, динамического, технологического и эксплуатационного характера.

Требования кинематического характера:

- построение должно быть достаточно простым.

Требования динамического характера:

- давление на зуб должно быть постоянно по величине и направлению;
- форма зуба должна обеспечивать наибольшую прочность;
- форма зуба должна обеспечивать минимальный износ.

Требования технологического характера:

- относительная простота изготовления на современном оборудовании.

Требования эксплуатационного характера:

- долговечность в работе;
- безударный характер работы, бесшумность;
- легкость монтажа;
- взаимозаменяемость.

Вследствие всего этого в машиностроении пользуются только несколькими видами кривых в качестве профилей зубьев. Из этих кривых мы рассмотрим так называемые *эвольвенты круга*, являющиеся основным типом кривых, по которым очерчены профили современных зубчатых механизмов и на некоторых видах *циклоидальных кривых*.

Выясним, что такое эвольвента круга и какими свойствами она обладает. Пусть задана окружность (рис. 2.37), с центром в точке O. Проведём прямую AB, касательную к этой окружности, и будем катить эту прямую без скольжения по окружности.

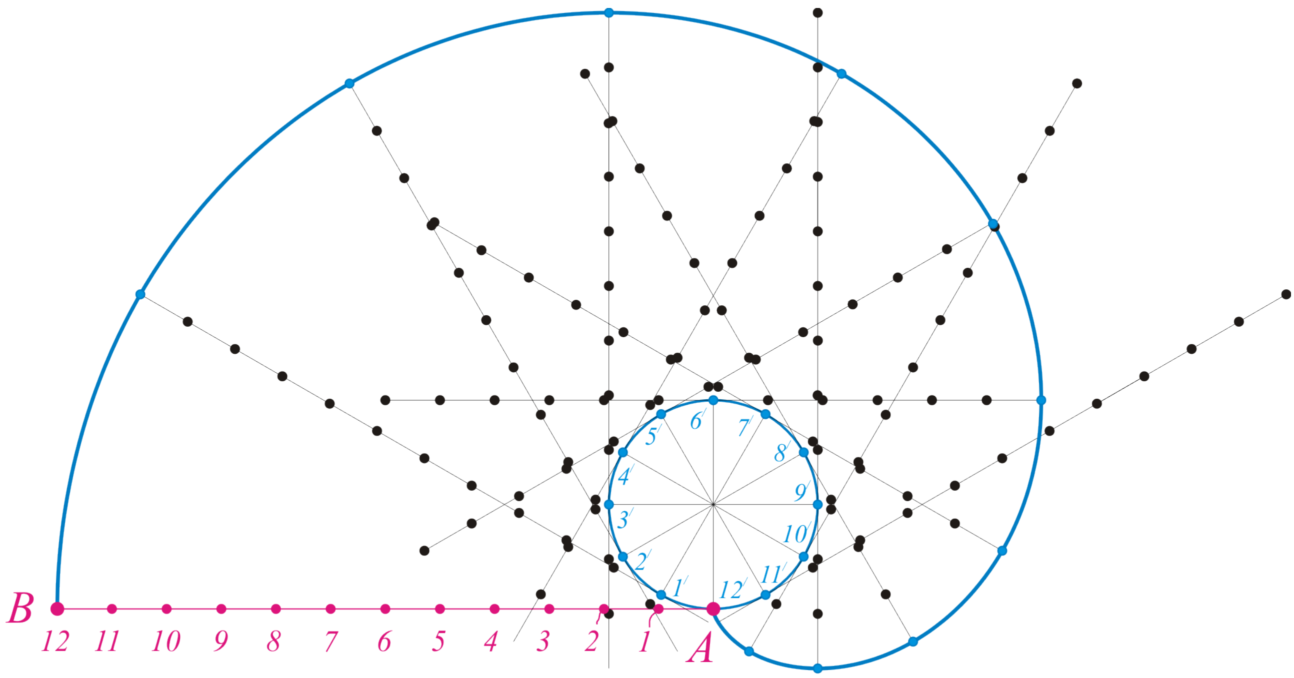


Рис.2.37. Линия эвольвенты

Для построения эвольвенты круга делим окружность на равные дуги $\overset{\smile}{A-1'}$, $\overset{\smile}{1'-2'}$, $\ldots \overset{\smile}{11'-12'}$. На прямой откладываем от точки A участки, равные длинам этих дуг так, чтобы выполнялись следующие соотношения.

$\overset{\smile}{A-1'} = \overset{\smile}{A-1}$; $\overset{\smile}{1'-2'} = \overset{\smile}{1-2}; \ldots \overset{\smile}{11'-12'} = \overset{\smile}{11-12}$. Тогда при качении прямой AB без скольжения по окружности точки $1, 2, \ldots, 12$ прямой AB будут последовательно совпадать с точками $1', 2', \ldots 12'$ окружности. При этом все точки прямой будут описывать кривые, которые носят название эвольвенты круга.

Таким образом, окружность, по которой катится без скольжения прямая AB, является *эволютой* — геометрическим местом центров кривизны эвольвенты, описываемых начальной прямой AB.

Свойства эвольвенты:

1. образующая прямая всегда нормальна к эвольвенте (основное свойство);
2. эвольвента всегда начинается на основной окружности и расположена вне её;
3. эвольвента является кривой без перегибов;
4. форма эвольвенты зависит от радиуса основной окружности.

Рассмотрим окружность (рис. 2.38), радиуса $r_в$. Построим эвольвенту. Началом эвольвенты служит точка M_0. Соединим точки M_0 и O. Выберем произвольную точку M на эвольвенте. Соединим точки O и M радиусом-вектором $\vec{r}$. Обозначим через ρ отрезок AM.

Угол между M_0O и радиусом-вектором произвольной точки эвольвенты обозначим через θ. Угол между радиусом-вектором и прямой 1 к касательной обозначим через α.

Рассмотрим, чему равна длина дуги M_0A:

$\breve{M_0 A} = r_в(\theta+\alpha)$, θ, α - в радианах.
Из прямоугольного ΔOAM имеем:
$MA = OA \cdot tg\,\alpha = r_в \cdot tg\,\alpha$.
По свойству эвольвенты $\breve{M_0 A} = MA \Rightarrow$
$r_в(\theta+\alpha) = r_в tg\,\alpha$; $\theta = tg\,\alpha - \alpha$.

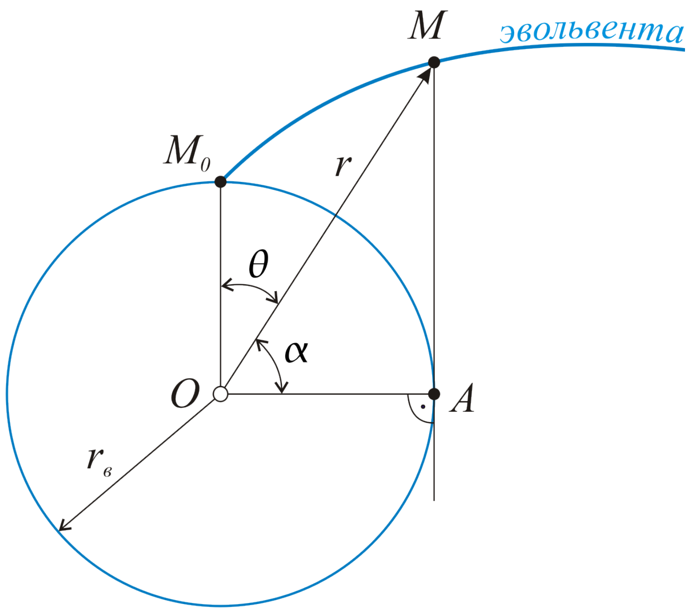


Рис. 2.38. К построению эвольвенты

При перемещении точки M по эвольвенте меняются как угол θ, так и угол α. Зависимость между этими углами называют *эвольвентной функцией* или *эвольвентой*, которую обозначают как $inv\,\alpha$. Значение этой функции:

$$inv\,\alpha = tg\,\alpha - \alpha. \tag{2.57}$$

В приложении настоящего пособия приведена таблица значений эвольвентной функции для ряда углов.

2.3.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА

Рассмотрим геометрические элементы зубчатого колеса, рис. 2.39.

Центроиды круглых зубчатых колёс $Ц_1$ и $Ц_2$ называются *начальными окружностями*.

Дуга начальной окружности, вмещающая один зуб (без впадины), носит название *начальной толщины зуба* s_W.

Дуга начальной окружности, вмещающая впадину (расстояние между двумя соседними зубьями), называется *начальной шириной впадины* l_W.

Шаг по начальной окружности определяется как $p_W = S_W + l_W$.

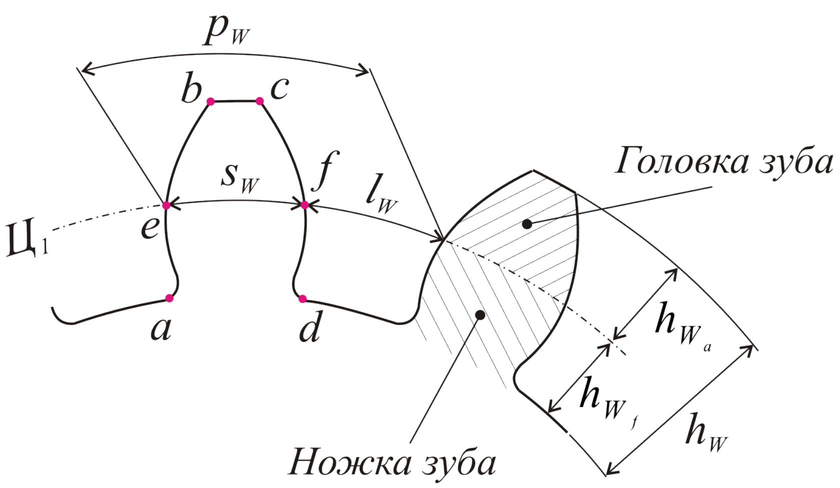


Рис.2.39. Геометрические элементы колеса

Длины начальных окружностей колес *1* и *2* равны:

$$2\pi r_{W_1} = z_1 p_W \quad \text{и} \quad 2\pi r_{W_2} = z_2 p_W \Rightarrow \qquad p_W = \frac{2\pi r_{W_1}}{z_1} = \frac{2\pi r_{W_2}}{z_2}. \tag{2.58}$$

Из этого соотношения видно, что шаг зацепления всегда выражается через радиус (диаметр) окружности несоизмеримым числом, так как в правую часть входит трансцендентное число π. Это затрудняет подбор зубчатых колёс и практическое их измерение. Поэтому для определения основных размеров зубчатых колёс в качестве основной единицы принят некоторый параметр, называемый *модулем зацепления*.

Модуль измеряется в миллиметрах и обозначается буквой m. Его величина равна:

$$m = \frac{p}{\pi}, \ [мм]. \tag{2.59}$$

Центральный угол τ, опирающийся на дугу окружности зубчатого колеса, равную окружному шагу p, называется *угловым шагом* зубьев. Для двух зубчатых колес, находящихся в зацеплении:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1}; \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}. \tag{2.60}$$

Для того, чтобы не иметь на машиностроительных заводах, изготавливающих зубчатые колёса, большие комплекты режущих инструментов, производители условились на некоторой окружности, называемой *делительной*, выбирать модули из ряда рациональных чисел. Стандартом установлены два ряда модулей, до которых должны округляться модули, полученные из расчётов.

Профиль каждого зуба имеет часть $евсf$, выступающую за начальную окружность, называемую *начальной головкой зуба*, и часть *aefd*, находящуюся внутри начальной окружности и называемую *начальной ножкой зуба*.

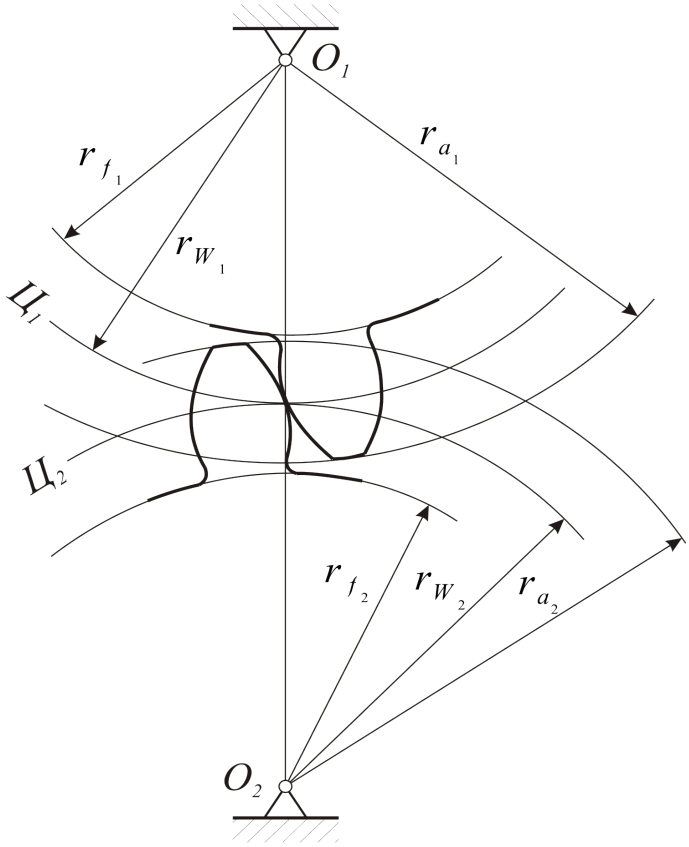


Рис. 2.40. Геометрия зацепления двух зубчатых колёс

Так как все размеры зубьев колеса одинаковы, то все головки зубьев внешнего зацепления (рис. 2.40) ограничиваются снаружи *окружностями вершин* радиусов r_{a_1} и r_{a_2}, а все ножки зубьев ограничиваются изнутри *окружностями впадин* радиусов r_{f_1} и r_{f_2}. На рис. 2.40 также показаны r_{W_1} и r_{W_2} - начальные окружности. Кроме того, r_i - обозначаются делительные окружности и $r_{вi}$ - основные окружности.

Если делительные окружности совпадают с начальными, такие колеса называются *нулевыми*.

$$d_1 = 2r_1 = \frac{p}{\pi} z_1 = m z_1; \quad d_2 = m z_2.$$

Высота обычно принимается $h_a = m$ и $h_f = 1{,}25 m$.

Больший размер ножки по сравнению с головкой обеспечивает зазор между головкой зуба и впадиной.

Для расчета параметров зацепления двух зубчатых колёс используют ряд зависимостей:

$d_{a_1} = d_1 + 2h_a = mz + 2m = m(z_1 + 2);$

$d_{a_2} = m(z_2 + 2);$

$d_{f_1} = d_1 - 2h_{f_1} = mz_1 - 2{,}5m = m(z_1 - 2{,}5);$

$d_{f_2} = m(z_2 - 2{,}5).$

Межосевые расстояния можно рассчитать как

$$a_W = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2).$$

2.3.6. КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ КОЛЁС

Механизмы, состоящие из двух сопряжённых зубчатых колёс, относят к простейшим. Передаточное отношение, которое можно воспроизвести таким механизмом, невелико.

На практике необходимо воспроизведение значительно больших передаточных отношений.

Для этого применяются несколько последовательно соединённых колёс, где, кроме входного и выходного, имеются ещё и промежуточные колёса.

Такие сложные зубчатые механизмы получили название *многоступенчатых передач* или *редукторов*.

Многоступенчатые передачи, у которых оси вращения колёс неподвижны, носят название *рядовые соединения*.

Рассмотрим рядовое соединение зубчатых колёс (рис.2.41).

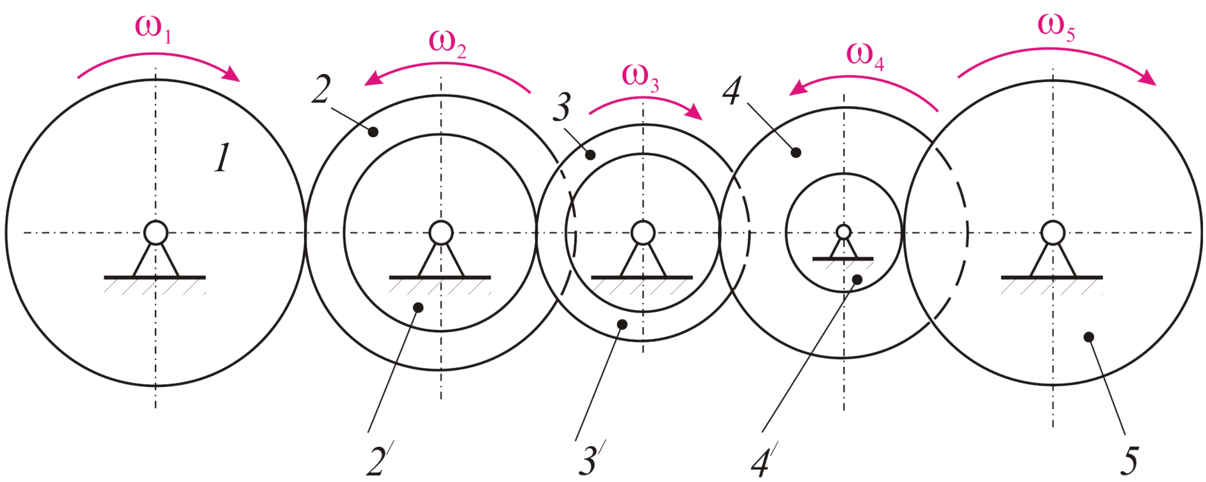


Рис. 2.41. Рядовое соединение зубчатых колёс

Общее передаточное отношение всего механизма, изображенного на рис. 2.41, $u_{15} = \dfrac{\omega_1}{\omega_5}$.

Определим передаточное отношение для каждой пары колёс:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \quad u_{2'3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}; \quad u_{3'4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}; \quad u_{4'5} = \frac{\omega_4}{\omega_5}.$$

Перемножая полученные передаточные отношения, получим:

$$u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot u_{3'4} \cdot u_{4'5} = \frac{\omega_1}{\cancel{\omega_2}} \cdot \frac{\cancel{\omega_2}}{\cancel{\omega_3}} \cdot \frac{\cancel{\omega_3}}{\cancel{\omega_4}} \cdot \frac{\cancel{\omega_4}}{\omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Так как $u_{15} = \dfrac{\omega_1}{\omega_5}$, то $u_{15} = u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot u_{3'4} \cdot u_{4'5}$.

Передаточное отношение многоступенчатой зубчатой передачи есть произведение взятых со своими знаками передаточных отношений отдельных её ступеней.

В общем случае:

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot \ldots \cdot u_{(n-1)'n}. \tag{2.61}$$

Для каждой ступени:

$$\begin{cases} u_{12} = \pm \dfrac{r_2}{r_1} = \pm \dfrac{z_2}{z_1} \\ u_{2'3} = \pm \dfrac{r_3}{r_{2'}} = \pm \dfrac{z_3}{z_{2'}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{(n-1)'n} = \pm \dfrac{r_n}{r_{n-1'}} = \pm \dfrac{z_n}{z_{n-1'}} \end{cases}, \tag{2.62}$$

где $r_1 \ldots r_n$ - радиусы начальных окружностей;

$z_1 \ldots z_n$ - числа зубьев;

знак «+» - берётся при внутреннем зацеплении и знак «-» - при внешнем зацеплении.

В общем случае:

$$u_{1n} = (-1)^k \frac{r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n}{r_1 \cdot r_{2'} \cdot \ldots \cdot r_{(n-1)'}} = (-1)^k \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot \ldots \cdot z_{(n-1)'}}, \tag{2.63}$$

где k - число внешних зацеплений.

Рассмотрим следующую передачу.

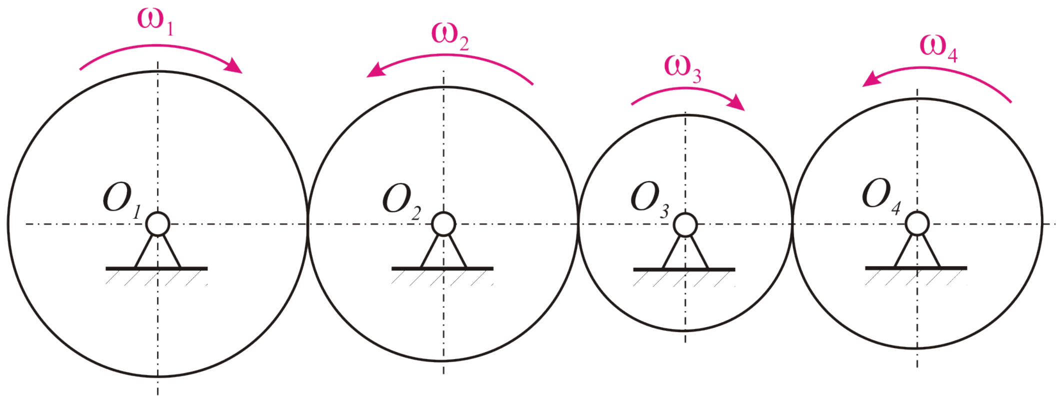


Рис. 2.42. К рассмотрению рядовой передачи

При передаче вращения между валами, находящимися на большом расстоянии друг от друга или при необходимости воспроизведения передаточного отношения определённого знака часто применяют рядовое соединение колёс, каждое из которых имеет собственную ось вращения.

$$u_{14}=\frac{\omega_1}{\omega_4}=(-1)^k\cdot u_{12}\cdot u_{23}\cdot u_{34}=-\frac{\cancel{z_2}}{z_1}\cdot\frac{\cancel{z_3}}{\cancel{z_2}}\cdot\frac{z_4}{\cancel{z_3}}=-\frac{z_4}{z_1}. \qquad (2.64)$$

Как видно из этого выражения, величина общего передаточного отношения u_{14} не зависит от промежуточных зубчатых колёс. Такие колёса называются *паразитными*.

При рассмотрении редукторов с коническими колёсами передаточному отношению приписывают знак плюс, если направление угловых скоростей входных и выходных звеньев совпадают, и знак минус — если их направления противоположны.

2.3.7. ПЛАНЕТАРНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Такие многозвенные зубчатые механизмы обязательно имеют колеса с движущимися геометрическими осями, которые называются планетарными или сателлитами.

Подвижное звено, в котором помещены оси сателлитов, называется *водилом*. Вращающееся вокруг неподвижной оси колесо, по которому обкатываются сателлиты, называется центральным; неподвижное центральное колесо называется *опорным*. Как правило, планетарные механизмы изготовляются соосными.

Планетарные механизмы подразделяются на *планетарные редукторы* и *мультипликаторы*, которые обладают одной степенью свободы и обязательно имеют опорное звено, и зубчатые дифференциальные механизмы, число ступеней свободы которых два и более $(W \geqslant 2)$ и которые опорного звена обычно не имеют.

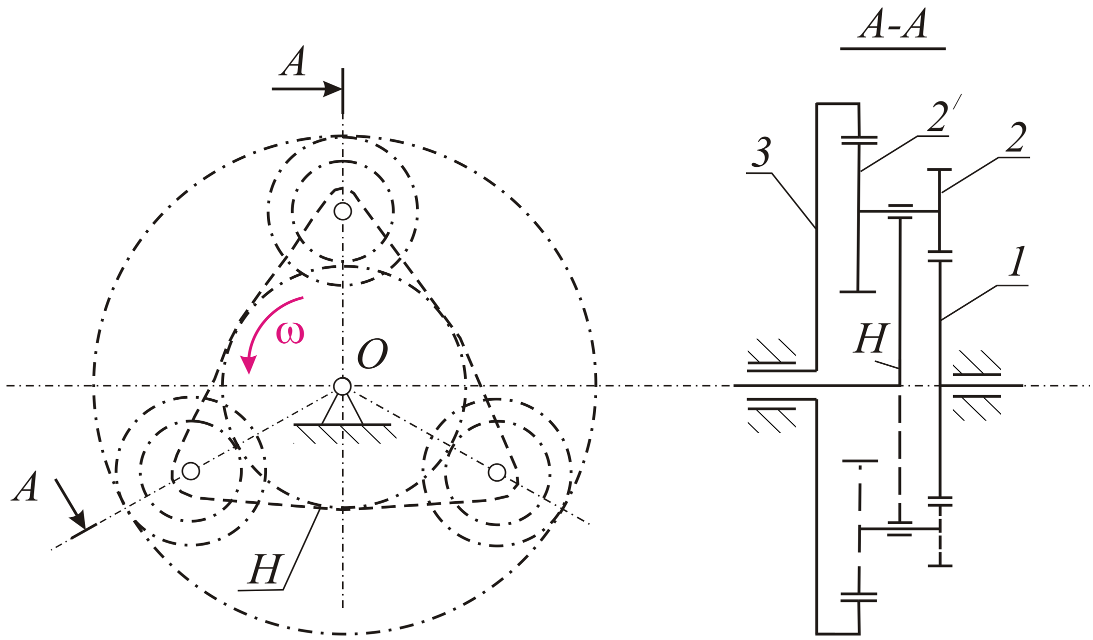


Рис. 2.43. Схема дифференциального механизма

Степень подвижности механизма определяется так:

$W = 3n - 2p_5 - p_4$, $n = 4$, $p_{5\,вращ} = 4$, $p_{4\,зубч} = 2$.

$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$. В данном механизме три сдвоенных сателлита. *Планетарным* (собственно *планетарным*) *механизмом* называют зубчато-рычажный механизм, обладающий одной степенью подвижности. Одно из центральных колес закреплено. В состав дифференциального и планетарного механизмов входят: два центральных колеса (их иногда называют солнечными, коронами и т.д.), рычаг - водило (обычно обозначаемое буквой H) и один или несколько сателлитов (одинарных или сдвоенных), оси вращения которых установлены на водиле.

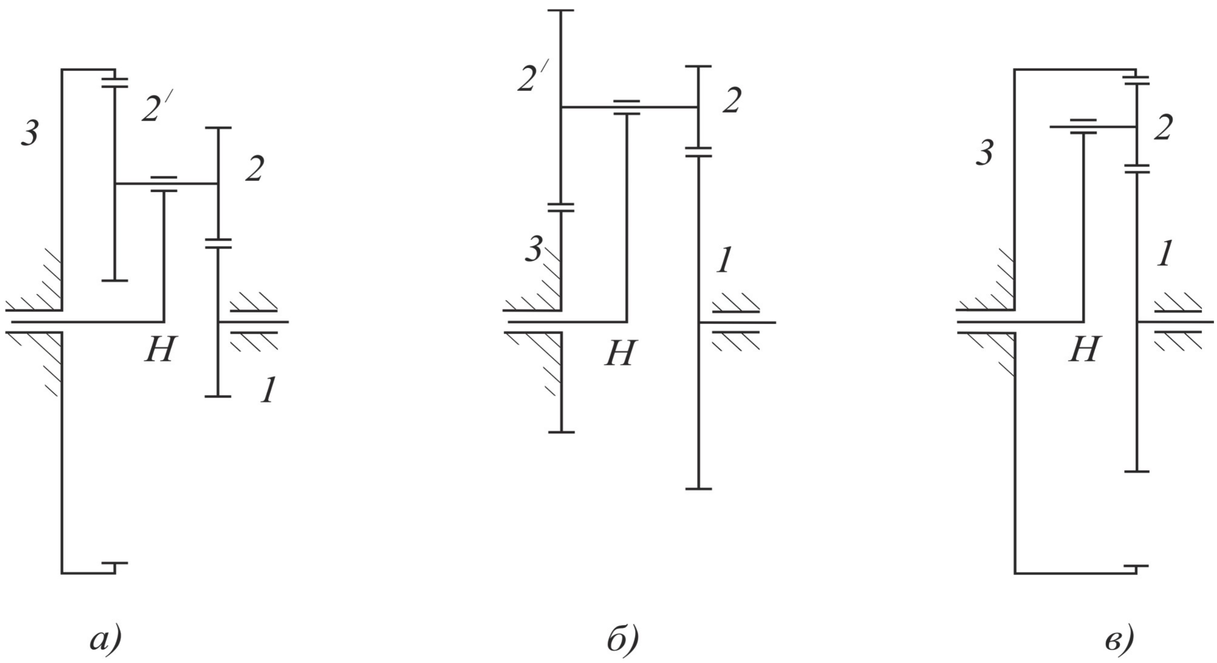


Рис. 2.44. Схема планетарных механизмов

Степень подвижности планетарного механизма определяется так:

$W = 3n - 2p_5 - p_4,\ n = 3,\ p_{5\,вращ} = 3,\ p_{4\,зубч} = 3.$

$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$

2.3.8. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛАНЕТАРНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Существует несколько способов определения передаточных отношений дифференциальных и планетарных механизмов. Нами будет использован аналитический метод с применением универсальной *формулы Виллиса* для дифференциального механизма:

$$u_{13}^{H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}. \qquad (2.65)$$

В этой формуле слева стоит передаточное отношение обращенного механизма (если неподвижным будет водило H, - его принимают условно неподвижным) от центрального колеса *1* к центральному колесу *3*. Значение этого передаточного отношения обязательно нужно указывать с его знаком (плюс или минус).

Если вместо дифференциального механизма будет планетарный, то эта формула несколько видоизменится, т. е. если $\omega_3 = 0$, то она примет вид:

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{n_1}{n_H} = 1 - U_{13}^{H}. \qquad (2.66)$$

Этой формулой пользуются в том случае, если входное звено будет центральное колесо *1*, а выходное - водило *H*. В правой части выражения значение u_{13}^{H} - передаточное отношение обращенного механизма (при неподвижном водиле H и раскрепленном колесе *3* (с его знаком).

Если же входное будет водило H, то формула примет вид:

$$u_{H1} = \frac{1}{u_{1H}} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{1 - u_{13}^{H}}. \qquad (2.67)$$

Если в дифференциальном механизме с двумя степенями подвижности связать угловые скорости каких-либо двух его валов дополнительной передачей, то это уменьшит число степеней свободы на единицы. Весь механизм будет обладать одной степенью подвижности и называться замкнутым дифференциальным механизмом.

2.3.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ОТНОШЕНИЙ МНОГОЗВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Решим задачи двумя способами: графическим (с помощью картины угловых скоростей) и аналитическим (с помощью формулы Виллиса).

Пример 2.2. Определить u_{1H_2} (рис. 2.45), если число зубцов z всех колес задано.

Решение. Это сложная многоступенчатая серия, можно выделить в ней три ступени колес. *I* - простая передача состоящая, из колес *1* и *2*; *II* ступени - планетарная, из колес *2-3-3-4* и водила H_1, а *III* ступени тоже планетарная серия, из колес *5-6-6-7* и водила H_2. Передаточное число сложной серии равно в общем случае произведению передаточных отношений отдельных ступеней.

$$u_{1H_2}=u_{12}\cdot u_{2H_1}\cdot u_{5H_2},$$

где $u_{12}=-\dfrac{z_2}{z_1}$; ; $u_{2H_1}=1-u_{24}^{H_1}=1-\left(-\dfrac{z_3}{z_2}\right)\cdot\left(+\dfrac{z_4}{z_3}\right)=1+\dfrac{z_3}{z_2}\cdot\dfrac{z_4}{z_3}$.

$$u_{5H_2}=1-u_{57}^{H_2}=1-\left(-\frac{z_6}{z_5}\right)\cdot\left(-\frac{z_7}{z_6}\right)=1-\frac{z_6}{z_5}\cdot\frac{z_7}{z_6},$$

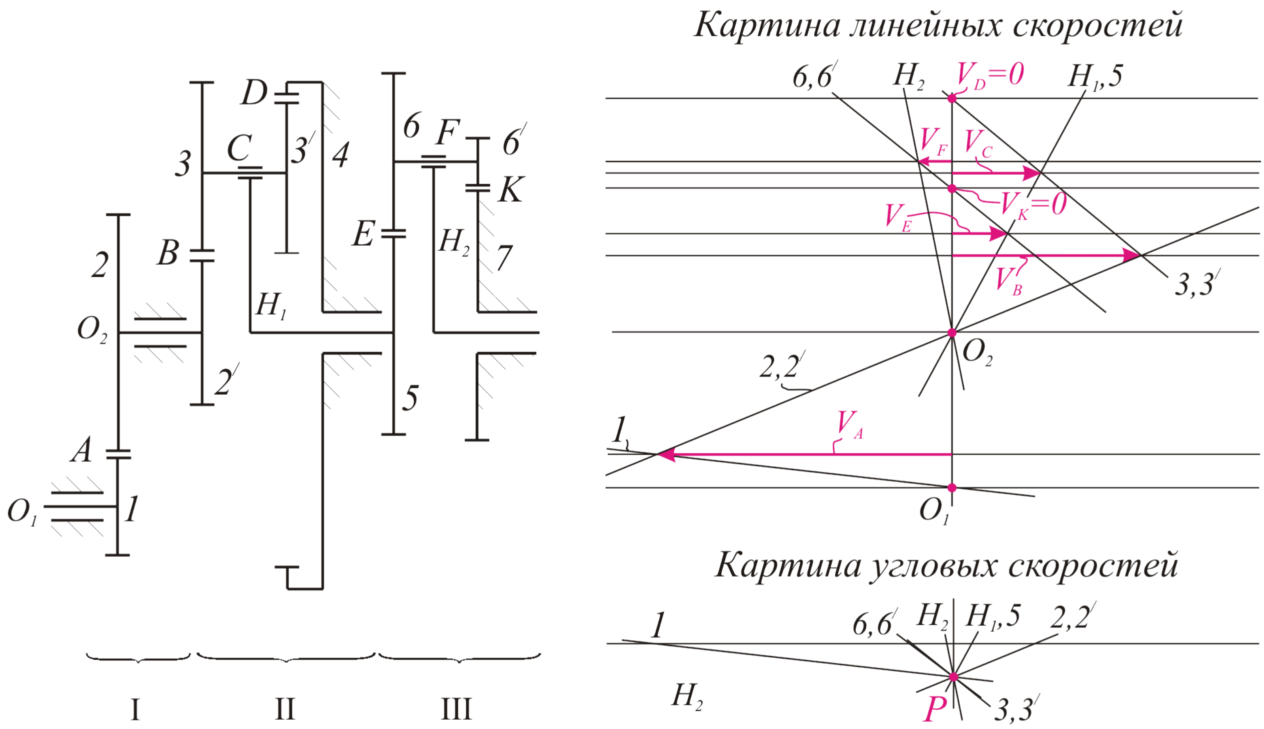


Рис. 2.45. Многоступенчатый зубчатый механизм

и окончательно

$$u_{1H_2}=\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\cdot\left(1+\frac{z_3}{z_2}\cdot\frac{z_4}{z_3}\right)\cdot\left(1-\frac{z_6}{z_5}\cdot\frac{z_7}{z_6}\right).$$

Пример. 2.6

Определить u_{13} замкнутого дифференциального механизма (рис. 2.46).

Решение. Данный механизм является сложной серией колес - замкнутый дифференциальный механизм.

Дифференциальная часть состоит из колес *1-2-2-3* и водила H, замыкающая часть — из колес *4-5-3*, при этом из чертежа видно, что $\omega_H = \omega_4$ и $\omega_3 = \omega_3$.

Рассмотрим дифференциальную часть и по формуле (2.65)

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

Определим левую часть выражения $u_{13}^H = u_{12} \cdot u_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right)$,

следовательно, $\left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}$.

Рассмотрим замыкающую часть и определим

$u_{43} = u_{45} \cdot u_{53} = \left(-\frac{z_5}{z_4}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_5}\right) = -\frac{z_3}{z_4}$, т.е. $u_{43} = -\frac{\omega_4}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_4}$, но выше было указано $\omega_H = \omega_4$ и $\omega_3 = \omega_3$.

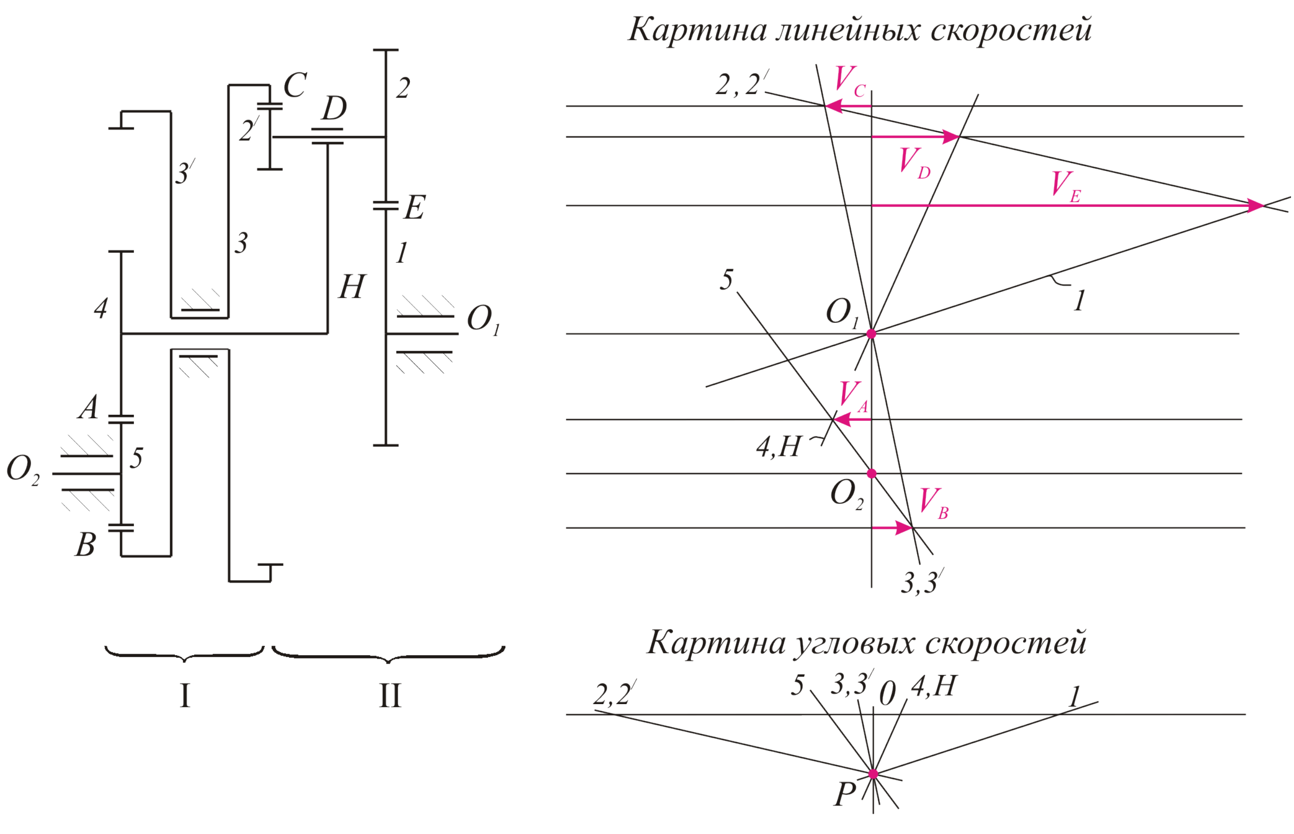


Рис. 2.46. Замкнутый дифференциальный механизм

Заменим их и получим $\frac{\omega_4}{\omega_3}=\frac{\omega_H}{\omega_3}=-\frac{z_3}{z_4}$, или $\omega_H=-\omega_3\cdot\frac{z_3}{z_4}$.

Далее значение ω_H подставим в правую часть уравнения

$$\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\cdot\left(\frac{z_3}{z_2}\right)=\frac{\omega_1+\omega_3\cdot\frac{z_3}{z_4}}{\omega_3+\omega_3\cdot\frac{z_3}{z_4}}.$$

Освободимся от знаменателя и вынесем ω_3 за скобки:

$$-\omega_3\cdot\left(1+\frac{z_3}{z_4}\right)\cdot\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_3}{z_2}=\omega_1+\omega_3\cdot\frac{z_3}{z_4}.$$

Поделим обе части на ω_3:

$$-\left[\left(1+\frac{z_3}{z_4}\right)\cdot\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_3}{z_4}\right]=-\frac{\omega_1}{\omega_3}=u_{13}.$$

Знак минус показывает, что колесо *1* и колесо *3* вращаются друг относительно друга в разные стороны.

2.4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

2.4.1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

При рассмотрении вопросов кинематического анализа механизмов мы всегда предполагаем движение входных звеньев заданными. Движение выходных звеньев изучается в зависимости от заданного движения входных. При этом силы, действующие на звенья механизма, и силы, возникающие при его движении, не изучаются. Таким образом, при кинематическом анализе исследование движения механизмов ведётся с учетом только структуры механизмов и геометрических соотношений между размерами их звеньев.

Динамический анализ механизмов включает в себя следующие задачи:

1. изучение влияния внешних сил, сил веса звеньев, сил терния и массовых сил (сил инерции) на звенья механизма, на элементы звеньев, на кинематические пары и неподвижные опоры и установление способов уменьшения динамических нагрузок, возникающих при движении механизма;
2. изучение режима движения механизма под действием заданных сил и установления способов, обеспечивающих заданные режимы движения механизма.

Первая задача носит название *силового анализа механизмов*, а вторая задача - название *динамики механизмов*.

Первая из указанных задач имеет своей целью определение внешних неизвестных сил, действующих на звенья механизма, а также усилий (реакций), возникающих в кинематических парах при движении механизма.

К *внешним* силам, к примеру, относятся: давление рабочей смеси (газа, жидкости) на поршень ДВС; вращающий момент, развиваемый электродвигателем на валу рабочего механизма и др.

Если известны внешние сил, действующие на звенья механизма, и известны законы движения всех его звеньев, то можно методами, изучаемыми в механике, определить силы трения и реакции связей в кинематических парах, силы сопротивления сред, силы инерции звеньев и другие силы, возникающие при движении механизма, и тем самым произвести так называемый *силовой расчёт механизма*.

Как было указано выше, силовой расчёт механизмов заключается в определении тех сил, которые действуют на отдельные звенья механизмов при их движении. Зная силы, действующие на различные звенья механизма, конструктор может выбрать наиболее рациональные размеры звеньев, определить конструктивные их формы, необходимые для достаточной прочности деталей, обеспечить в кинематических парах достаточную смазку и т.д.

Вторая задача имеет своей целью определение мощности, необходимой для воспроизведения заданного движения машины или механизма, т.е. изучение законов распределения этой мощности на выполнение работ, связанных с действием различных сил на механизм.

К той же задаче относится вопрос об определении истинного движения механизма под действием приложенных к нему сил. Эта задача носит название теории движения машины или механизма под действием заданных сил.

До появления в технике быстроходных машин определение сил в механизмах велось без учёта тех дополнительных сил, которые возникают при движении механизмов — такие расчёты носят название *статических расчётов*. В результате появления в технике быстроходных машин стало необходимым учитывать и те силы, которые возникают при движении механизма и часто значительно превышают статические силы. Расчёты, в которых учитываются как статические, так и динамические нагрузки, называются *динамическими*.

Метод силового расчёта механизма с использованием сил инерции и применением уравнений динамического равновесия носит название *кинетостатического расчёта*.

2.4.2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗВЕНЬЯ МЕХАНИЗМА

При работе механизма и к его звеньям приложены внешние задаваемые силы, а именно: силы движущие, силы производственных сопротивлений, силы тяжести и др.

Кроме того, при движении механизмов в результате реакций связей в кинематических парах возникают силы трения, которые можно рассматривать как составляющие этих реакций. Реакции в кинематических парах, так же как и силы трения, по отношению ко всему механизму являются силами внутренними, но по отношению к каждому звену, входящему в кинематическую пару, оказываются силами внешними.

Силы, которые стремятся ускорить движение механизма, называются *движущими силами*. Иначе, движущими силами будем называть те силы, приложенные к звеньям механизма, которые совершают *положительную работу*.

Силы, которые стремятся замедлить движение механизма называются *силами сопротивления*. Иначе, силами сопротивления будем называть те силы, приложенные к звеньям механизма, которые совершают *отрицательную работу*.

Силами производственного сопротивления, или силами полезного сопротивления, называются силы сопротивления, преодоление которых необходимо для выполнения требуемого технологического процесса.

Силами непроизводственного сопротивления, или силами вредного сопротивления, называются те силы, на преодоление которых затрачивается дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления полезного сопротивления.

К примеру, для ДВС движущей силой является давление расширяющего газа на поршень. Для того же ДВС силами сопротивления являются сила трения в подшипниках, цилиндрах, сопротивление той рабочей машины, которая приводится в движение двигателем и т.п. К производственным сопротивлениям для ДВС можно отнести сопротивление той части машины, которая приводится двигателем в движении. К непроизводственным сопротивлениям ДВС можно отнести силу сопротивления воздуха, силы трения и т.д.

Необходимо отличать некоторую условность в разделении сил движущих и сил сопротивления.

Сила тяжести звеньев при подъёме их центров тяжестей оказывается силами сопротивления, а при опускании центров тяжестей - силами движущими.

Работа движущих сил называется *затрачиваемой*, работа сил производственных сопротивлений - *полезной* работой и работа непроизводственных сопротивлений - *вредной работой*.

2.4.3. СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Как известно из теоретической механики, в общем случае все силы инерции звена BC, совершающего плоскопараллельное движение и имеющего плоскости симметрии, параллельную плоскости движения, могут быть сведены к силе инерции Φ, приложенной в центре масс S звена, и к паре сил инерции, момент которой равен M_{Φ}.

Сила инерции:

$$\vec{\Phi} = -m\,\vec{a}_S, \tag{2.68}$$

где m - масса звена $[кг]$; $\vec{a}_S$ - вектор полного ускорения центра масс S $\left[\frac{м}{с^2}\right]$.

Таким образом, для определения силы инерции $\vec{\Phi}$ звена необходимо знать его массу и вектор полного ускорения $\vec{a}_S$ его центра масс S или проекции этого вектора на координатные оси.

Размерность вектора силы: $[\Phi]=\left[\frac{кг\cdot м}{с^2}\right]=[H]$.

Вектор полного ускорения центра масс в механизмах удобно определять из построенного плана ускорений, применяя известное из кинематики свойство подобия.

Пусть дано звено BC (рис. 2.47) и известны ускорения $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_C$ его точек B и C, которые на плане ускорений изображаются отрезками (πb) и (πc), построенными в масштабе μ.

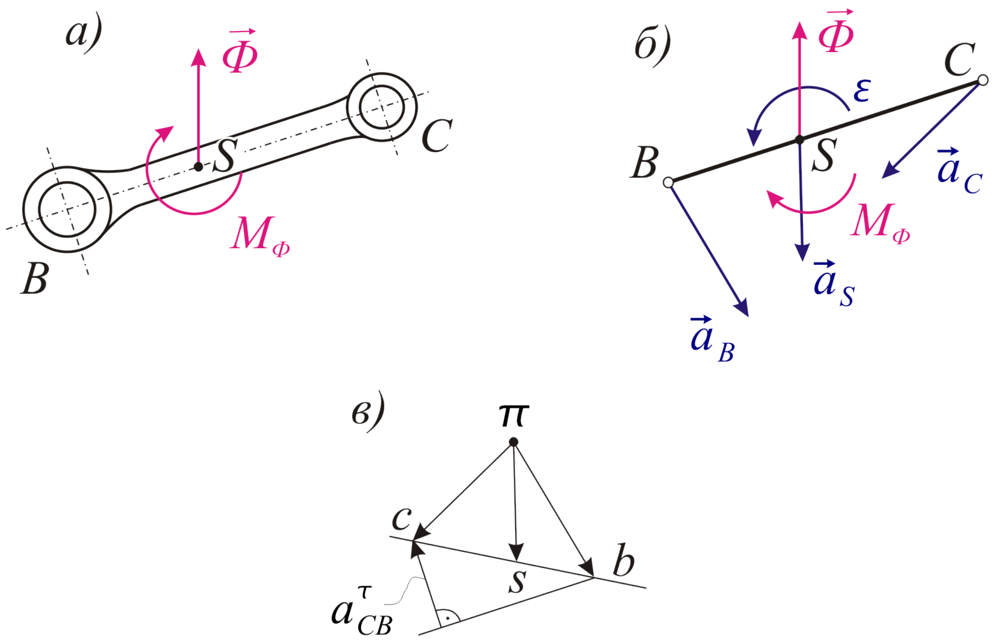


Рис. 2.47. К определению полного ускорения центра масс

Чтобы определить полное ускорение $\vec{a}_S$ центра масс S звена, соединяем точки b и c прямой и делим этот отрезок в том же отношении, в котором точка S делит отрезок BC. Соединив полученную на плане ускорений точку s с точкой π, получим величину полного ускорения $\vec{a}_S$ центра масс S:

$$a_S=\mu_a(\pi s). \tag{2.69}$$

Сила инерции звена $\vec{\Phi}$ направлена противоположно ускорению центра масс $\vec{a}_S$ центра масс точки S и равна по величине

$$\Phi = -m a_S. \qquad (2.70)$$

Момент M_Φ пары сил инерции направлен противоположно угловому ускорению ε и может быть определён по формуле

$$M_\Phi = -J_S \varepsilon, \qquad (2.71)$$

где J_S - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскости движения звена; ε - угловое ускорение звена.

Размерности данных величин:

$[J_S] = [кг \cdot м^2]$; $[\varepsilon] = \left[\frac{рад}{с^2}\right]$, следовательно, $[M_\Phi] = \left[\frac{кг \cdot м^2}{с^2}\right] = [Н \cdot м]$.

Величина углового ускорения ε определяется из равенства:

$$\varepsilon = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{CB}}. \qquad (2.72)$$

Таким образом, все силы инерции звена в общем случае могут быть сведены к главному вектору сил инерции $\vec{\Phi}$, приложенному в центре масс звена, и главному моменту сил инерции M_Φ.

Рассмотрим некоторые частные случаи движения звеньев механизмов.

Первый случай. Звено движется поступательно с некоторым ускорением (рис. 2.48). Так как звено движется поступательно, то угловое ускорение равно нулю, следовательно, момент пары сил также будет равен нулю. Все силы инерции сводятся к одной результирующей силе Φ, приложенной в центре масс S звена и направленной противоположно центру масс.

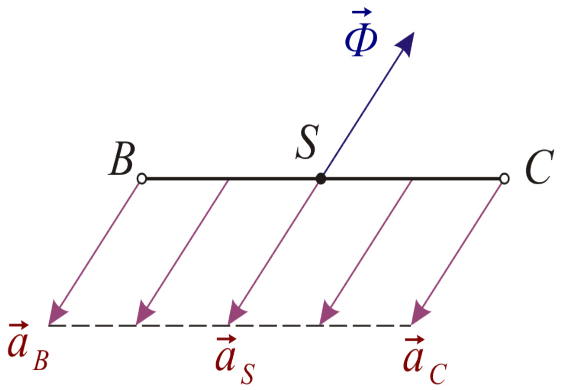


Рис. 2.48. Поступательное движение звена с ускорением

Второй случай. Если звено находится только во вращательном движении вокруг оси, проходящей через его центр масс (рис. 2.49), тогда ускорение центра масс $\vec{a}_S = 0$, $\Rightarrow \Phi = 0$.

Если при этом угловое ускорение ε не равно нулю, то силы инерции составляют пару с моментом M_Φ, который равен $M_\Phi = -J_S \varepsilon$.

Этот случай имет место для неравномерного вращающихся деталей (шкивы, барабаны, роторы и т.д.), центры масс которых находятся на оси вращения.

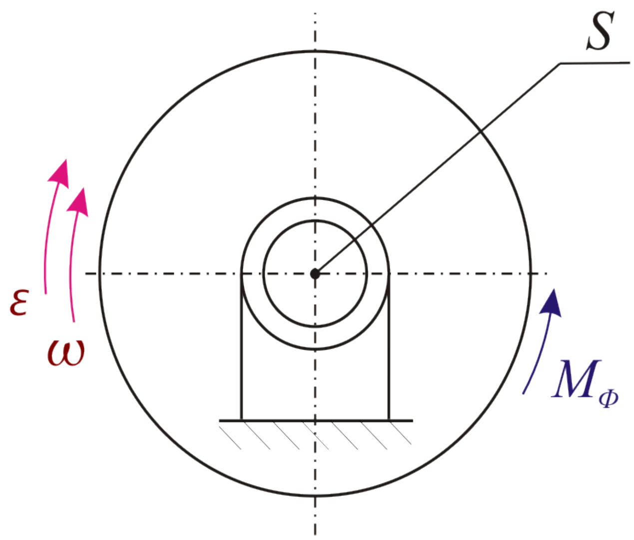


Рис. 2.49. Неравномерное вращение вокруг неподвижной оси, проведённой через центр масс

Третий случай. В случае вращательного движения звена BC вокруг некоторой оси, не проходящей через центр масс S (рис. 2.50), его силы инерции могут быть сведены к приложенной в центре масс S силе $\vec{\Phi}$, направленной противоположно ускорению $\vec{a}_S$ и равной $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_S$, и паре сил инерции с моментом $M_\Phi = -J_S \varepsilon$, где J_S - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс S.

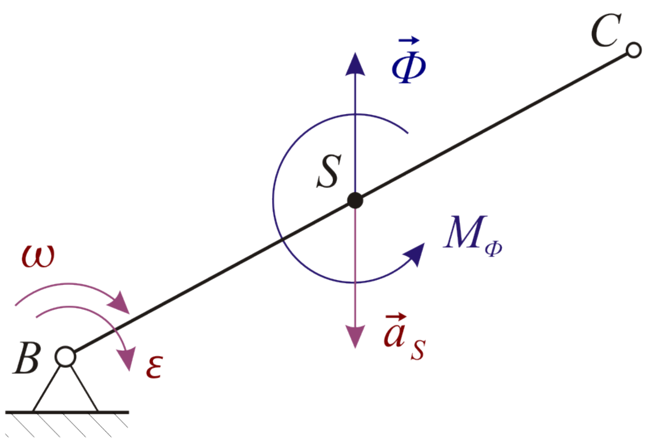


Рис. 2.50. Неравномерное вращение вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр масс

2.4.4. ПРИВЕДЕННЫЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ

При использовании движения механизма, находящегося под действием заданных сил, удобно все силы, действующие на эти звенья, заменять силами, приложенными к одному из звеньев механизма. При этом необходимо, чтобы работа на рассматриваемом возможном перемещении или мощность, развиваемая заменяющими силами, были соответственно равны сумме работ или мощностей, развиваемых силами, приложенными к звеньям исследуемых механизмов.

Заменяющие силы, удовлетворяющие этим условиям, получили название *приведённых сил*. Звено механизма, к которому приложены приведённые силы, называется звеном приведения, а точка приложения приведённых сил называется *точкой приведения*. (Обычно за звено приведения выбирают то звено, по обобщенной координате которого проводится исследование механизма.)

Например, для механизма, изображённого на рис. 2.51, вместо всего комплекса звенев можно рассмотреть звено (кривошип AB), обобщенной координатой которого является угол φ.

В точке B приложены две приведённые силы:

$\vec{F}_D$ - приведённая движущая сила;

$\vec{F}_C$ - приведённая сила сопротивления.

При этом $\vec{F}_D$ должна производить работу A_D, равную работе всех движущих сил (или развивать мощность P_D, равную мощности всех движущих сил).

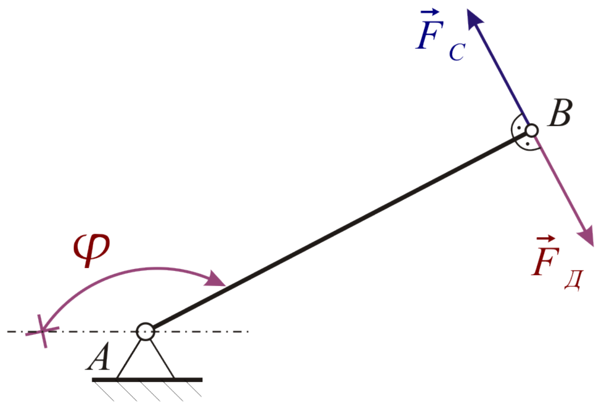


Рис. 2.51. К приведению механизма

Сила $\vec{F}_C$ производит работу A_C, равную работе всех сил сопротивлений (или развивать мощность P_C, равную мощности всех сил сопротивлений).

Для определения приведённых сил или их моментов мы будем использовать равенство:

$$P_n = \sum_{i=1}^{k} P_i, \tag{2.73}$$

где P_n - мощность, развиваемая приведённой силой или приведённым моментом; P_i - мощность, развиваемая силами или моментами, приведёнными к звену i и подлежащими определению.

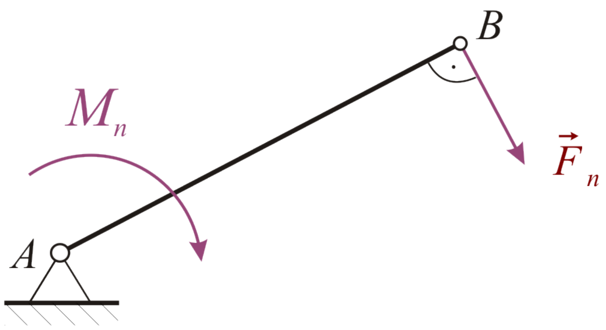


Рис. 2.52. К определению приведённого момента и приведённой силы механизма

Кроме того

$$P_n = F_n \cdot V_B = M_n \omega, \tag{2.74}$$

где F_n -величина приведённой к точке B (звена приведения) силы (может быть приведённой силой $F_Д$ или F_C); M_n - приведённый момент пары сил (может быть приведённым $M_Д$ или M_C); ω - угловая скорость звена приведения.

Приведённая сила и момент могут определяться по формулам:

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} M_i}{V_B}; \quad M_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} M_i}{\omega}; \quad \sum_{i=1}^{k} M_i = \sum_{i=1}^{k} F_i V_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{k} M_i \omega_i, \tag{2.75}$$

где F_i, M_i - сила и момент, приложенный к звену i;
V_i - скорость точки приложения силы F_i;
ω_i - угловая скорость звена i;
α_i - угол, образованный силой $\vec{F}_i$ и $\vec{V}_i$.

Таким образом, приведённую силу и момент можно рассматривать как

$$F_n = \sum_{i=1}^{k} F_i \frac{V_i \cos\alpha_i}{V_B} + \sum_{i=1}^{k} M_i \frac{\omega_i}{V_B}; \tag{2.76}$$

$$M_n = \sum_{i=1}^{k} F_i \frac{V_i \cos\alpha_i}{\omega} + \sum_{i=1}^{k} M_i \frac{\omega_i}{\omega}. \tag{2.76$'$}$$

2.4.5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЗМА

Уравнение кинетической энергии механизма имеет вид:

$$A_Д - A_C = T - T_0 . \tag{2.77}$$

Как было показано выше, все движущие силы можно заменить одной приведённой силой $F_Д$, приведённой к выбранному звену приведения AB в точке B. Точно также можно все $\vec{F}_C$ заменить одной $\vec{F}_n$, приложенной к этому же звену в точке B. Моменты сил движущих и сил сопротивления так же можно заменить приведёнными и моментами на валу A, см. рис. 3.52.

$$A_{F_Д} - A_{F_C} = \sum \frac{J\omega^2}{2} - \sum \frac{J\omega_0^2}{2}, \tag{2.78}$$

где $A_{F_Д}$ - работа приведённой силы $F_Д$;

A_{F_C} - работа приведённой силы F_C, J, $кг \cdot м^2$ момент инерции механизма относительно оси вращения;

или

$$\frac{J\omega^2}{2} - \frac{J\omega_0^2}{2} = \int_0^{\varphi} M_n \, d\varphi , \tag{2.79}$$

где M_n, $Н \cdot м$ - суммарный приведенный момент;

φ, $рад$ - величина углового перемещения.

Рассмотрим вопрос о том, как может быть определена кинетическая энергия механизма.

В общем случае кинетическую энергию плоскопараллельного движения звена можно представить в виде суммы энергий в поступательном вместе с центром масс и вращательного вокруг его центра масс движениях. Поэтому для механизма можно записать

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(m_i V_i^2 + J_i \omega_i^2 \right), \tag{2.80}$$

где m_i - масса i -звена, V_i - скорость его центра масс; J_i - момент инерции относительно оси, проходящей через через центр масс, ω_i - его угловая скорость.

Кинетическая энергия звена, движущегося поступательно:

$$T = \frac{m V_s^2}{2} . \tag{2.81}$$

Для звена, имеющего вращательное движение:

$$T = \frac{J\,\omega^2}{2}, \tag{2.82}$$

где J - момент инерции звена, относительно оси вращения.

Для звена, имеющего сложное плоскопараллельное движение,

$$T = \frac{J_p \omega^2}{2}; \tag{2.83}$$

J_p - момент инерции звена относительно оси, проходящей через мгновенный центр вращения p; ω - мгновенная угловая скорость; $J_p = J_s + m l_{ps}^2$. В последнем выражении l_{ps} - расстояние от оси вращения до центра масс; J_s - момент инерции относительно центра масс. С учётом $V_s = \omega \cdot l_{ps}$:

$$T = \frac{J_s \omega^2}{2} + \frac{m V_s^2}{2}. \tag{2.84}$$

2.4.6. ПРИВЕДЕННАЯ МАССА И ПРИВЕДЁННЫЙ МОМЕНТ МЕХАНИЗМА

Механизм с одной степенью свободы имеет только начальное звено, которое может быть выбрано за звено приведения.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m V_i^2 + J_i \omega_i\right) \times \frac{V_B^2}{V_B^2};$$

$$T = \frac{V_B^2}{2}\left[m_1\left(\frac{V_1}{V_B}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{V_B}\right)^2 + m_2\left(\frac{V_2}{V_B}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{V_B}\right)^2 + \ldots m_n\left(\frac{V_n}{V_B}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{V_B}\right)^2\right], \tag{*}$$

где $V_1, V_2, \ldots V_n$ - скорости центров масс звеньев; V_B - скорость точки приведения.

В этом выражении $T = f\left(V_B\right)$. Кинетическую энергию можно выразить в $T = f(\omega)$:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m V_i^2 + J_i \omega_i\right) \times \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2};$$

$$T = \frac{\omega_1^2}{2}\left[m_1\left(\frac{V_1}{\omega_1}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{V_2}{\omega_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \ldots m_n\left(\frac{V_n}{\omega_1}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2\right], \tag{**}$$

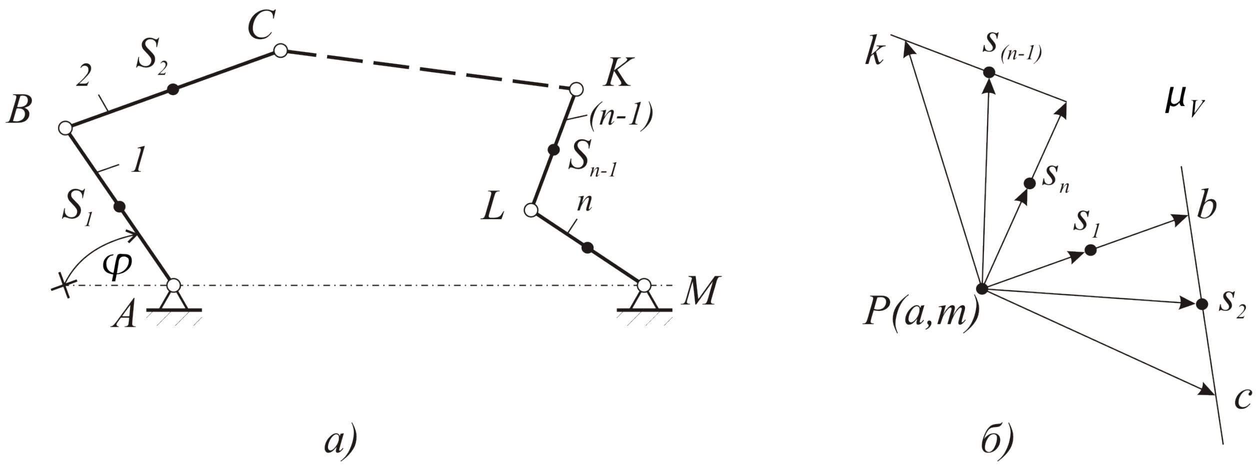


Рис. 2.53. К расчёту приведенной массы и приведённого момента механизма:
а) кинематическая схема механизма; *б*) план его скоростей

Обозначим величину, стоящую в скобках (*), через m_n, величину в скобках (**) как J_n, тогда будем иметь

$$m_n = m_1\left(\frac{V_1}{V_B}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{V_B}\right)^2 + m_2\left(\frac{V_2}{V_B}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{V_B}\right)^2 + \ldots + m_n\left(\frac{V_n}{V_B}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{V_B}\right)^2 \quad \text{и}$$

$$J_{пр} = m_1\left(\frac{V_1}{\omega_1}\right)^2 + J_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{V_2}{\omega_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \ldots + m_n\left(\frac{V_n}{\omega_1}\right)^2 + J_n\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^2.$$

Таким образом, $m_{пр}$ - представляет собой некоторую условную величину, сосредоточенную в точке B, а $J_{пр}$ - приведённый к звену AB момент инерции звеньев механизма.
Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i V_i^2 + J_i\omega_i^2\right) = \frac{V_B^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{V_i}{V_B}\right)^2 + J_i\left(\frac{\omega_i}{V_B}\right)^2\right] = \frac{m_n V_B^2}{2} \\
T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i V_i^2 + J_i\omega_i^2\right) = \frac{\omega_1^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{V_i}{\omega_1}\right)^2 + J_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2\right] = \frac{J_n\omega_1^2}{2}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\dfrac{m_n V_B^2}{2} = \dfrac{J_n\omega_i^2}{2}$, и с учётом $V_B = \omega_1 l_{AB}$, $V_B^2 = \omega_1^2 \cdot l_{AB}^2$:

$$m_n = \frac{J_n}{l_{AB}^2}. \qquad (2.85)$$

Приведённая масса и приведённый момент инерции J_n могут быть выражены через соответствующие отрезки планов скоростей

$$\begin{aligned} &V_1=(ps_1)\cdot\mu_V,\\ &V_B=(pв)\cdot\mu_V,\\ &\omega_1=\mu_V\cdot\frac{(ав)}{l_{AB}}\ldots \end{aligned} \tag{2.86}$$

2.4.7. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ СИЛОВОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМА

Силовой анализ механизмов состоит в определении сил взаимодействия звеньев механизма, т. е. определении реакции в кинематических парах.

Вопрос об определении сил, действующих на каждое звено в каждой кинематической паре, имеет большое практическое значение для расчета на прочность отдельных звеньев и деталей, для определения сил трения в кинематических парах, для расчета износа трущихся элементов кинематических пар, для определения энергии, потребной для работы механизма, и т. д.

Обычно при решении данной задачи считают заданными:

- основные размеры звеньев;
- массы и моменты инерции звеньев;
- закон движения одного звена для механизма с одной степенью подвижности или нескольких звеньев для механизмов с соответствующим числом степеней свободы. Причем если исследуется реальный механизм, то этот закон может быть определен точно опытным путем. Для проектируемого механизма обычно известен лишь желаемый закон движения входного звена.

Считаются заданными и внешние силы и моменты, приложенные к различным звеньям механизма.

Однако так как под действием этих сил механизм должен двигаться по заданному закону, то нельзя задавать все силы, приложенные к звеньям механизма. Часть этих сил должна определяться из условия обеспечения требуемого закона движения.

Силы или моменты сил, которые следует приложить к механизму, чтобы обеспечить заданный закон движения, называются уравновешивающими силами или моментами.

Для уравновешивающей силы P_y следует указать точку приложения и линию действия.

Для уравновешивающего момента M_y – звено, к которому он приложен.

При силовом расчете звено, к которому приложена уравновешивающая сила или момент, называется начальным.

Это следует иметь в виду при определении последовательности силового расчета механизмов.

Требуется определить:

1. реакции во всех кинематических парах;

2. уравновешивающую силу или уравновешивающий момент.

Силовой расчет механизмов может быть осуществлен различными методами.

В инженерной практике наибольшее распространение получил кинетостатический метод расчета, при котором уравнениям динамики придают форму уравнений статики.

Такая операция осуществляется с помощью применения принципа кинетостатики (принципа Даламбера), который читается следующим образом:

«Если ко всем силам (задаваемым и реакциям связей), действующим на одно звено или на несколько звеньев механизма, добавить силы инерции, развиваемые этими звеньями, то полученная система сил будет находиться в равновесии».

Таким образом, чтобы применить кинетостатический метод расчета, нужно уметь подсчитывать и прикладывать силы инерции звеньев.

2.4.8. СИЛЫ ИНЕРЦИИ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМА

Изучив этот параграф, студент должен знать, как подсчитывать и прикладывать силы инерции звеньев механизма.

Силой инерции $\vec{\Phi}_i$ материальной точки называется произведение массы m_i точки на ее ускорение a_i.
Направлена сила инерции в сторону, противоположную ускорению точки, т. е.

$$\vec{\Phi}_i = -m_i \cdot \vec{a}_i . \tag{2.87}$$

Звено механизма является совокупностью отдельных материальных точек, ускорения которых в общем случае различны.

При расчетах, связанных с определением реакций в кинематических парах, можно перейти от системы распределенных сил к сосредоточенным силам.

Таким образом, нужно знать, к чему приводится в общем случае система элементарных сил инерции.

Из курса теоретической механики известно, что в общем случае система элементарных сил инерции звена приводится к главному вектору и к главному моменту сил инерции.

Модуль главного вектора $\vec{\Phi}$ сил инерции звена равен произведению массы m звена на ускорение a_S его центра масс; линия действия главного вектора сил инерции проходит через центр масс звена; направление его противоположно направлению ускорения центра масс.

$$\vec{\Phi} = -m \cdot a_S . \tag{2.88}$$

В плоских механизмах звенья обычно имеют плоскость симметрии, параллельную плоскости движения.

Для таких звеньев главный момент M_Φ сил инерции звена равен произведению углового ускорения ε на его момент инерции I_S относительно оси, проходящей через центр масс звена перпендикулярно плоскости движения; направлен главный момент сил инерции звена в сторону, противоположную направлению углового ускорения звена

$$M_\Phi = -I_S \cdot \varepsilon\,. \tag{2.89}$$

Так как в плоских механизмах положения плоскостей поворота звеньев остаются неизменными, то в уравнении (2.89) можно считать M_Φ и ε величинами алгебраическими.

На рис. 2.54 показаны силы инерции звена в виде главного вектора $\vec{\Phi}$ и главного момента M_Φ.

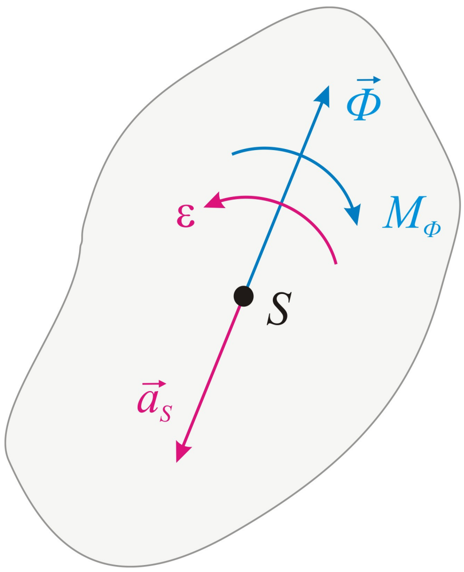


Рис. 2.54. Силы инерции звена

В случае плоского движения главный вектор $\vec{\Phi}$ и главный момент M_Φ сил инерции звена можно заменить равнодействующей силой Φ, которая по модулю равна главному вектору сил инерции звена, но линия действия которой смещена на расстояние h относительно центра масс:

$$h = \frac{M_\Phi}{\Phi}\,. \tag{2.90}$$

(Для этого главный момент M_Φ представляют в виде пары сил, у которой силы равны Φ, и складывают их с главным вектором $\vec{\Phi}$ сил инерции звена.) Плечо h откладывают от центра масс звена перпендикулярно ускорению центра масс таким образом, чтобы равнодействующая сил инерции, приложенная к концу плеча, давала момент относительно центра масс в направлении, противоположном направлению углового ускорения звена (рис. 2.55).

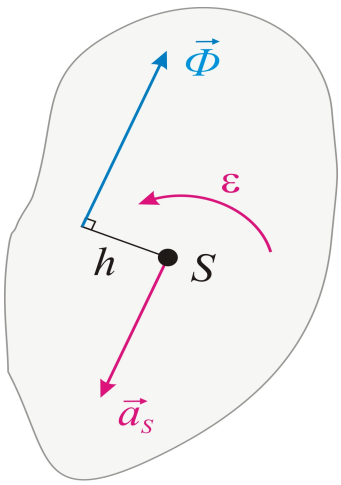


Рис. 2.55. Плоское движение звена

Если звено совершает поступательное движение, то его угловое ускорение $\varepsilon = 0$ и $M_\Phi = 0$.

Следовательно, в случае поступательного движения звена его силы инерции приводятся к одной силе инерции $\vec{\Phi} = -m \cdot a_S$, линия действия которой проходит через центр масс звена (рис. 2.56).

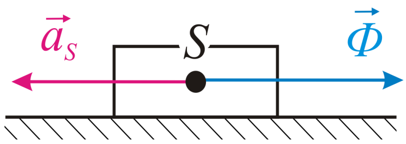


Рис. 2.56. Поступательное движение звена

Если звено совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс звена, то $a_S = 0$ и $\Phi = 0$.

Главный момент сил инерции звена $M_\Phi = 0$, если $\varepsilon = 0$.

Если $\varepsilon \neq 0$, то силы инерции звена приводятся к главному моменту $M_\Phi = -I_S \cdot \varepsilon$ (рис. 2.57).

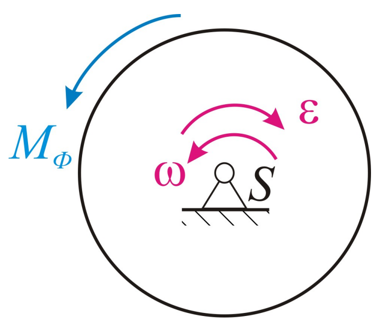


Рис. 2.57. Вращательное движение звена относительно центральной неподвижной оси

При вращении звена вокруг оси, не проходящей через центр масс звена, в общем случае $\Phi \neq 0$, $M_\Phi \neq 0$.

Эти силы инерции можно приложить так, как показано на рис. 2.58, *а* и *б*.

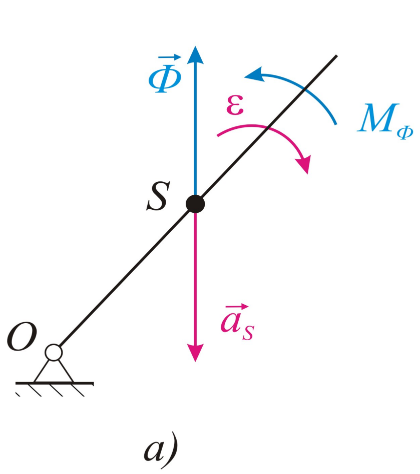


Рис. 2.58. Вращательное движение звена относительно неподвижной оси, не проходящей через центр масс

Точка K пересечения линии действия равнодействующей сил инерции звена с осевой линией звена (рис. 2.58) называется центром качения звена или центром удара.

$$h = \frac{M_\Phi}{\Phi}. \tag{2.91}$$

Положение центра удара в ряде случаев имеет существенное значение.

Например, при проектировании дробилок стараются использовать силы инерции для совершения полезной работы.

Если звено не имеет плоскости симметрии (рис. 2.59), параллельной плоскости движения, то главный вектор сил инерции звена определяют по той же формуле (2.87).

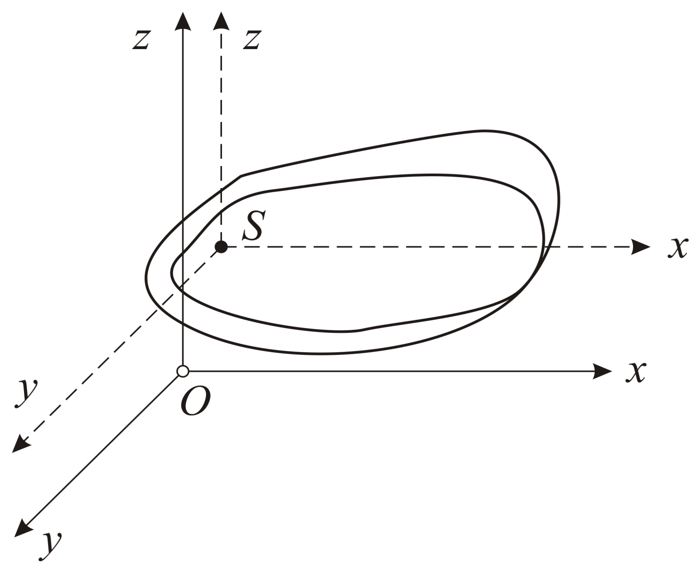


Рис. 2.59. К определению главного вектора для звена без плоскости симметрии

Главный момент M_{Φ} сил инерции такого звена будет определяться не одной проекцией $M_{\phi z} = -I_S \cdot \varepsilon$, а тремя проекциями на оси Sx, Sy, Sz, проходящими через центр масс звена параллельно осям Ox, Oy, Oz (см. рис. 2.59).

$$\begin{cases} M_{\Phi_x} = -\omega^2 \cdot I_{yz} + I_{zx} \\ M_{\Phi_y} = \omega^2 \cdot I_{zx} + I_{zy} \\ M_{\Phi_z} = -\varepsilon \cdot I_z \end{cases}, \qquad (2.91)$$

где I_{zx}, I_{yz} - центробежные моменты инерции звена соответственно относительно осей Sz и Sx, Sz и Sy.

РАЗДЕЛ III. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

3.0. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О «СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ»

При проектировании сооружений и машин инженеру приходится выбирать материал и поперечные размеры для каждого элемента конструкции таким образом, чтобы он без риска разрушиться или исказить форму сопротивлялся воздействию внешних сил. Основания для правильного решения данной задачи дает инженеру наука о *сопротивлении материалов.* Данная наука изучает поведение различных конструкций при действии на них сил и указывает, как подобрать материал для данной конструкции и поперечные размеры при условии полной надежной работы и наибольшей дешевизне конструкции.

3.0.1. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКЦИЙ

При работе сооружений и машин их части воспринимают внешние нагрузки и действие их передают друг другу. Например: опора ЛЭП воспринимает собственный вес, ветровую нагрузку, давление удерживаемых проводов и передает эти силы на основание (фундамент). В сопротивлении материалов подразумевается следующее положение: если говорят, что к той или иной части конструкции приложена внешняя сила, то мы под этим термином подразумеваем передачу давления (движения) на рассматриваемую часть от окружающей среды или от соседних частей конструкции. Классификацию сил можно провести по нескольким признакам.

1) По *характеру приложения* нагрузки делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*.

Сосредоточенными считают силы, обуславливающие передачу давления на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами самого элемента.

Распределенными считают силы, приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или площади конструкции. Данные силы характеризуются *интенсивностью* нагрузки: то есть величиной нагрузки (силы), приходящейся на единицу длины (погонная нагрузка) q, $[H/м]$, или площади p, $[H/м^2]$. Распределенные нагрузки в зависимости от того, по какому закону меняется интенсивность распределения, могут быть *равномерно распределенными* и *неравномерно распределенными.*

2) По *характеру действия* нагрузки делятся на *статические* и *динамические.*

Статическими нагрузками считаются такие силы, которые прикладываются к элементу конструкции в течение значительного интервала времени. Как правило, в процессе эксплуатации конструкции они остаются постоянными или меняются незначительно. При передаче статических нагрузок на конструкцию ускорения элементов в ней отсутствует или весьма малы.

Динамическими нагрузками считаются такие силы, которые прикладываются к конструкции за короткий промежуток времени, что обусловлено и обуславливает значительные ускорения её элементов. Динамические нагрузки могут быть *внезапно приложенными*, *ударными* и *знакопеременными*.

3.0.2. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Под *внутренними силами* в сопромате понимают силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под воздействием внешних сил (см. гипотеза о ненапряженном начальном состоянии).

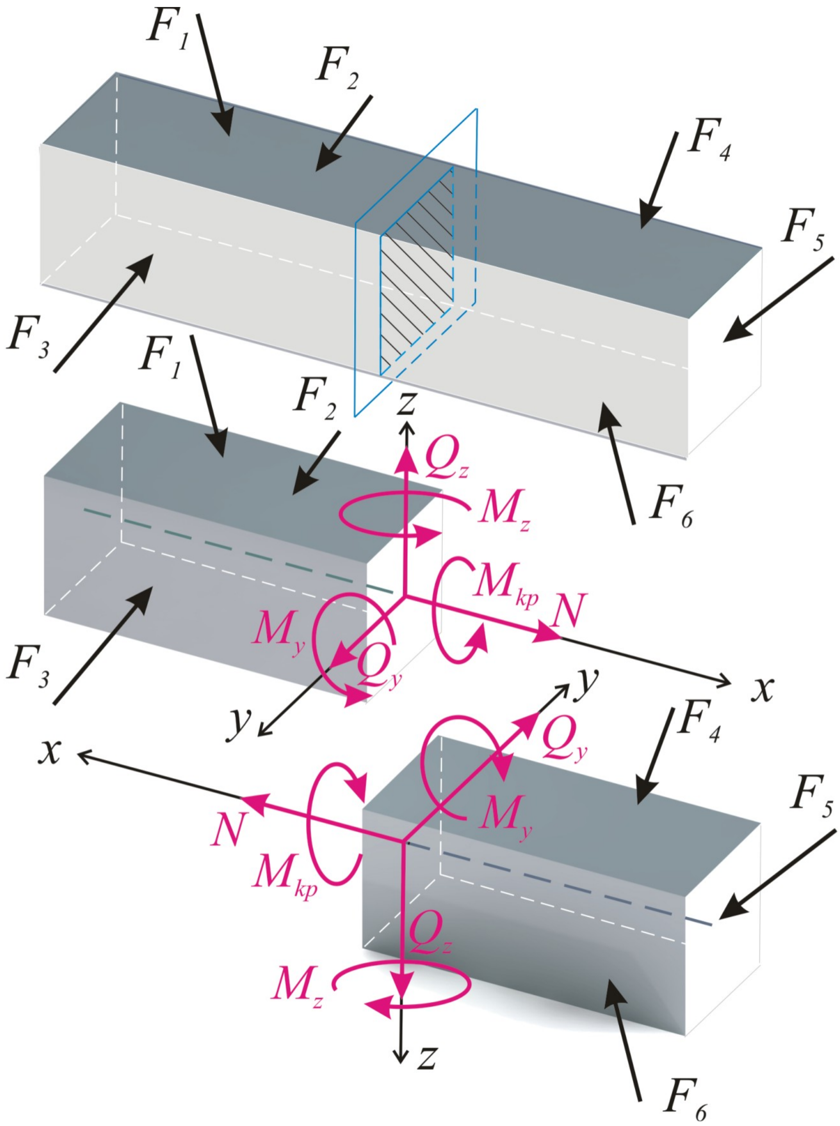


Рис. 3.1. Внутренние усилия в исследуемом поперечном сечении

В случае произвольной пространственной системы сил, для деформируемого тела, например бруса (рис. 3.1), в произвольном поперечном сечении внутренние усилия будут представлены в виде: внутренних поперечных сил Q_y, Q_z; внутренней продольной силы N; изгибающих моментов M_y, M_z; крутящего момента M_{kp}. Для их определения применяется *метод сечений*.

Для его обоснования рассмотрим брус, изображённый на рис. 3.1. Загружаем его произвольной системом внешних сил $F_1,\ldots F_n$. В поперечном сечении, где требуется определить внутренние усилия, проводим секущую плоскость, разделяем брус на левую и правую часть. Правая часть находится в равновесии, значит, внешние силы, приложенные к ней, уравновешиваются внутренними усилиями, действующими на правую часть. Но те же внешние силы уравновешиваются и нагрузками, приложенными к левой части, так как целый стержень также находится в состоянии равновесия. Следовательно, нагрузки, приложенные к левой части стержня, и внутренние усилия, действующие на правую часть, статически эквивалентны друг другу. Таким образом, проекция на любую ось внутренних усилий в сечении, действующих со стороны левой части стержня на правую, равна проекции на эту ось всех внешних сил, приложенных к левой части. Аналогично, момент относительно какой-либо оси внутренних усилий в сечении, действующих со стороны левой части стержня на правую, равен моменту всех внешних сил, приложенных к левой части, относительно этой оси. Отметим, что из шести внутренних усилий, действующих в поперечном сечении стержня, проекции пяти усилий на каждую ось x, y, z равны нулю. По аналогии равны нулю и моменты пяти внутренних усилий относительно каждой из x, y, z осей. Это позволяет определять внутренние усилия в стержнях, проецируя на одну из осей x, y, z все внутренние усилия, действующие на правую часть стержня, и все внешние силы, приложенные к левой части, или определяя их моменты относительно одной из x, y, z осей. Таким образом, внутренние силы, действующие в сечении со стороны левой части на правую, можно определить по внешним силам, приложенным не к левой, а к правой части. В этом случае полученные направления проекций внешних сил на выбранные оси и моментов относительно этих осей необходимо изменять на противоположные.

Механическое *напряжение* (далее - просто *напряжение*) характеризует интенсивность внутренних сил, действующих в сечении, и определяется по формуле:

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta A}, \tag{3.1}$$

где ΔR - равнодействующая внутренних сил на весьма малой площадке ΔA проведенного сечения.

По своей сути $\vec{p}=\vec{\tau}+\vec{\sigma}$, где τ - касательные напряжения, а σ -нормальные напряжения. Необходимо отметить, что величины напряжений τ и σ в каждой точке элемента зависят от направления сечения, проведенного через эту точку.

Совокупность напряжений τ и σ, действующих по различным площадкам, проходящим через данную точку, представляет собой *напряженное состояние* в этой точке.

Деформация – как явление представляет собой изменение размеров под влиянием нагрузки. В общем виде, по характеру перемещения материала, деформация бывает *линейной* ε и *угловой* γ *(относительный сдвиг)*.

Совокупность линейных ε по направлениям и угловых γ деформаций по различным плоскостям представляет собой *деформированное состояние* в этой точке.

Классифицировать разновидности деформаций можно с помощью оценки в рассматриваемом сечении шести силовых факторов Q_i, M_i, N_i. В зависимости от их наличия и сочетания, по спецификации сопромата деформация может представлять собой растяжение-сжатие, изгиб, сдвиг, кручение или быть сложной.

В контексте «Сопротивление материалов» решение многих задач не является абсолютно строгим, т.е. деформационные явления рассматриваются с учетом некоторых упрощений (допущений).

Основные гипотезы и допущения.

1. *Гипотеза о сплошности материала.* Считается, что материал полностью занимает рассматриваемый объем, т.е. не принимается во внимание дискретность структур вещества на уровне атомов и т.д.

2. *Гипотеза об однородности и изотропности.* Считается, что свойства материала одинаковы в любых точках и в каждой точке по любым направлениям. Данная гипотеза неприемлема при рассмотрении материалов с ярко выраженной анизотропией (древесина и т.д.).

3. *Гипотеза о малости деформаций (Гипотеза относительной жесткости материала)*. Считается, что рассматриваемые деформации малы по отношению к размерам деформируемого тела. На этом основании изменениями в расположении приложенных внешних сил по отношению к отдельным частям тела при деформации пренебрегают. Это допущение позволяет использовать уравнения статики недеформированного тела также и для тела после деформации.

4. *Гипотеза о совершенной упругости материала*. Все тела считаются абсолютно упругими. Применение данной гипотезы позволяет использовать формулы сопромата вплоть до значений напряжений, при которых начинает наблюдаться значительный рост пластических деформаций.

5. *Гипотеза о линейной зависимости между деформациями и нагрузками.* Считается, что для большинства материалов справедлив закон Гука, устанавливающий прямую пропорциональную зависимость между деформациями и нагрузками. На основании этой гипотезы при решении большинства задач сопротивления материалов применяется *принцип суперпозиции*. Т.е. усилия в любом элементе конструкции, вызванные несколькими факторами ($\sum F, \Delta t$), равны сумме усилий, вызванных каждым из этих факторов, и не зависят от порядка (очерёдности) их приложения. Данное положение справедливо и в отношении деформаций, возникающих от действия этих нагрузок.

6. *Гипотеза плоских сечений (Гипотеза Бернулли)*. Считается, что сечения плоские и нормальные к оси стержня, до приложения нагрузки, остаются плоскими и нормальными к оси и в процессе его деформирования при действии нагрузок.

3.1. ДЕФОРМАЦИЯ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Центральным растяжением – сжатием называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только внутренняя продольная сила N_i, действующая вдоль продольной оси бруса. Все остальные внутренние усилия равны нулю.

Продольная сила N, возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и связана с нормальными напряжениями зависимостью:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA, \tag{3.2}$$

где σ - нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dA; A - площадь поперечного сечения. Произведение $\sigma \cdot dA = dN$ представляет собой элементарную внутреннюю силу, приходящуюся на площадку dA.

Для нахождения продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса используется универсальный метод сечений.

Величина продольного усилия N_i в произвольном поперечном сечении стержня определяется алгебраической суммой всех внешних сил, действующих на стержень, по одну сторону от этого сечения

$$N_i = \sum_{слева} P_i = \sum_{справа} P_j, \ [H]. \tag{3.3}$$

Внутренняя сила N_i может вызывать либо растяжение, либо сжатие стержня. Если внешнее продольное усилие $P_{i,j}$ направлено от рассматриваемого сечения, то внутренняя продольная сила N_i считается положительной (деформация растяжения) , и если $P_{i,j}$ направлено к сечению, то внутренняя продольная сила $N_{i,j}$ считается отрицательной (деформация сжатия).

График, показывающий закон изменения продольной силы по длине стержня, называется *эпюрой* продольных сил $N(x)$.

3.1.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Построение эпюры продольных внутренних сил N_i осуществляется следующим образом. Вначале выполняют построение данной схемы загружения конструкции ступенчатого стержня продольными силами.

При этом необходимо руководствоваться целесообразностью горизонтальной ориентации схемы.

Внизу, непосредственно под схемой, на расстоянии, исключающем наложение данных расчетной схемы и элементов предполагаемой эпюры продольных сил, проводят нулевую линию предполагаемой эпюры продольных сил, а под самой эпюрой продольных внутренних сил аналогично оставляют место для возможно необходимого построения эпюры напряжений. При использовании такого подхода достигается наглядность и взаимосвязь графических и расчетных данных. С целью достижения большей наглядности при построении аналитические выкладки желательно производить на следующей странице.

Далее производится определение границ расчетных участков. Критериями при определении границ участков являются:

1) Наличие в поперечном сечении стержня точки приложения продольной силы.

2) Наличие в поперечном сечении стержня изменения (перехода) размера (формы) поперечного сечения.

3) Наличие в поперечном сечении зоны перехода от одного материала к другому.

Затем производят разбиение ступенчатого стержня на участки. Разбиение производится проведением вертикальных линий через положения поперечных сечений границ участков таким образом, чтобы и расчетная схема, и нулевая линия предполагаемой эпюры продольных сил были пересечены этими линиями. Подсчитаем общее число установленных расчетных участков.

Участками считаются элементы стержня, заключенные между проведенными границами. После предварительных графических построений приступаем непосредственно к аналитическому расчету. Анализируя расчетную схему, индексируем данные участки. В случаях, если рассматриваемый стержень представляет собой консоль, то индексацию проводим таким образом, чтобы первый участок был ближайшим к свободному концу стержня. Определяем внутренние усилия для каждого участка в отдельности, начиная с участка с наименьшим индексом ($1\ldots n$). Для определения внутреннего усилия на участке используем метод сечений, формулу 3.3 и соответствующее правило знаков. С этой целью последовательно производим n сечений в пределах $1\ldots n$ участков. Каждое подсчитанное по формуле 3.3 значение N_i на участке i отображаем соответственно на эпюре продольных сил. При этом если $N_i>0$, то на границах данного участка откладываем отрезки, равные значению поперечных сил, в относительном масштабе вверх от нулевой линии, соединяем концы отрезков линией, параллельной нулевой, и производим поперечную штриховку.

Для наглядности маркируем полученную площадь соответствующим знаком ⊕. Если же $N_i<0$, то отрезки откладываются вниз, а полученная площадь маркируется знаком Θ.

3.1.2. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПОДБОР СЕЧЕНИЙ

Если стержень с жестко заделанным концом состоит из i^x участков, то нормальные напряжения на каждом участке определяются по формуле:

$$\sigma_i=\frac{N_i}{A_i}, \ \left[\frac{Н}{м^2}\right] \text{ или } [Па], \tag{3.4}$$

где N_i и A_i - внутренняя нормальная сила и площадь поперечного сечения i -го участка стержня.

Условие прочности по наибольшим допускаемым нормальным напряжениям может быть сформулировано следующим образом:
Действительное максимальное напряжение σ_{max} в растянутом (сжатом) стержне не должно превышать определенной величины так называемого допускаемого напряжения $[\sigma]$, принимаемого для материала стержня и данных нагрузок постоянной величиной.

$$\sigma_{max}=\frac{N_i}{A_i}\leqslant[\sigma]. \tag{3.5}$$

Неравенство (3.5) называют условием прочности при деформации центрального растяжения-сжатия.

3.1.3. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ

Графическое отображение закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса называется эпюрой нормальных напряжений σ поперечного сечения. Выражение (3.1) может быть удовлетворено при бесконечно большом числе эпюр напряжений.

Проведем следующий опыт: возьмем резиновый брус, с параллельными полосами, нанесенными краской через равные промежутки, расположенными как вдоль оси бруса, так и поперек. Прикладывая к брусу растягивающее усилие, убеждаемся в том, что в деформированном состоянии, параллельность соответствующих линий сохраняется (гипотеза Бернулли). Если мысленно произвести разметку данного бруса на элементарном уровне, то по аналогии можно заключить, что характер элементарных деформаций будет адекватен характеру макродеформаций. То есть абсолютные деформации элементарных волокон во всех точках поперечного сечения будут одинаковыми. Соответственно, это позволяет рассматривать в выражении (3.1) σ как постоянную величину, то есть

$$N=\sigma\int_A dA=\sigma A, \text{ отсюда } \sigma=\frac{N}{A}. \tag{3.6}$$

Таким образом, в поперечных сечениях бруса при центральном растяжении –

сжатии возникают равномерно распределенные нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

Графическое отображение закона распределения нормальных напряжений по длине стержня называется эпюрой нормальных напряжений $\sigma_i(x)$.

3.1.4. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Используем уже имеющиеся построения. Для этого, отступая вниз от эпюры внутренних продольных сил N_i на расстояние, исключающее наложение данных, проводим нулевую линию, параллельную нулевой линии эпюры N_i и соответственно параллельную оси стержня на расчетной схеме. Продлеваем вертикальные линии границ участков несколько далее их пересечения с нулевой линией предполагаемой эпюры напряжений σ_i. Определяем напряжения для каждого участка в отдельности, начиная с участка с наименьшим индексом ($1 \dots n$). Для определения нормальных напряжений на участках используем формулу 3.4, применяя ее к уже определенным значениям продольных усилий на каждом отдельном участке. Очевидно, каждому i -му участку с N_i внутренним продольным усилием будет соответствовать напряжение σ_i. Необходимо отметить, что на величину нормальных напряжений i -го участка влияет не только величина внутреннего усилия N_i, но и размер поперечного сечения A_i. После аналитического подсчета значений σ_i строим эпюру нормальных напряжений $\sigma_i(x)$ способом, аналогичным упомянутому в п. 3.1.1.

3.1.5. ПОДБОР ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Подбор поперечного сечения стержня производится следующим образом. Определяется наиболее опасный участок, т.е. участок, на котором $|\sigma_i|$ имеет максимальное значение. Далее используется формула (3.5), при этом выбранное значение σ ассоциируется с σ_{max} и принимается во внимание заданная величина допускаемого напряжения $[\sigma]$. Если стержень состоит из разнородных материалов, то величина допускаемого напряжения должна быть выбрана в соответствии с допускаемым напряжением $[\sigma_i]$ для материала рассматриваемого i - го опасного участка.

3.1.6. УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА СТЕРЖНЯ

В случае, если требуется учесть собственный вес стержня, ход решения задачи несколько меняется. Допустим, что материал стержня имеет удельный вес $\gamma, \left[\frac{H}{м^3}\right]$. Если требуется с учетом собственного веса определить внутренние продольные усилия и нормальные напряжения в поперечных сечениях σ_i, N_i и построить соответствующие эпюры, применяют следующую последовательность действий при решении данной задачи:

1. Определяются значения сосредоточенных внутренних усилий N_{iP} на участках, и строится эпюра N_{iP};

2. Определяются значения распределенных продольных усилий N_{iq} на участках, и строится эпюра N_{iq};

3. На основании расчетов и принципа суперпозиции строится суммарная эпюра продольных усилий N_i как геометрическая сумма эпюр N_{iP} и N_{iq};

4. Определяются нормальные напряжения σ_i по сечениям и графически отображаются в виде эпюры нормальных напряжений σ_i. .

3.1.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В НАКЛОННЫХ СЕЧЕНИЯХ

Возьмем стержень, в крайнем сечении приложим растягивающую центральную силу P (рис. 3.2). В произвольном месте стержня проведем поперечное сечение, а затем наклонное сечение под углом α к поперечному. Угол α считается положительным, если поперечное сечение для совмещения с наклонным сечением необходимо повернуть на этот угол против часовой стрелки. Так как удлинения всех волокон, параллельных оси стержня при растяжении-сжатии, одинаковы, то можно предположить, что напряжения p во всех точках как наклонного, так и поперечного сечения одинаковы. Используя метод сечений, выделим фрагмент стержня, ограниченный наклонным сечением и крайним сечением, содержащим внешнюю нагрузку P. Очевидно, из условия равновесия следует, что напряжения p параллельны оси стержня и направлены в сторону, противоположную силе P, и что внутренняя сила

$$N_\alpha = pA_\alpha ,$$

где

$$\alpha\, A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha}. \tag{3.7}$$

В свою очередь, A - площадь поперечного сечения бруса, A_α - площадь наклонного сечения. Следовательно,

$$P = N_\alpha = pA_\alpha \Rightarrow p = \frac{P}{A_\alpha} = \frac{P\cos\alpha}{A} = \sigma\cos\alpha, \tag{3.8}$$

где $\sigma = \dfrac{P}{A}$ - нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня.

Возьмем элементарную площадку, лежащую в наклонном сечении f_α, с вектором p.

Разложим вектор p на составляющие $\vec{\sigma}_\alpha$ и $\vec{\tau}_\alpha$, используя формулу (3.4) и рисунок, определим, что их величины будут соотноситься как

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha\,;\ ; \tag{3.9}$$

$$\tau_\alpha = p\sin\alpha = \sigma\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha\,. \tag{3.10}$$

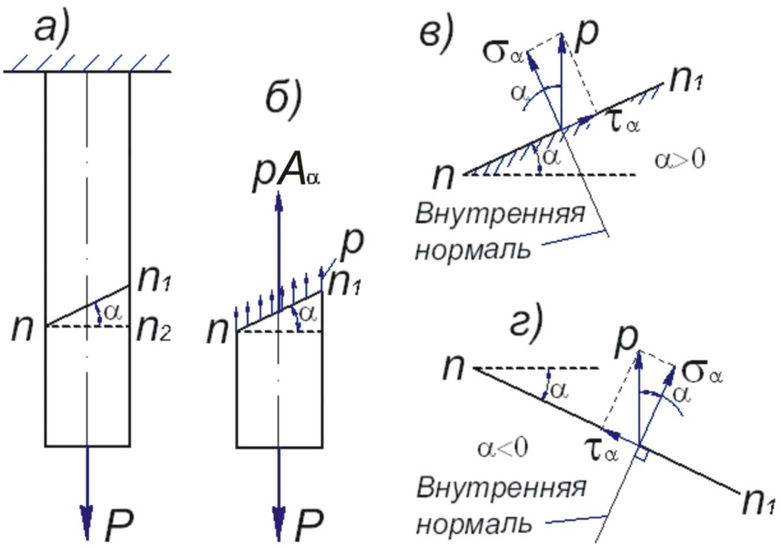


Рис. 3.2. Напряжения в наклонных сечениях при одноосном напряженном состоянии

Правило знаков напряжений при одноосном напряженном состоянии:

Нормальное напряжение считается положительным при растяжении и отрицательным при сжатии. Касательное напряжение положительно, если изображающий вектор стремится повернуть тело относительно любой точки C, лежащей на внутренней нормали к сечению, по часовой стрелке.

Анализируя полученные формулы, можно сделать следующие выводы:

1) Наибольшие (по модулю) нормальные напряжения возникают в поперечных сечениях стержня $\left(\alpha=0^\circ\right)$, а наименьшие - в продольных сечениях $\left(\alpha=\pm 90^\circ\right)$.
2) Наибольшие (по модулю) касательные напряжения возникают в наклонных сечениях $\left(\alpha=\pm 45^\circ\right)$ стержня.
3) Касательные напряжения на площадках, с наибольшими и наименьшими нормальными напряжениями $\left(\alpha=0^\circ, \pm 90^\circ\right)$, равны нулю.
4) Касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках равны по модулю и противоположны по знаку.

3.1.8. ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ. ЗАКОН ГУКА ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Абсолютным удлинением (или *абсолютной продольной деформацией*) называется величина Δl, на которую удлиняется стержень, под воздействием продольной силы. Измеряется в $[м, см, мм]$.

Относительным удлинением (или *относительной продольной деформацией*) называется величина ε, равная отношению абсолютного удлинения Δl стержня к первоначальной длине стержня l. Является мерой пластичности материала.

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}. \tag{3.11}$$

Абсолютной поперечной деформацией называется величина Δb изменения поперечного размера стержня под воздействием продольной силы. Измеряется в $[м, см, мм]$.

Относительной поперечной деформацией называется величина ε', равная отношению абсолютной поперечной деформации к первоначальному поперечному размеру стержня.

$$\varepsilon'=\frac{\Delta b}{b}. \tag{3.12}$$

Также как ε, является мерой пластичности материала. Величина безразмерная.

Опытным путем было установлено, что в случаях напряжений в материале стержня, не превышающих предела пропорциональности между ε и ε', существует зависимость:

$$\varepsilon'=-\mu\varepsilon, \tag{3.13}$$

где μ называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона* и представляет собой модуль отношения относительной поперечной деформации к продольной:

$$\mu=\left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|. \tag{3.14}$$

Величина безразмерная.

Опытным путем было установлено, что в случаях напряжений в материале стержня, не превышающих предела пропорциональности, относительное удлинение равно:

$$\varepsilon=\frac{N}{EA}, \tag{3.15}$$

здесь E - *модуль продольной упругости* или *модуль упругости первого рода*. Постоянная, характеризующая свойства материала стержня.

Так как $\sigma=\dfrac{N}{A}$ (3.6), то

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}. \tag{3.16}$$

Отсюда можно выразить

$$\sigma=\varepsilon E. \tag{3.17}$$

Используя полученное выражение (3.17), абсолютное удлинение стержня состоящего из одного участка можно выразить как

$$\Delta l=\varepsilon\cdot l=\frac{N\cdot l}{EA}. \tag{3.18}$$

Выражения 3.17-3.18 носят название *закона Р. Гука для деформации растяжения-сжатия* (1660г.):

Относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению.

Произведение $E\,A$ - называется *жесткостью поперечного сечения при растяжении и сжатии*.

3.1.9. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ. ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ (УСИЛИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ)

Прочность – свойство материалов сопротивляться разрушению, под воздействием внешних нагрузок.

Пластичность – свойство материалов менять свою форму под воздействием внешних нагрузок.

Механические свойства материалов (прочность, пластичность) могут быть оценены моделированием линейного напряженного состояния образца материала при так называемом испытании образца данного материала на разрыв.

По механическим свойствам материалы могут быть классифицированы на *пластичные* и *хрупкие*.

Здесь определяющим комплексным критерием при классификации материала является значение величины остаточных деформаций на момент разрушения его образца.

Хрупкие материалы разрушаются при малых остаточных деформациях, а пластичные – при больших.

Для определения базовых механических свойств металлов и их сплавов применяется разрывная машина (рис. 3.3).

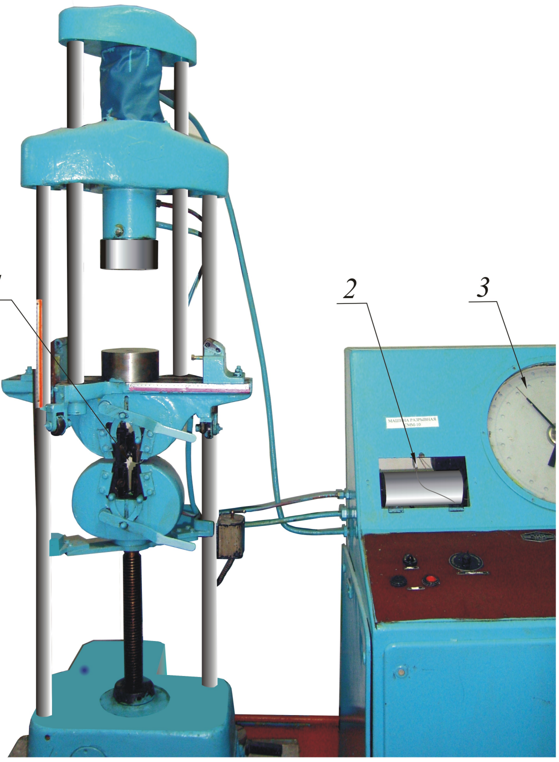


Рис. 3.3. Разрывная машина: *1* – самозажимные кулачки с устанавливаемым образцом; *2* – самозаписывающее устройство; *3* – измерительный барабан

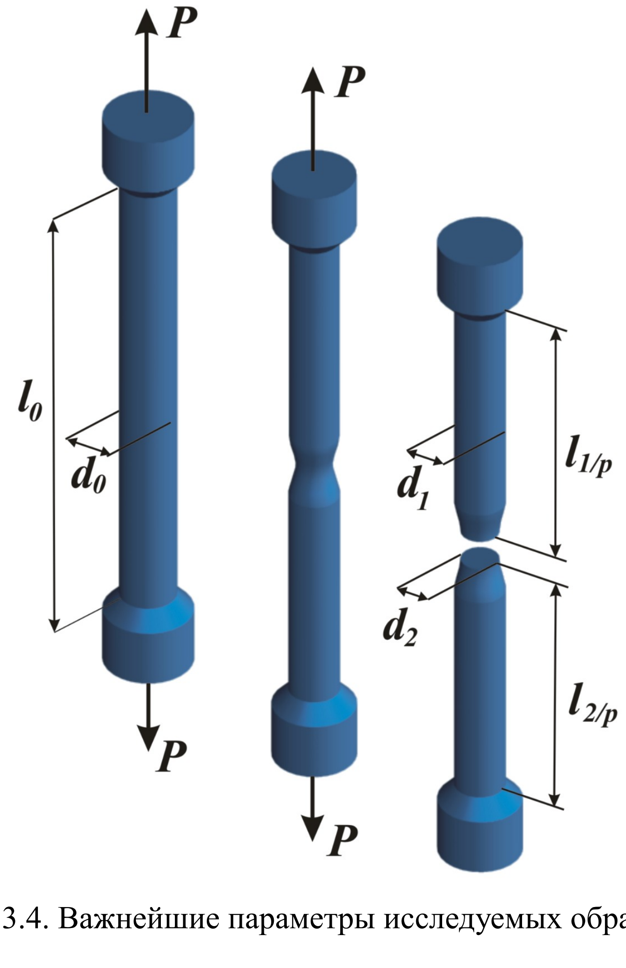


Рис. 3.4. Важнейшие параметры исследуемых образцов

Результаты испытаний на разрыв отслеживаются и фиксируются при помощи измерительного барабана и самозаписывающего устройства. Графическое отображение испытаний образца из пластичного материала на разрыв называется *диаграммой растяжения*.

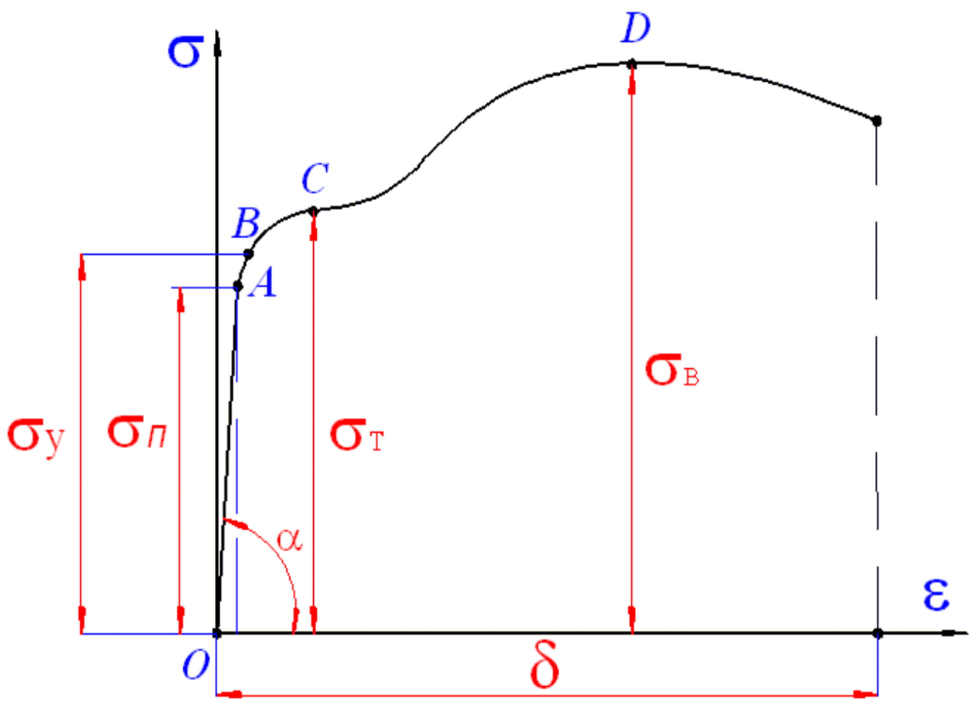


Рис. 3.5. Диаграмма напряжений растяжения малоуглеродистой стали

После обработки исходных данных, полученных при помощи самописца, на основании построенной диаграммы усилий растяжения, зная силовые и геометрические характеристики образца, рассчитывают и строят *диаграмму напряжений растяжений* (рис. 3.5).

Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется величина наибольшего напряжения, при котором соблюдается закон Гука. Кривая AB отображает процесс появления остаточных деформаций в пределах от 0 (точка A) до $0{,}001\ldots0{,}03\%$ (точка B).

Пределом упругости σ_y называется такое напряжение, превышение которого вызывает появление малых остаточных деформаций свыше 0,03%.

Кривая правее точки C - представляет собой так называемую «площадку текучести».

Пределом текучести σ_T называется такое напряжение, при котором происходит «течение» материала – процесс существенного роста величины деформации при примерно постоянной нагрузке. Визуальный признак достижения на испытуемом образце σ_T - появление наклонных под углом 45° к оси образца линий (так называемых линий Чернова – Людерса).

Пределом прочности или *временным сопротивлением* σ_B называется напряжение, вызываемое наибольшей нагрузкой, достижение которого обуславливает начало процесса разрушения (разрыва) материала образца.

Характеризует величину силы, необходимую, для того чтобы довести материал до разрушения при растяжении. Из диаграммы напряжений можно определить и следующее соотношение. На участке OA, где выполняется закон Гука: $tg\,\alpha=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}=E$. Таким образом, модуль продольной упругости E - графически интерпретируется в виде тангенса угла наклона к оси абсцисс прямолинейного участка диаграммы напряжений растяжения.

Остаточным относительным удлинением образца после разрыва называют отношение $\delta=(\Delta l/l_0)\cdot 100\ \%$, где $\Delta l=(l_{1p}+l_{2p})-l_0$ - абсолютное удлинение образца, l_0 - первоначальная длина образца.

Относительным остаточным сужением - после разрыва называется величина: $\psi=(A_0-A_2)/A_0\cdot 100\%$, где $A_0=(\pi\cdot d_0^2)/4$ - первоначальная площадь сечения; $A_2=(\pi\cdot d_2^2)/4$ - площадь в месте разрыва.

Способность материала сопротивляться ударным нагрузкам можно оценить величиной произведения $\sigma_B\delta$.

Твердость - это свойство материалов сопротивляться внедрению в них более твердых тел. Между пределом прочности и твердостью существует соотношение: $\sigma_B\approx 0,36\,H_B$. Формы диаграмм испытаний для различных материалов могут значительно отличаться между собой. На рисунке 3.6 приведены диаграммы напряжений, характеризующие механические свойства.

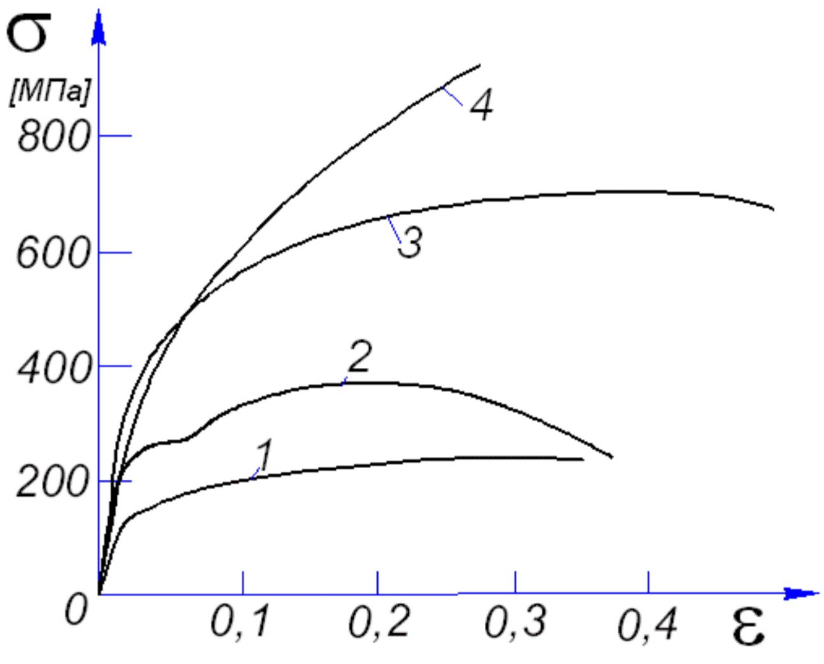


Рис. 3.6. Диаграммы напряжений для различных конструкционных сплавов:
1- бронзы $(\sigma_B=247\,МПа;\ \delta=36\%)$; *2*- углеродистой стали $(\sigma_B=358\,МПа;\ \delta=38\%)$;
3- никелевой стали $(\sigma_B=715\,МПа;\ \delta=54\%)$;
4 - марганцовистой стали $(\sigma_B=916\,МПа;\ \delta=30\%)$

Хрупкие материалы типа чугуна имеют другие диаграммы растяжения-сжатия. Деформации чугуна весьма малы. Одной из характерных особенностей является отсутствие прямолинейного участка как такового, при этом форма диаграмм сжатия и растяжения весьма схожа между собой.

Если рассматривать свойства чугуна, можно отметить хорошую сопротивляемость чугуна сжатию и значительно худшую - растяжению.

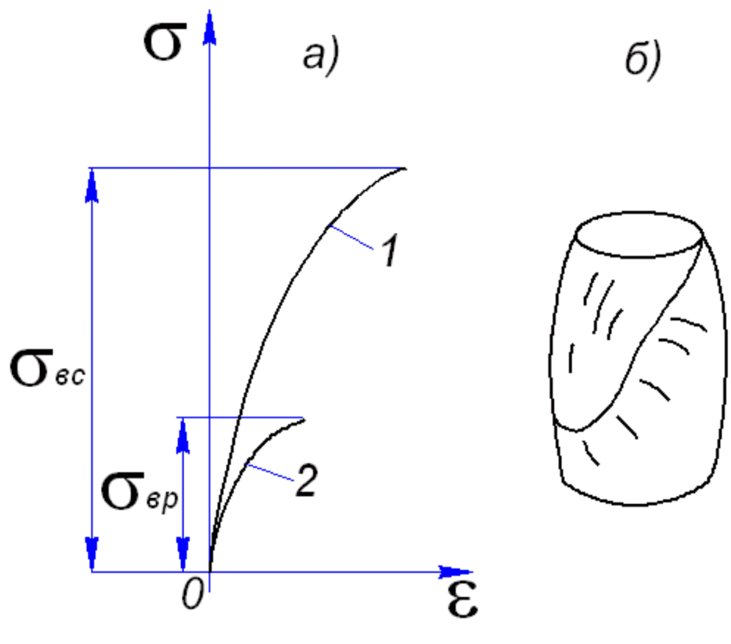


Рис. 3.7. Механические свойства чугуна и образец, разрушенный при испытании на сжатие

На рис. 3.7, *а* показаны диаграмма сжатия (линия 1) и диаграмма растяжения (линия 2) чугуна.

Таким образом, предел прочности чугуна на растяжение $\sigma_{вр} \approx (0{,}2\ldots0{,}33)\sigma_{вс}$, где $\sigma_{вс}$ - предел прочности чугуна при сжатии.

При сжатии чугун разрушается в результате образования наклонных под углом 45° к оси образца трещин, т.е. параллельно площадкам, в которых действуют максимальные касательные напряжения, см. рис.3.7, *б)*.

3.1.10. ЭСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

На практике, при проектировании конструкций для проверки прочностных расчетов и оценки текущего состояния действующих используют специальные устройства, именуемые тензоэлементами (тензодатчиками). При помощи этих устройств можно измерить действующие напряжения и усилия в реальной конструкции или проектной (при использовании модели и метода подобия). В электрических тензосистемах используется свойство проводника менять свое сопротивление вследствие изменения его длины и площади поперечного сечения. Экспериментально установлено, что в области малых деформаций существует линейная зависимость между относительным изменением сопротивления датчика и относительной деформацией его измерительного элемента (проволоки, фольги):

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \beta \frac{\Delta l}{l_0} = \beta \cdot \varepsilon \,. \quad \text{`} \tag{3.19}$$

Здесь R_0 - начальное сопротивление тензодатчика;

ΔR - абсолютный прирост сопротивления тензодатчика
β - коэффициент тензочувствительности - (зависит от материала и базы)
В качестве элементов тензодатчиков часто применяют константан $(60\% Cu + 40\% \mathrm{Ni})$, с коэффициентом тензочувствительности $\beta = 1{,}8 \ldots 2{,}1$.

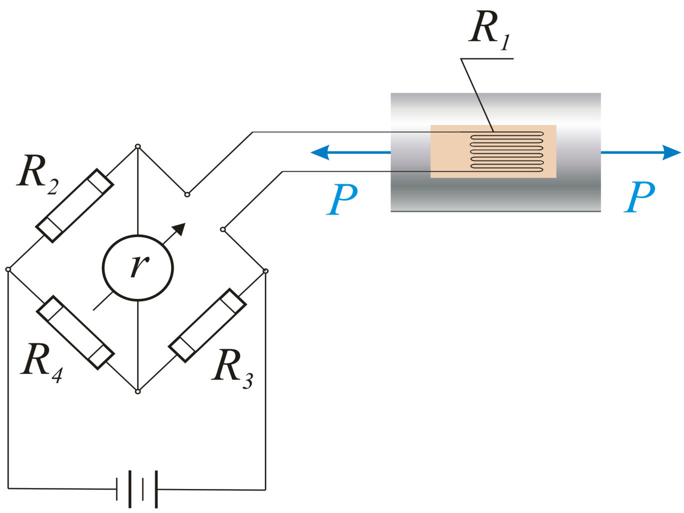


Рис. 3.8. Простейшая тензосистема. Мост Уитстона

Кроме того, есть высокоэффективные способы деформационных исследований с использованием акустических датчиков. При применении последних используется свойство конструкций при воздействии акустических колебаний определенным образом на них реагировать. Характер реакции (эхо и/или собственные звуки - «шумы») будет определяться величинами напряжений в исследуемых элементах. При исследовании ответственных и уникальных элементов создаются библиотеки (паспорта) акустических колебаний. На основании этих материалов можно оценить как текущее состояние элемента, так и его остаточный ресурс. Исследование в этой области перспективно в строительстве и таких областях, как самолетостроение, космическая отрасль, медицина, надо полагать, и энергетика, в том числе.

3.1.11. ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ»

Пример 3.1

Испытание двухметрового образца выявило, что значение предела пропорциональности для данного материала составляет $40\,МПа$. Известно, что при напряжении, равном половине предела пропорциональности, относительная продольная деформация равна $0{,}2\,мм$. Определить абсолютную продольную деформацию образца при напряжении, равном пределу пропорциональности. Определить модуль продольной упругости для данного материала.

Решение: Известно, что между относительными деформациями и напряжениями, не превышающими предел пропорциональности, выполняется закон Гука. Соответственно должны выполняться соотношения:

$$\sigma_{пц}=E\cdot\varepsilon_{пц} \quad \textbf{и} \quad 0{,}5\sigma_{пц}=E\cdot\varepsilon_{0{,}5\,пц}\Rightarrow \quad \varepsilon_{пц}=2\cdot\varepsilon_{0{,}5\,пц}=2\cdot2\cdot10^{-4}=4\cdot10^{-4}\,м.$$

Т.к. $\sigma_{пц}=E\cdot\varepsilon_{пц}\Rightarrow E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}=\dfrac{40\cdot10^6}{2\cdot10^{-4}}=2\cdot10^{11}\,Па$.

Т.к. $\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l_0}$, то $\Delta l_{пц}=\varepsilon_{пц}\cdot l_0=4\cdot10^{-4}\cdot2=0{,}8\,мм$.

Пример 3.2

Предел прочности для малоуглеродистой стали составляет $\sigma_B=120\,МПа$, а предел текучести равен $\sigma_T=80\,МПа$. Сохранит ли стержень сечением $A=4\,см^2$ свою прочность с учётом коэффициента запаса прочности, равного 1,5; если его растягивают с усилием $P=2{,}2\,т$? Ответ обосновать расчётом.

Решение: Малоуглеродистая сталь является пластичным материалом, для которого предельным напряжением является предел текучести. С учетом запаса прочности допускаемое напряжение для данного стержня составит:

$$[\sigma]=\frac{\sigma_T}{n}=\frac{80\cdot10^6}{1{,}5}=53{,}33\,МПа.$$

Произведем расчёт на прочность по допускаемому напряжению:
Условие прочности будет следующим:

$$\sigma=\frac{N}{A}\leqslant[\sigma]. \qquad (*)$$

Подставляя исходные и расчётные данные задачи в последнее неравенство, получим:

$$\sigma=\frac{2{,}2\cdot10^4}{4\cdot10^{-4}}=55\,МПа\geqslant[53{,}33\,МПа].$$

Так как условие прочности (*) не выполняется, стержень будет разрушен.

Пример 3.3

Ступенчатая консоль (рис. 3.9) нагружена системой продольных сил. Построить эпюры: внутренних продольных сил, нормальных напряжений, абсолютных удлинений. Выполнить проверочный расчёт на прочность, если допускаемое напряжение для материала стержня $[\sigma]=100\,МПа$, а $E=200\,ГПа$. Весом стержня пренебречь.

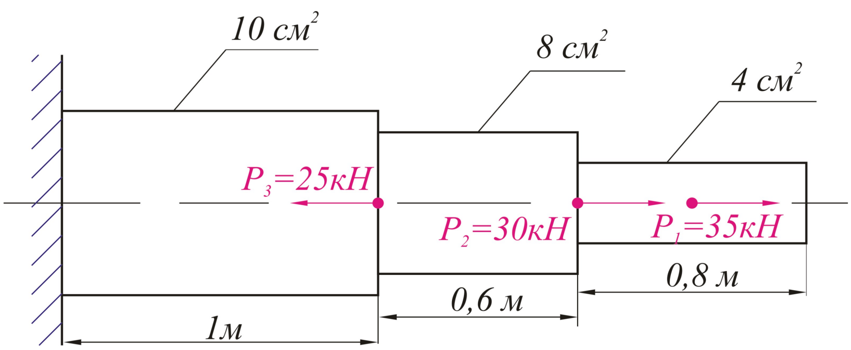


Рис. 3.9. К примеру 3.3

Решение

Для решения этой задачи применим универсальный метод сечений.

В данном случае целесообразно использовать *метод сечения справа*. Разобьем консоль на участки. Всего у нас будет 4 участка. Пронумеруем их справа-налево (в соответствии с выбранным методом сечения справа). В произвольных местах выбранных участков, в их пределах проведём соответствующие поперечные сечения и рассмотрим каждый участок в отдельности.

Первый участок

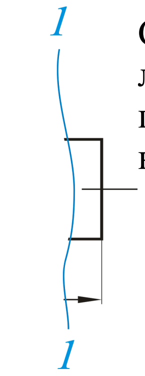


Рис. 3.10. К рассмотрению первого участка (пример 3.3)

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения *1-1*. В данном случае правее сечения *1-1* отсутствуют продольные усилия, поэтому внутренняя сила, нормальное напряжение и удлинение этого участка равно нулю, т.е.:

$$N_1=0;\ \sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=0;\ \Delta l_1=0.$$

Второй участок

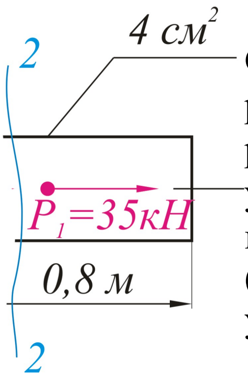


Рис. 3.11. К рассмотрению второго участка (пример 3.3)

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения *2-2*. Точка приложения силы P_1 расположена правее сечения *2-2*, поэтому данная сила войдет в уравнение продольных сил этого участка. Так как P_1 направлена от сечения *2-2,* то она вызывает растягивающее (положительное) внутреннее продольное усилие на данном участке:

$$N_2=+P_1=35\,kH=const.$$

Нормальное напряжение определится как

$$\sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{35\cdot10^3}{4\cdot10^{-4}}=87{,}5\,МПа.$$

Абсолютное удлинение второго участка:

$$\Delta l_2=\frac{N_2\cdot l_2}{EA}=\frac{35\cdot10^3\cdot0{,}4}{200\cdot10^9\cdot4\cdot10^{-4}}=0{,}0175\cdot10^{-2}\,м.$$

Третий участок

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения *3-3*. Точки приложений сил P_1 и P_2 расположены правее сечения *3-3*, поэтому данные силы войдут в уравнение продольных сил этого участка.
Так как P_1 и P_2 направлены от сечения *3-3,* то они вызывают растягивающее (положительное) внутреннее продольное усилие на данном участке:

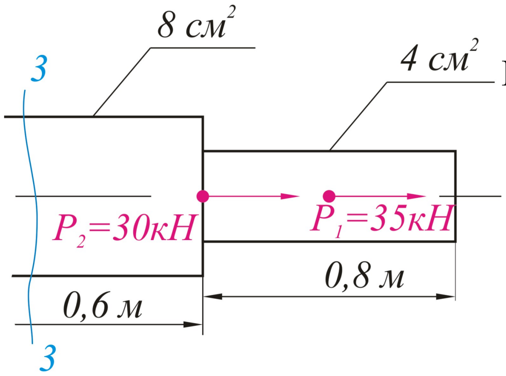


Рис. 3.12. К рассмотрению третьего участка (пример 3.3)

$$N_3 = +P_1 + P_2 = 35 + 30 = 65\, kH = const.$$

Нормальное напряжение определится как

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{65 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 81{,}25\, МПа.$$

Абсолютное удлинение третьего участка:

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{EA} = \frac{65 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0244 \cdot 10^{-2}\, м.$$

Четвёртый участок

Согласно методу сечения справа, отбрасываем всё, что расположено левее сечения *4-4* Точки приложений сил P_1 P_2 и P_3 расположены правее сечения *4-4*, поэтому данные силы войдет в уравнение продольных сил этого участка.

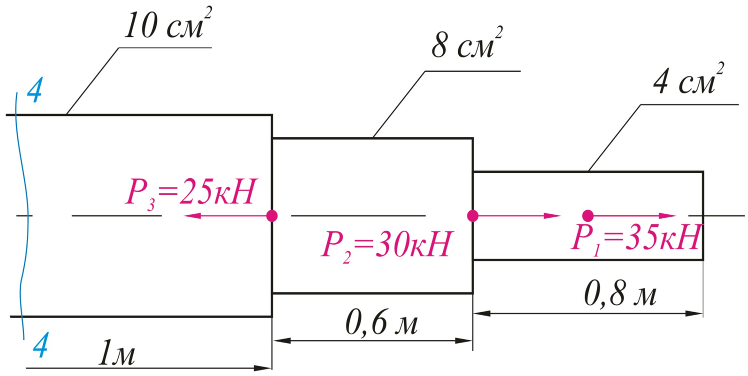


Рис.3.13. К рассмотрению четвёртого участка (пример 3.3)

Так как P_1 и P_2 направлены от сечения *4-4,* то они вызывают растягивающее (положительное) внутреннее продольное усилие на данном участке, а сила P_3 к сечению, и она вызывает сжимающее (отрицательное) внутреннее продольное усилие на участке:

$$N_4 = +P_1 + P_2 - P_3 = 35 + 30 - 25 = 40\, kH = const.$$

Нормальное напряжение определится как

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{40 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 40\, МПа.$$

Абсолютное удлинение четвёртого участка:

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{EA} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}025 \cdot 10^{-2}\, м.$$

На основании данных расчёта выполняем построение соответствующих эпюр (рис. 3.14).

Из построенных эпюр видно, что наиболее опасным участком является второй, где нормальное напряжение достигает наибольшей по модулю величины $87{,}5\, МПа$.

Тем не менее, это напряжение не превосходит допускаемое, поэтому делаем вывод о том, что стержень под действием нагрузок будет сохранять свою прочность.

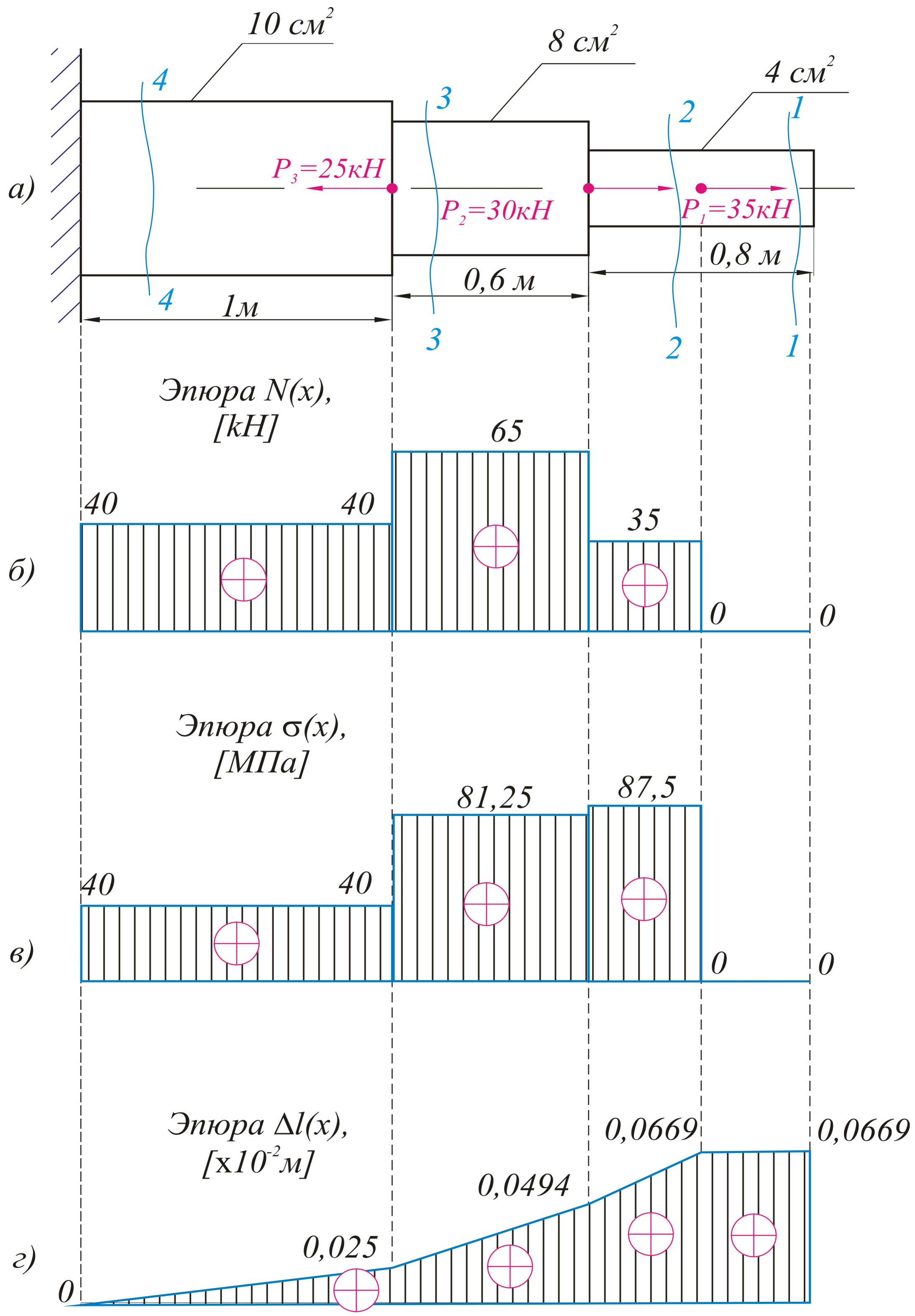


Рис. 3.14. К примеру 3.3: *а)* расчётная схема; *б)* эпюра внутренних продольных усилий; *в)* эпюра нормальных напряжений; *г)* эпюра абсолютных удлинений

3.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

3.2.1. АКТУАЛЬНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В общем случае, подбор сечений элементов по условиям прочности, жесткости и устойчивости для различных конструкций относится к компетенции «Сопротивление материалов». Очевидно, что поперечное сечение i - го элемента представляет собой след от секущей плоскости, проведенной перпендикулярно оси симметрии или прямой, параллельной направлению наибольшего распространения рассматриваемого элемента. Также очевидно и то, что поперечное сечение представляет собой геометрическую площадку определенной формы, ограниченную контуром, с величиной площади, равной A_i. Интуитивно при подборе размеров поперечного сечения по условиям прочности можно было бы руководствоваться принципом: большая нагрузка – большая величина площади A_i поперечного сечения. Однако данный принцип не является верным для общего случая нагружения. Доказательство: берем брус прямоугольного сечения (обычную деревянную линейку), имитируем консоль с жесткой заделкой, для этого фиксируем данный брус, кладя его на большую полку. Прикладываем к нему небольшую поперечную силу в крайнем свободном сечении и констатируем характер деформации бруса (ощутимая величина прогиба крайнего сечения), а также возможность его излома при приложении несколько большей силы. Далее, фиксируем брус на малую полку, прикладываем к нему даже несколько большую силу и констатируем крайне малую величину прогиба, не соизмеримую с ранее полученной величиной. При этом отмечаем, что в обоих случаях вылет консоли и площадь поперечного сечения бруса остаются одними и теми же. Можно предположить, что на величину деформации и прочности элемента влияет то, как его поперечное сечение располагается относительно плоскости действия внешней нагрузки, которая в этом сечении элемента (при изгибе) будет вырождаться в прямую. Иными словами, на величину деформации и прочности влияет то, как рассматриваемое сечение расположено по отношению к этой прямой (оси). Отсюда вывод: в общем случае, руководствоваться при расчётах на прочность и жесткость элемента только площадью его поперечного сечения недостаточно. Необходимо рассматривать другие геометрические характеристики поперечных сечений, связанные с их расположением по отношению к осям (точкам), лежащим в их плоскостях.

3.2.2. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ. ИХ ОБЩИЕ СВОЙСТВА

В сопротивлении материалов используются следующие характеристики геометрических сечений, рис. 3.15.

Площадь является простейшей характеристикой поперечного сечения. Если представить себе сечение, состоящее из бесчисленного множества элементарных площадок dA, то площадь всего сечения:

$$A = \int_A dA. \tag{3.20}$$

Статическим моментом сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всему сечению A сумма произведений площадей элементарных площадок dA на их расстояния до этой оси.

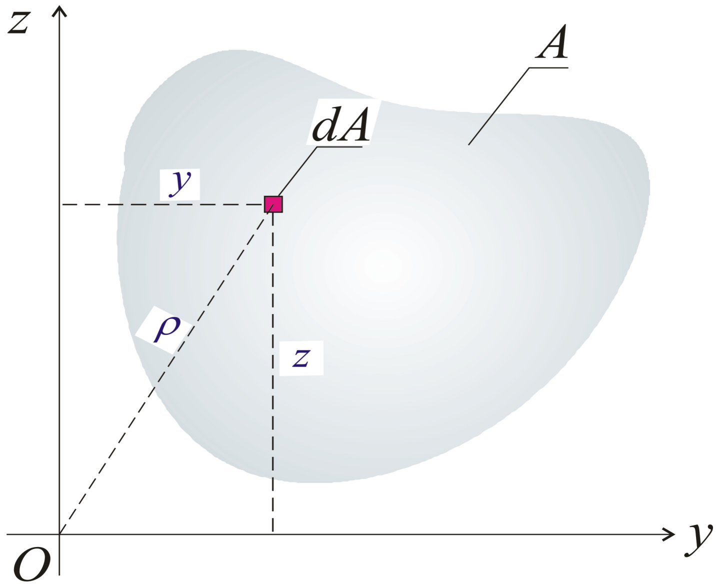


Рис. 3.15. Параметры геометрических характеристик

То есть для комплекта осей y, z:

$$S_Z = \int_A ydA; \tag{3.21}$$

$$S_Y = \int_A zdA. \tag{3.21$'$}$$

В теоретической механике имеются формулы, для определения координат центров тяжести плоской фигуры, для комплекта осей y, z:

$$y_C = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i}; \tag{3.22}$$

$$z_C = \frac{\sum (A_i z_i)}{\sum A_i}. \tag{3.22$'$}$$

Если размеры элементарной площадки $A_i \to 0$, числители в формулах (2.3) будут представлять собой соответствующие статические моменты, т.е.:

$$S_z = \int_A ydA = y_C A; \tag{3.23}$$

и

$$S_y = \int_A zdA = z_C A. \tag{3.23$'$}$$

Таким образом, статический момент сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, будет равен произведению площади данного сечения на расстояние ее центра тяжести до этой оси. Свойства статического момента:

1) Статический момент может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.
2) Статический момент сечения относительно оси, лежащей в плоскости сечения и проведенной через ее центр тяжести равен нулю.
3) Для определения статического момента сечения можно применять метод разбиения, то есть определять статический момент всего сечения как сумму статических моментов отдельных ее частей, относительно той же оси $S_J = \sum S_{J_i}$.
4) Нельзя суммировать статические моменты частей сечения, вычисленные относительно разных осей.

Статический момент в системе СИ измеряется в $\left[м^3 \right]$, часто на практике статический момент измеряют в $\left[см^3 \right]$.

Осевым (или экваториальным) моментом инерции сечения относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всему сечению A сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат их расстояний до этой оси. То - есть, для комплекта осей y, z:

$$J_y = \int_F z^2 dA \quad \text{и} \quad J_z = \int_A y^2 dA. \tag{3.24}$$

Полярным моментом инерции сечения, относительно какой-либо точки (полюса), лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всему сечению A сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты их расстояний до точки. То есть для комплекта осей y, z:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \tag{3.25}$$

Свойства осевых и полярного момента инерции:

1) Осевые и полярные моменты инерции величины всегда положительные и не равны нулю.
2) Осевой момент инерции сложного сечения можно вычислять как сумму моментов инерции простых фигур, взятых относительно той же оси.
3) Полярный момент инерции сложного сечения относительно какой-либо точки, лежащей в плоскости сечения, равен сумме полярных моментов инерции составляющих его частей относительно той же точки.
4) Нельзя суммировать моменты инерции, вычисленные относительно разных осей и точек.
5) Сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости сечения, равна полярному моменту инерции этого сечения, относительно точки пересечения

указанных осей, т.е. $J_y + J_z = J_p$.

Центробежным моментом инерции сечения относительно каких-либо двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости сечения, называется взятая по всей площади A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния от этих осей. То есть для комплекта осей y, z:

$$J_{yz} = \int_A yzdA. \tag{3.26}$$

Свойства центробежного момента:

1) Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.
2) Центробежный момент инерции сечения относительно осей, одна из которых или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю.
3) Центробежный момент инерции сложного сечения относительно каких-либо двух взаимно перпендикулярных осей равен сумме центробежных моментов инерции составляющих его частей, относительно этих же осей.

Все рассмотренные моменты инерции измеряются в СИ $[м^4]$, для удобства, как правило, в сопротивлении материалов моменты инерции измеряют в $[см^4]$.

3.2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ

Моменты инерции относительно осей $y, z,$ проходящих через центр тяжести прямоугольного сечения (рис. 3.16), определяются по формулам:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \text{ и } J_z = \frac{hb^3}{12}. \tag{3.27}$$

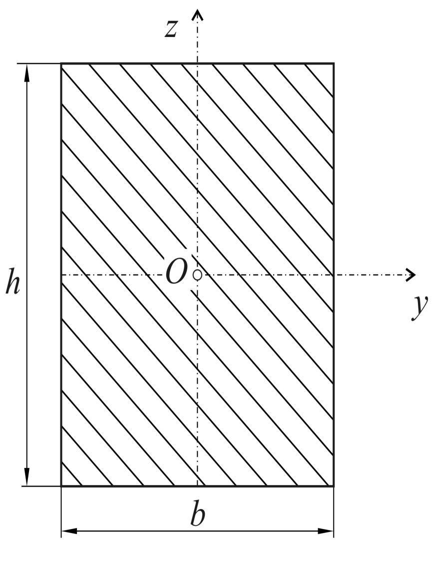


Рис. 3.16. Определение геометрических характеристик прямоугольного сечения, относительно главных центральных осей

Рассмотрим сечение в виде круга (рис. 3.17).

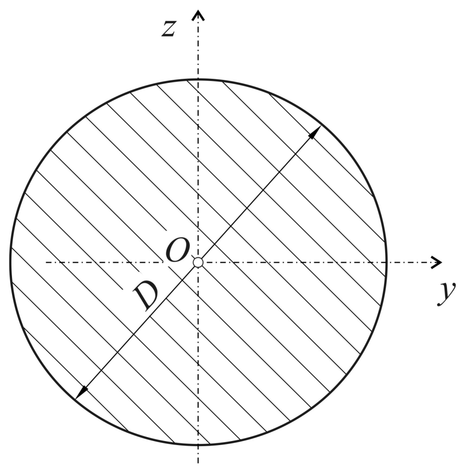


Рис. 3.17. Определение геометрических характеристик круглого сечения

Моменты инерции относительно осей y, z, проходящих через центр тяжести для сплошного круглого сечения, см. рис. 3.17, определяются как

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64}. \tag{3.28}$$

Полярный момент:

$$J_p = J_y + J_z = 2 \cdot \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32}. \tag{3.29}$$

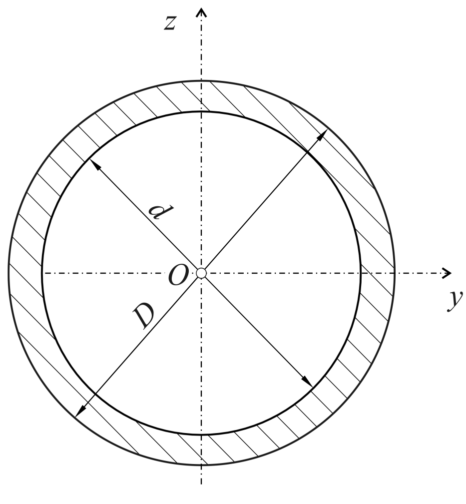


Рис. 3.18. Определение геометрических характеристик кольцевого сечения

Моменты инерции относительно осей y, z, проходящих через центр тяжести кольцевого сечения с наружным диаметром D и внутренним d, рис. 3.18, определяются:

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64}\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right). \qquad (3.30)$$

Полярный момент:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right). \qquad (3.31)$$

3.2.4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

При рассмотрении практических задач не всегда удобно пользоваться интегральной формой решения. Гораздо рациональней применение комбинированного подхода. Данный подход заключается в разбиении сложного сечения на более простые сечения, моменты инерции которых относительно своих центров тяжести известны, а также использовании универсальных формул изменения величин моментов инерции сечения при параллельном переносе и повороте сечения.

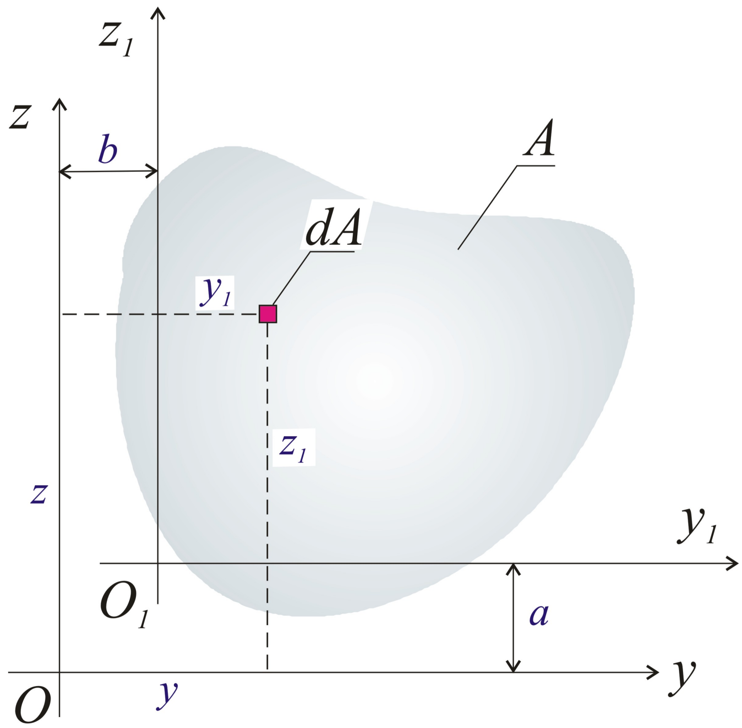


Рис. 3.19. Моменты инерции осей при параллельном переносе осей

Если существует необходимость перехода к новой системе осей, параллельных соответственно старым координатным осям, применяют следующие зависимости.

Допустим, в старой системе координаты элементарной площадки имеют значения y и z. В новой системе координат они будут равны:
$z_1 = z - a$ и $y_1 = y - b$.

То есть:

$$J_{y_1}=\int_A z_1^2 dA=\int_A (z-a)^2 dA=\int_A z^2 dA-2a\int_A z dA+a^2 A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow J_{y_1}=J_y-2aS_y+a^2 A.$$
Если ось y проведена через центр тяжести сечения, то статический момент $S_y=0$ и выражение принимает следующий вид: $J_{y_1}=J_y+a^2 A$. Аналогично для случая, когда ось y проходит через центр тяжести сечения: $J_{z_1}=J_z+b^2 A$.

Из данной формулы следует: из всех моментов инерции относительно параллельных осей осевой момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, будет иметь минимальное значение.
Для центробежного момента: $J_{y_1 z_1}=J_{yz}-aS_z-bS_y+abA$.

В случае, если старая система координат yz находится в центре тяжести сечения, то $S_y=0$ и $S_z=0$ и $J_{y_1 z_1}=J_{yz}+abA$.
Если сечение симметрично и одна или обе оси совпадают с осью симметрии, то $J_{yz}=0$ и $J_{y_1 z_1}=abA$.

3.2.5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Допустим, известны моменты инерции J_z, J_y, J_{zy} сечения A, относительно взаимно перпендикулярных осей y и z исходной системы координат с началом в точке O, рис. 3.20.

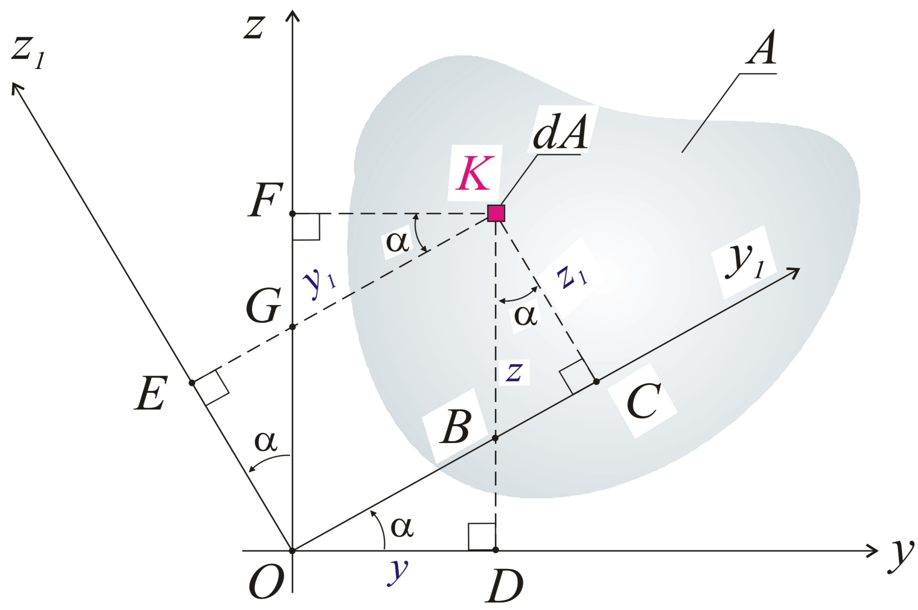


Рис. 3.20. Моменты инерции при повороте осей

Выделим на плоском сечении A элементарную площадку dA. Её координаты в системе осей Oyz будут y, z. Принимая положительным направление поворота против часовой стрелки, повернем исходные оси относительно O на угол α. Обозначим новую систему как Oy_1z_1. Координаты элементарной площадки dA в новой системе отчёта станут

y_1, z_1. Определим геометрические характеристики сечения относительно новой системы осей. С учетом поворота на угол α, для новой системы осей Oy_1z_1:

$$J_{y_1} = J_y \cos^2\alpha - J_{yz} \sin 2\alpha \cdot + J_z \sin^2\alpha, \tag{3.32}$$

и

$$J_{z_1} = J_y \sin^2\alpha + J_{yz} \sin 2\alpha \cdot + J_z \cos^2\alpha. \tag{3.33}$$

Складывая левые и правые части выражений (3.32-3.33), выведем важное свойство осевых моментов при повороте:

$$J_p = J_{y_1} + J_{z_1} = J_y + J_z. \tag{3.34}$$

Согласно (3.34) с*умма осевых моментов постоянна и инвариантна при любом угле поворота этих осей относительно полюса, являющегося точкой пересечения данных осей.* Определим центробежный момент инерции $J_{y_1z_1}$ относительно новых осей y_1, z_1.

$$J_{y_1z_1} = \frac{J_y - J_z}{2} \cdot (\sin 2\alpha) + J_{yz} \cdot \cos 2\alpha. \tag{3.35}$$

В случае, когда исходные оси представляют собой оси симметрии сечения (являются главными), то выражение (3.35) приводится к более простому виду:

$$J_{y_1z_1} = \frac{J_y - J_z}{2} \cdot (\sin 2\alpha). \tag{3.36}$$

3.2.6. ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

При некоторых положениях угла α величины моментов инерции могут достигать максимума и минимума, соответственно. Экстремальные значения осевых моментов инерции называются *главными моментами инерции*. Оси, относительно которых эти значения были достигнуты, называются *главными осями инерции*. Свойства, используемые для инициализации главных осей инерции сечения:

1. Две взаимно перпендикулярные оси, по крайней мере одна из которых совпадает с осью симметрии сечения, будут являться главными осями инерции.

2. Относительно главных осей, центробежный момент равен нулю.

Положение главных осей симметрии определяется путем нахождения величины угла α_0, на который необходимо повернуть текущие оси, имеющие не экстремальные значения J_z, J_y и определенную величину J_{zy}.

Согласно (3.35), можно рассмотреть следующие варианты получаемых значений углов α_0:

$$tg\,2\alpha_0=\frac{2J_{yz}}{J_z-J_y} \Rightarrow \alpha_0=\frac{1}{2}arctg\frac{2J_{yz}}{J_z-J_y}. \qquad (3.37)$$

1. Если $J_y>J_z$ и $J_{yz}<0$, то величина угла $\alpha_0>0$, и этот угол должен быть отложен против часовой стрелки от оси y.

2. Если $J_y>J_z$ и $J_{yz}>0$, то величина угла $\alpha_0<0$, и этот угол должен быть отложен по ходу часовой стрелки от оси y.

3. Если $J_y<J_z$ и $J_{yz}<0$, то величина угла $\alpha_0<0$, и этот угол должен быть отложен по ходу часовой стрелки от оси y.

4. Если $J_y<J_z$ и $J_{yz}>0$, то величина угла $\alpha_0>0$, и этот угол должен быть отложен против часовой стрелки от оси y.

Таким образом, при положительном значении α_0, для определения положения главных осей инерции, ось y поворачивают на угол α_0 против часовой стрелки. Знак угла поворота α_0, а соответственно, и направление поворота определяется соотношением осевых моментов инерции J_z, J_y, а также знаком определенного ранее центробежного момента J_{zy}.
При отрицательном – ось y поворачивают по ходу часовой стрелки.
Значения главных моментов инерции определяют по формуле:

$$J_{min}^{max}=\frac{J_z+J_y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(J_z-J_y\right)^2+4J_{yz}^2}. \qquad (3.38)$$

3.2.7. МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ СЕЧЕНИЙ. ПОЛЯРНЫЙ МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ. РАДИУС ИНЕРЦИИ. ЭЛЛИПС ИНЕРЦИИ

Осевым моментом сопротивления называется отношение момента инерции относительно данной оси к расстоянию до наиболее удаленной точки поперечного сечения.

$$W_z=\frac{J_z}{y_{max}} \text{ и } W_y=\frac{J_y}{z_{max}}. \qquad (3.39)$$

Измеряются $\left[м^3\right]$ или $\left[см^3\right]$. Практическое значение имеют моменты сопротивления относительно главных осей.

Для прямоугольного сечения:

$$W_y=\frac{J_y}{h/2}=\frac{bh^2}{6} \text{ и } W_z=\frac{J_z}{b/2}=\frac{hb^2}{6}. \qquad (3.40)$$

Для круглого сплошного сечения:

$$W_y = W_z = \frac{J_y}{r} = \frac{\pi \cdot r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \qquad (3.41)$$

Для трубчатого сечения с отношением $\frac{d}{D} = \alpha$:

$$W_y = W_z = \frac{J_z}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right). \qquad (3.42)$$

Полярным моментом сопротивления называется отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}. \qquad (3.43)$$

В качестве полюса принимается центр тяжести поперечного сечения.

Для круглого сплошного сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi \cdot r^3}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \qquad (3.44)$$

Для трубчатого сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right). \qquad (3.45)$$

Радиусом инерции сечения относительно оси называется некоторая величина i, произведение квадрата которой на площадь сечения A дает нам величину момента инерции сечения относительно этой оси. Из определения следует:

Радиусы инерции сечения относительно оси y и z:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad \text{и} \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}; \quad [м],[см]. \qquad (3.46)$$

Данные величины представляют собой отрезки полуосей, на которых выполняется построение так называемого *эллипса инерции*. Из центра эллипса, по осям y, z откладывают значения i перпендикулярно тем осям, чей индекс они содержат, т.е.: $i_y \perp y; i_z \perp z$. Сущность эллипса инерции сечения заключается в том, что он показывает, как меняются соотношение между осевыми моментами инерции при повороте осей на некоторый угол.

Пример 3.4. Для сложного несимметричного плоского сечения, полосы $0{,}5 \times 10\,см$ и равнобочного уголка $L50 \times 8$ по ГОСТ 8509-93.:

1. Определить центр тяжести сечения;
2. Определить положение главных осей и значения главных моментов.
3. Построить центральный эллипс инерции.
4. Поэтапно интерпретировать расчет соответствующей графикой.

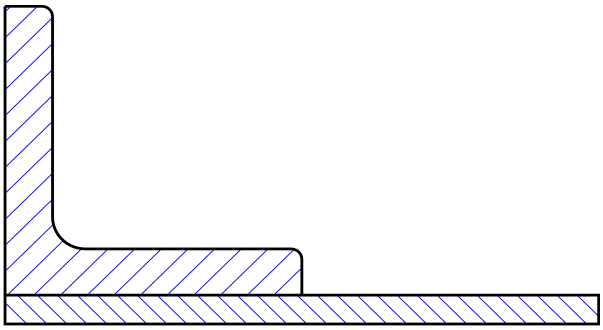


Рис. 3.21. К условию примера 3.4

Из сортамента по ГОСТ 8509-93 выписываем необходимые данные для равнобочного уголка $L50\times8$.

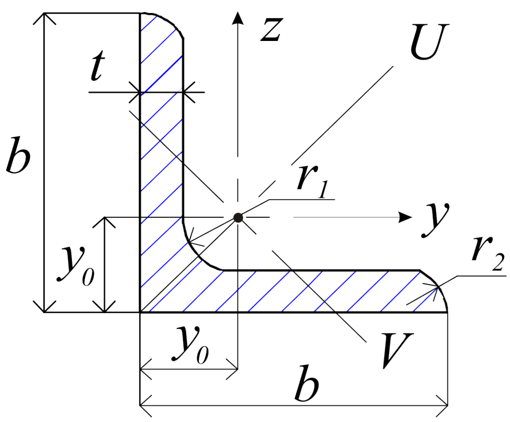


Рис. 3.22. К сведениям из сортамента (пример 3.4)

Таблица 3.1

Сведения из сортамента

п.п.	b	t	r_1	r_2	A	$I_y=I_z$	W_y	i_y	I_u	i_u	I_v	W_{vo}	i_v	I_{yz}	y_o	P
Номер профиля	см	см	см	см	см^2	см^4	см^3	см	см^4	см	см^4	см^3	см	см^4	см	кг/м
L50x8	5.00	0.80	0.55	0.180	7.410	16.510	4.760	1.490	26.030	1.87	6.98	3.220	0.970	9.52	1.53	6

Таким образом, для равнобочного уголка $L50\times8$: $J_y=J_z=16{,}51\,см^4$; $A=7{,}41\,см^2$; $J_U=J_{max}=26{,}03\,см^4$; $J_V=J_{min}=6{,}98\,см^4$; $b=5\,см;\ t=0{,}8\,см;\ y_0=1{,}53\,см$. Для поперечного сечения полосы определим площадь $A=0{,}5\cdot10=5\,см^2$. Строим в масштабе сечения, рис. 3.23, параллельно ведем расчет:

Обозначим сечение полосы как сечение №1, а сечение равнобочного уголка как сечение №2. Проведём систему вспомогательных осей yOz таким образом, чтобы любая точка сечения имела неотрицательные координаты. Определим положение центров тяжестей отдельных площадей в системе вспомогательных осей yOz.

Для полосы O_1: $y_1=5\,см;\ z_1=0{,}25\,см;$

Для равнобочного уголка O_2: $y_2=1{,}53\,см;\ z_2=2{,}03\,см$.

Определим положение центра тяжести всего сечения:

$$y_C = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5 \cdot 5 + 1{,}53 \cdot 7{,}41}{5 + 7{,}41} = 2{,}928\, см;$$

$$z_C = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0{,}25 \cdot 5 + 2{,}03 \cdot 7{,}41}{5 + 7{,}41} = 1{,}313\, см.$$

Через полученный центр тяжести проведем центральные оси y_C и z_C.
Определим расстояния между осями:

$a_1 = z_1 - z_C = 0{,}25 - 1{,}313 = -1{,}063\, см$ - расстояние между осями y_1 и y_C;
$a_2 = z_2 - z_C = 2{,}03 - 1{,}313 = 0{,}717\, см$ - расстояние между осями y_2 и y_C;
$b_1 = y_1 - y_C = 5 - 2{,}928 = 2{,}072\, см$ - расстояние между осями z_1 и z_C;
$b_2 = y_2 - y_C = 1{,}53 - 2{,}928 = -1{,}398\, см$ - растояние между осями z_2 и z_C.

Определим осевые моменты относительно центральных осей y_C и z_C:

$$J_{y_C} = J_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2.$$

Здесь J_{y_1} - момент инерции прямоугольного сечения полосы относительно собственной центральной оси y_1, величину которого можно определить по формуле: $J_{y_1} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10 \cdot 0{,}5^3}{12} = 0{,}1042\, см^4$, а также J_{y_2} - момент инерции равнобочного уголка относительно собственной центральной оси y_2, величина которого берётся из сортамента. $A_1 = 5\, см^2$ и $A_2 = 7{,}41\, см^2$ - площади соответствующих сечений. Таким образом:

$$J_{y_C} = 0{,}1042 + (-1{,}063)^2 \cdot 5 + 16{,}51 + 0{,}717^2 \cdot 7{,}41 = 26{,}07\, см^4;$$

По аналогии:

$$J_{z_C} = J_{z_1} + b_1^2 \cdot A_1 + J_{z_2} + b_2^2 \cdot A_2.$$

Здесь J_{y_1} - момент инерции прямоугольного сечения полосы относительно собственной центральной оси y_1, величину которого можно определить по формуле: $J_{z_1} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{0{,}5 \cdot 10^3}{12} = 41{,}67\, см^4$, а также J_{z_2} - момент инерции равнобочного уголка относительно собственной центральной оси z_2, величина которого берётся из сортамента. $A_1 = 5\, см^2$ и $A_2 = 7{,}41\, см^2$ - площади соответствующих сечений. Таким образом:

$$J_{z_C} = 41{,}67 + 2{,}072^2 \cdot 5 + 16{,}51 + (-1{,}398)^2 \cdot 7{,}41 = 94{,}13\, см^4.$$

Определим центробежный момент инерции относительно центральных осей y_C и z_C:

$$J_{y_C z_C} = J_{y_1 z_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot A_1 + J_{y_2 z_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot A_2.$$

В данной формуле $J_{y_1 z_1} = 0$, так как рассматриваемые центральные оси прямоугольного сечения являются для него главными. Значение центробежного момента инерции равнобочного уголка $J_{y_2 z_2}$ относительно собственных центральных осей y_2 и z_2 рассчитаем по формуле:

$$J_{y_2 z_2}=\frac{J_{U_2}-J_{V_2}}{2}\cdot\sin 2\alpha_0.$$

В данной формуле угол $\alpha_0=-45^\circ$ - угол, на который мы поворачиваем главную ось U_2 до совмещения с центральной осью y_2 (поворот по часовой стрелке и $\alpha_0<0$).

$$J_{y_2 z_2}=\frac{26{,}03-6{,}98}{2}\cdot\sin(2\cdot(-45^\circ))=-9{,}225\,см^4.$$

Таким образом:

$$J_{y_C z_C}=J_{y_1 z_1}+a_1\cdot b_1\cdot A_1+J_{y_2 z_2}+a_2\cdot b_2\cdot A_2\Rightarrow$$

$$J_{y_C z_C}=0+(-1{,}063)\cdot 2{,}072\cdot 5-9{,}225+0{,}717\cdot(-1{,}998)\cdot 7{,}41=-30{,}85\,см^4.$$

Определим положение главных осей по формуле:

$$tg\,2\alpha=\frac{J_{y_2 z_2}}{J_{z_C}-J_{y_C}}=\frac{2\cdot(-30{,}85)}{94{,}13-26{,}07}\quad\Rightarrow\alpha\approx-21{,}1^\circ.$$

Знак «минус» говорит о том, что положение главной оси всего сечения U определяется поворотом от положения центральной оси y_C по часовой стрелке. Восстанавливая к оси U перпендикуляр через точку C, получим положение второй главной оси сечения V.

Вычислим главные моменты инерции сечения по формулам:

$$J_{\substack{max\\min}}=\frac{J_{z_C}+J_{y_C}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(J_{z_C}-J_{y_C})^2+4J_{y_C z_C}^2}$$

Так как $J_{z_C}>J_{y_C}$, то ось $J_V=J_{max}$ и $J_U=J_{min}\Rightarrow$

$$J_V=J_{max}=\frac{94{,}13+26{,}07}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(94{,}13-26{,}07)^2+4\cdot(-30{,}85)^2}=106{,}032\,см^4;$$

$$J_U=J_{min}=\frac{94{,}13+26{,}07}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(94{,}13-26{,}07)^2+4\cdot(-30{,}85)^2}=14{,}168\,см^4.$$

Выполним проверку:

$$J_{y_C}+J_{z_C}=J_U+J_V:$$

$$26{,}07+94{,}13=106{,}032+14{,}168\ \Rightarrow 120{,}2=120{,}2.\quad \text{Истинно.}$$

Рассчитываем размеры полуосей и на главных осях выполняем построение центрального эллипса инерции.

$$i_V=\sqrt{\frac{J_V}{\sum A_i}}=\sqrt{\frac{106{,}032}{5+7{,}41}}\Rightarrow\ i_V=2{,}92\,см;$$

$$i_U=\sqrt{\frac{J_U}{\sum A_i}}=\sqrt{\frac{14{,}168}{5+7{,}41}}\Rightarrow\ i_U=1{,}07\,см.$$

Откладываем полуоси $i_U\perp U$ и $i_V\perp V$ в обе стороны от центра тяжести сечения по главным осям. Получив четыре контрольные точки, аппроксимируя, соединяем их замкнутой кривой. Полученная линия является центральным эллипсом инерции. Эллипс инерции показывает, как меняется соотношение между центральными моментами инерциями при повороте осей. Результаты расчётов представляем в виде чертежа, рис. 3.23.

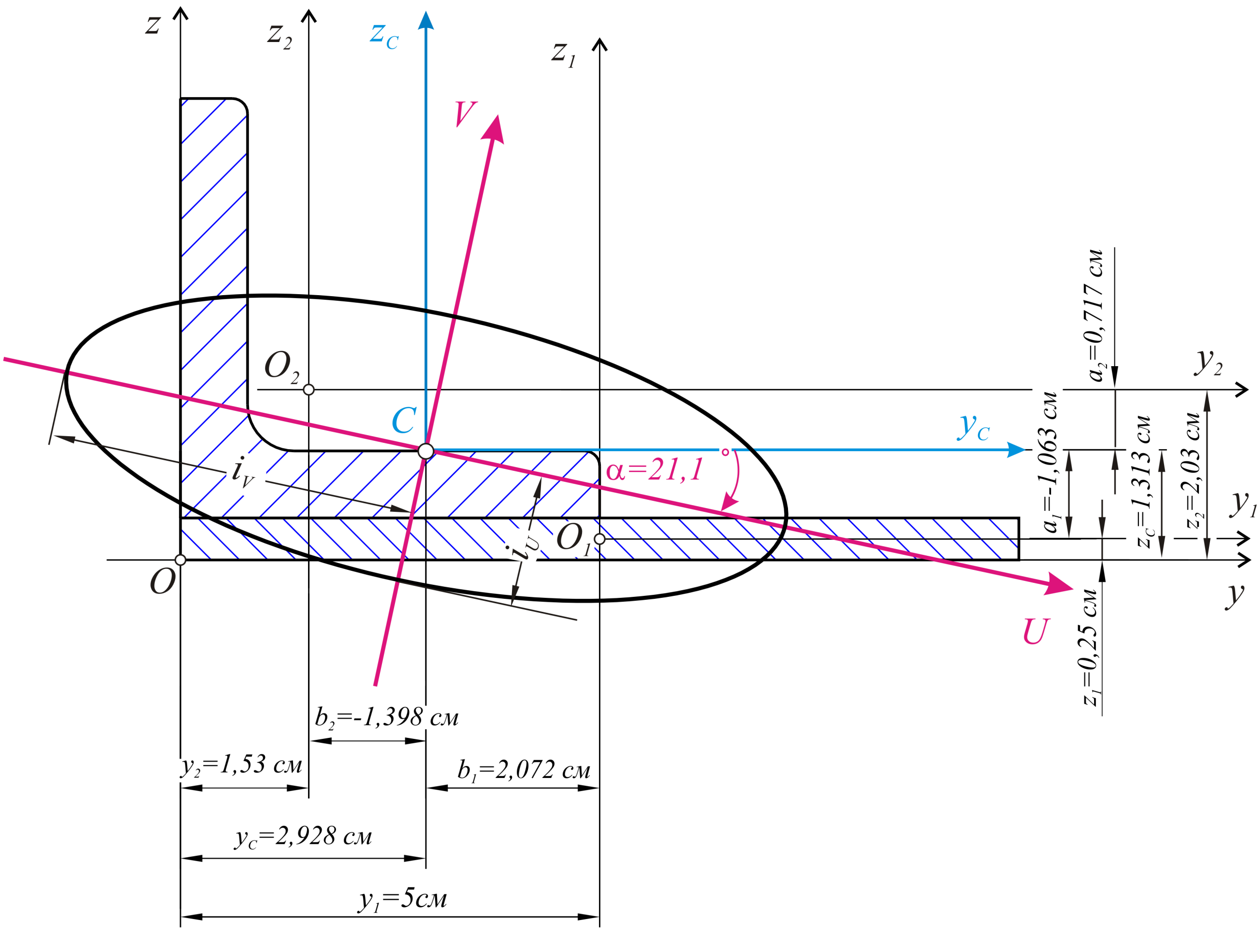


Рис. 3.23. К решению примера 3.4

3.3. СДВИГ И СРЕЗ

3.3.1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА (СРЕЗА)

Сдвигом (срезом) называется такой вид деформации, при которой в любом поперечном сечении бруса из шести внутренних усилий определяющей является поперечная сила. *Чистым сдвигом* называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором в окрестности данной точки можно выделить элементарный параллелепипед с боковыми гранями, находящимися под действием одних лишь касательных напряжений.

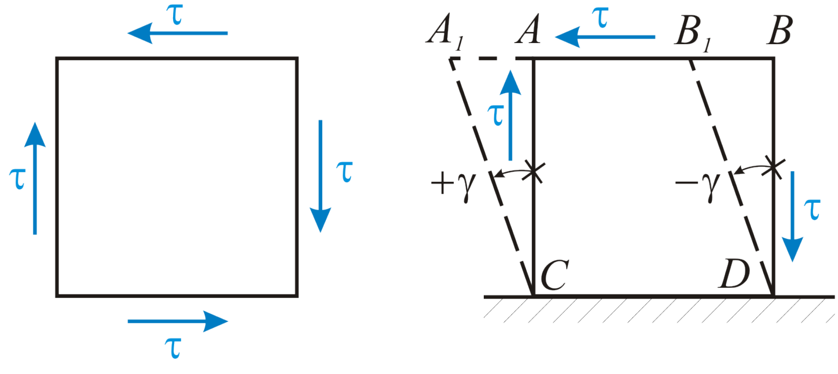


Рис. 3.24. Деформация чистого сдвига

При таком плоском напряженном состоянии нормальные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках будут равны друг другу по величине и противоположны по направлению.

Каждая из граней параллелепипеда перемещается относительно противоположной грани на величину $A_1 A$, называемую *абсолютным сдвигом.*

Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется *относительным сдвигом.*

При малых деформациях относительный сдвиг равен величине *угла сдвига* γ. Угол сдвига γ образуется вследствие изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда. Абсолютный сдвиг измеряется в единицах длины, относительный - в радианах. Как показывают результаты опытов, величина угла сдвига γ прямо пропорциональна величине касательных напряжений. Эта зависимость называется *законом Гука при сдвиге*:

$$\gamma=\frac{\tau}{G}, \text{ или } \tau=\gamma G. \tag{3.47}$$

Здесь, как мы видим, прослеживается аналогия с законом Гука при растяжении-сжатии: $\sigma=\varepsilon E$. Коэффициент пропорциональности G в формулах называется *модулем сдвига*, или *модулем упругости второго рода.* Модуль упругости второго рода G, также как и модуль упругости первого рода E, является физической постоянной материала, характеризующей его жесткость. При объемной деформации потенциальная энергия изменения объема равна нулю, а полная удельная энергия равна удельной потенциальной энергии изменения формы. Исходя из этого условия устанавливается следующая зависимость между физическими постоянными:

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{3.48}$$

Величина абсолютного сдвига зависит не только от величины касательных напряжений, но и от размеров выделенного элемента. Если A - площадь граней, по которым действует касательные напряжения, a - расстояния между параллельными гранями, то абсолютный сдвиг Δs:

$$\Delta s=a\gamma=\frac{a\tau}{G}=\frac{Q\cdot a}{G\cdot A}. \tag{3.49}$$

Здесь, как мы видим, прослеживается аналогия с абсолютной продольной деформацией Δl, определяемой по формуле $\Delta l=\frac{P\,l}{E\cdot A}$. Таким образом, абсолютный сдвиг прямо пропорционален сдвигающей силе, расстоянию между сдвигаемыми гранями и обратно пропорционален площади сечения этих граней и модулю упругости второго рода (модулю сдвига). Для стали $G\approx 0{,}4E\approx 0{,}8\cdot 10^{11}\,Па$. Рассмотрим брус, у которого в вертикальной плоскости симметрии приложены на небольшом расстоянии две равные и противоположно направленные поперечные внешние силы P. Мысленно разделим брус на две части по плоскостям поперечных сечений, содержащих эти силы (рис. 3.25).

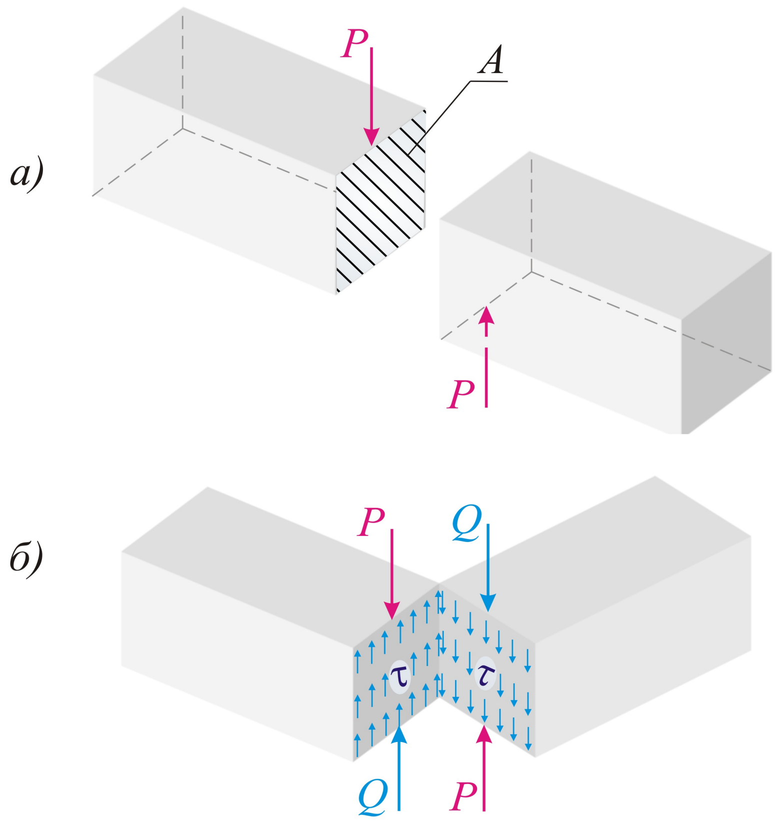


Рис. 3.25. Касательные напряжения при сдвиге

Применим метод сечений. Составим условие статического равновесия для фрагментов бруса A, B:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q = P.$$

Очевидно, при сдвиге поперечная сила будет представлять собой равнодействующую внутренних касательных сил в поперечном сечении при сдвиге. Очевидно также и то, что при сдвиге в поперечном сечении бруса действуют только касательные напряжения τ. Предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по сечению, их величина вычисляется как $\tau = Q / A$. Данное значение в определенной мере будет приблизительной величиной, так как линии действия сил не расположены строго на одной прямой.

3.3.2. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СДВИГЕ

На практике часто приходится сталкиваться с конструкциями, для которых разрушение происходит именно путем среза (сдвига), вследствие воздействия внешних сил. Деформация сдвига, приведшая к разрушению элемента, называется *срезом* (для пластичных материалов) и *скалыванием* для хрупких материалов. Простейшими примерами таких конструкций являются болтовые и заклепочные соединения листового профиля. Для образования заклепочного соединения в обоих листах просверливают (пробивают) отверстия. В них вставляется стержень (как правило, нагретый) заклепки с одной головкой. Другой конец стержня заклёпывается ударами специального молотка или при помощи клепальной машины с гидравлическим приводом. Мелкие заклепки $d \leqslant 8\,мм$ ставятся в холодном состоянии (авиационные конструкции). Условие прочности детали конструкции, работающей на сдвиг, заключается в том, что наибольшее рабочее напряжение не должно превышать допускаемое или касательное напряжение при сдвиге не должно превышать допускаемое, в общем виде:

$$\tau = Q/A \leqslant [\tau]. \qquad (3.50)$$

При n - числе, d - диаметре заклепки, в заклепочном соединении данное условие принимает вид:

$$\tau = \frac{P}{A} \leqslant \frac{P}{n\dfrac{\pi \cdot d^2}{4}} \leqslant [\tau_{CP}]. \qquad (3.51)$$

для заклепочного соединения, имеющего две плоскости среза:

$$\tau = \frac{P}{A} \leqslant \frac{P}{n\dfrac{\pi \cdot d^2}{2}} \leqslant [\tau_{CP}]. \qquad (3.52)$$

Как правило, для подобного рода расчетов исходят из заданного диаметра заклепочных стержней d, заданной толщины соединяемых профилей t (обычно $d \approx 2t$), определяя необходимое количество заклепок.

$$n \geqslant \operatorname{int}\left(\frac{4P}{\pi \cdot d^2 \cdot [\tau_{CP}]}\right) + 1. \qquad (3.53)$$

для заклепочного соединения, имеющего две плоскости среза:

$$n \geqslant \operatorname{int}\left(\frac{2P}{\pi \cdot d^2 \cdot [\tau_{CP}]}\right) + 1. \qquad (3.54)$$

Расчеты на прочность данных соединений на срез дополняют так называемыми расчетами на смятие. Если детали конструкции, передающие сжимающую нагрузку, имеют малую контактную поверхность, то происходит *смятие* поверхностей детали.

Расчет на смятие производят, полагая, что нормальные напряжения равномерно распределены по площади контакта. Расчетное уравнение имеет в общем виде:

$$\sigma_{CM}=\frac{P}{A_{CM}}\leqslant[\sigma_{CM}]. \tag{3.55}$$

Для заклепочных соединений с учетом, что $A_{CM}=n\cdot t\cdot d$ - условная площадь смятия, данная формула примет вид:

$$\sigma=\frac{P}{n\cdot t\cdot d}\leqslant[\sigma_{CM}], \tag{3.56}$$

отсюда необходимое количество заклепок:

$$n\geqslant \operatorname{int}\left(\frac{P}{t\cdot d[\sigma_{CM}]}\right)+1. \tag{3.57}$$

Допускаемое напряжение на срез выбирают для пластичных материалов в зависимости от его предела текучести σ_T .

В машиностроении для штифтов, болтов, шпонок, установленных с нулевым зазором, принимают:

$[\tau_{CP}]=0{,}4\sigma_T$ - для статической нагрузки, $[\tau_{CP}]=(0{,}2\ldots0{,}3)\sigma_T$ - для переменной;

В зависимости от марки стали условие прочности в стыке: $[\sigma_{CM}]=0{,}8\sigma_T$ - для углеродистой стали и $[\sigma_{CM}]=(0{,}6\ldots0{,}8)\sigma_T$ - для легированной.

Пример 3.5. При приложении центрального растягивающего усилия P образец материала с начальной длиной $100\,мм$ увеличил свою длину до $100{,}1\,мм,$ при этом его поперечный размер уменьшился на $0{,}025\%$.

Считая деформацию упругой и принимая $E=200\,ГПа$, определить модуль сдвига данного материала.

Решение:

Абсолютная продольная деформация равна:

$\Delta l=l_1-l_0\Rightarrow(100{,}1-100)\cdot10^{-3}=10^{-4}\,м.$

Относительная продольная деформация определится как

$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{10^{-4}}{10^{-1}}=10^{-3}.$

Относительную поперечную деформацию выразим в натуральном виде:

$\varepsilon^{/}=-0{,}025\%\ \sim\text{-}\,25\cdot10^{-5}.$

Определим коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона):

$\mu=\left|\frac{\varepsilon^{/}}{\varepsilon}\right|=\left|\frac{-25\cdot10^{-5}}{10^{-3}}\right|\Rightarrow\quad \mu=0{,}25.$

Зная модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона, можно определить модуль сдвига по формуле:

$$G=\frac{E}{2\left(1+\mu\right)}=\frac{200\cdot 10^{9}}{2\left(1+0{,}25\right)}\Rightarrow \quad G=80\,ГПа\,.$$

Ответ: $G=80\,ГПа$.

Пример 3.6. Подобрать диаметр болта (рис. 3.26), установленного с нулевым зазором в соединении двух листов одинаковой толщины $t=5\,мм$, сдвигаемых центральной силой $P=1\,т$, прикладываемой статически. Принять для материала болта углеродистую сталь с $\sigma_T=220\,МПа$.

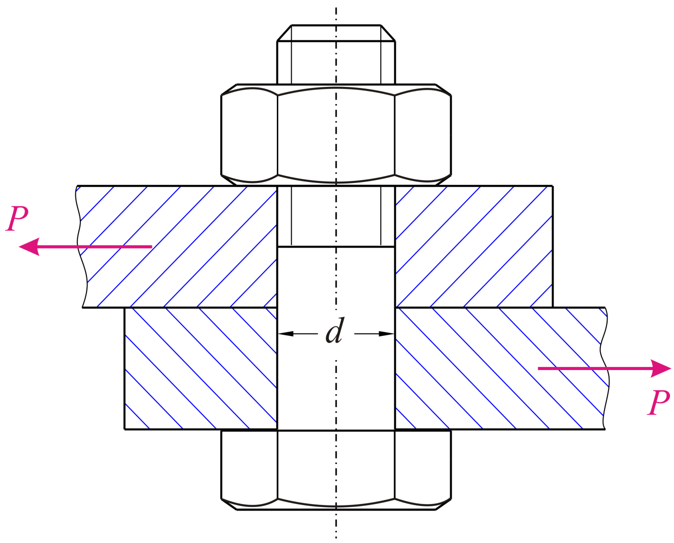


Рис. 3.26. К условию примера 3.6

Решение:

По условию задачи принимаем: $\left[\tau_{CP}\right]=0{,}4\,\sigma_T\Rightarrow \quad \left[\tau_{CP}\right]=0{,}4\cdot 220=88\,МПа$; $\left[\sigma_{CM}\right]=0{,}8\,\sigma_T\Rightarrow \quad \left[\sigma_{CM}\right]=0{,}8\cdot 220=176\,МПа$.

По условиям среза:

$$d\geqslant\sqrt{\frac{4\cdot P}{\pi\cdot\left[\tau\right]}}=\sqrt{\frac{4\cdot 1\cdot 10^{4}}{\pi\cdot 88\cdot 10^{6}}}=10^{-1}\cdot\sqrt{\frac{4}{\pi\cdot 88}}\Rightarrow \quad d\geqslant 0{,}012\,м\,.$$

По условиям смятия:

$$d\geqslant\frac{P}{\delta\left[\sigma_{CM}\right]}=\frac{1\cdot 10^{4}}{5\cdot 10^{-3}\cdot 176\cdot 10^{6}}\Rightarrow \quad d\geqslant 0{,}01136\,м\,.$$

По результатам двух расчётов принимаем больший диаметр $d=12\,мм$.

Ответ: $d=12\,мм$.

Пример 3.7. Для заклёпочного соединения (рис 3.27), с толщинами соединяемых листов $t_1=10\,мм=2\,t_2=2\,t_3$, симметрично загруженного центральной переменной силой с максимальным значением $P=4\,т$, рассчитать потребное количество заклепок диаметра $d=6\,мм$.

Материал заклепок – углеродистая сталь с $\sigma_T=210\,МПа$. Считать нагрузку равномерно распределённой среди заклёпок.

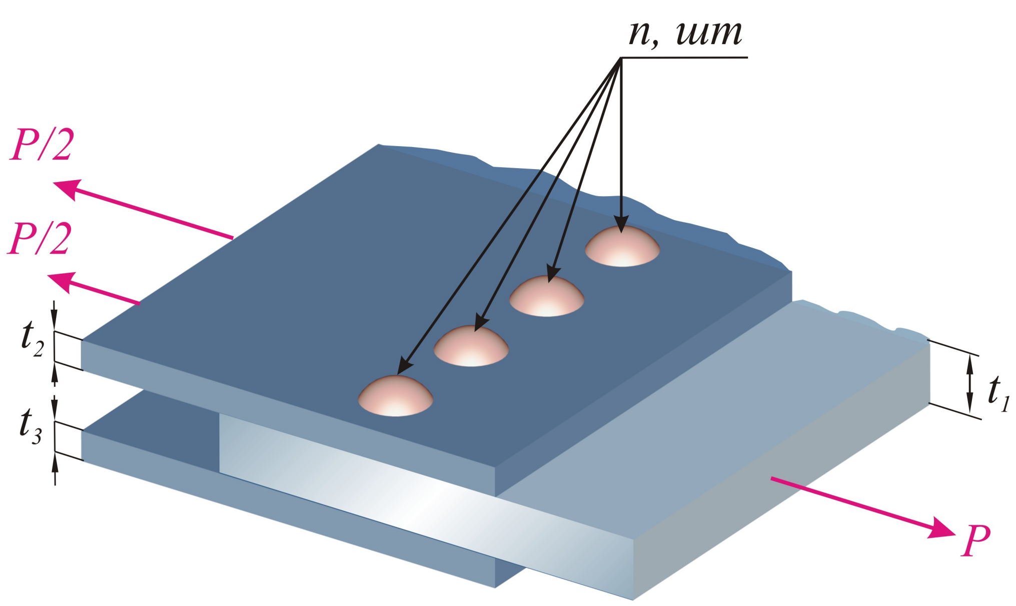


Рис. 3.27. К условию примера 3.7

Решение:

По условию задачи принимаем $[\tau_{CP}]=0{,}2\sigma_T \Rightarrow [\tau_{CP}]=0{,}2\cdot 210=42\,МПа$; $[\sigma_{CM}]=0{,}8\sigma_T \Rightarrow [\sigma_{CM}]=0{,}8\cdot 210=168\,МПа$.

Учтём, что в данном случае у каждой заклепки две плоскости среза.

Потребное количество заклёпок n по условиям среза:

$$n \geqslant \operatorname{int}\left(\frac{2P}{\pi\cdot d^2\cdot[\tau_{CP}]}\right)+1=\operatorname{int}\left(\frac{4\cdot 10^4}{\dfrac{\pi\cdot(6\cdot 10^{-3})^2}{2}\cdot 42\cdot 10^6}\right)+1 \Rightarrow$$

$$n \geqslant \operatorname{int}(16{,}84)+1=16+1=17\,шт.$$

Потребное количество заклёпок n по условиям смятия:

$$n \geqslant \operatorname{int}\left(\frac{P}{t\cdot d\,[\sigma_{CM}]}\right)+1.$$

Здесь в качестве t берем минимальную толщину среди соединяемых листов.

В данном случае $t=5\,мм$.

Следовательно:

$$n \geqslant \operatorname{int}\left(\frac{P}{t\cdot d\,[\sigma_{CM}]}\right)+1=\operatorname{int}\left(\frac{4\cdot 10^4}{5\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{-3}\cdot 168\cdot 10^6}\right)+1 \Rightarrow$$

$$n \geqslant \operatorname{int}(7{,}94)+1=7+1=8\,шт.$$

По результатам двух расчётов принимаем большее потребное количество заклёпок $n=17\,шт$.

Ответ: $n=17\,шт$.

3.3.3. РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

На срез принято приближенно рассчитывать и некоторые виды сварных соединений, таких как сварка встык и с помощью угловых или валиковых швов.

Сварка встык применяется, когда соединяемые детали находятся в одной плоскости.

При толщине листов $\delta \leqslant 8\,мм$, рис. 3.28, *а,* кромки листов не обрабатываются.

При $8 \leqslant \delta \leqslant 20\,мм$, рис. 3.28, *б,* кромки листов скашиваются и сварка производится с одной стороны, при этом получается V-образный шов.

При $\delta \geqslant 20\,мм$, рис. 3.28, *с,* кромки скашиваются с двух сторон и получается Х- образный шов. Расчет таких швов производится на разрыв. Расчетную толщину шва принимают равной толщине листа, без учета наплавов.

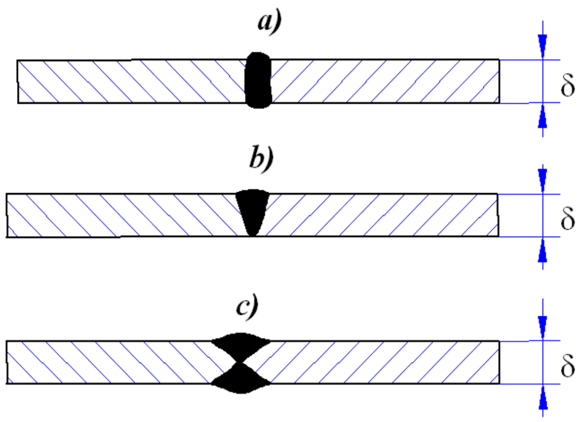


Рис. 3.28. Виды швов сварки встык в зависимости от толщины соединяемых листов

Соединения при помощи *угловых швов* применяют в случаях, когда соединяемые листы параллельны или перпендикулярны.

К таким соединениям относятся соединения *внахлестку, с накладками* и *тавровые.* Если направление шва перпендикулярно к действующему усилию (рис. 3.29), то шов называется *лобовым.*

Швы параллельные усилию (рис. 3.31) называются *фланговыми* или *боковыми.* Применяются также и *косые* швы (рис. 3.30), направленные под углом α к действующей силе. Как правило, при расчетах сварных швов наплывы не учитывают, а считают, что в поперечном разрезе шов имеет форму прямоугольного равнобедренного треугольника.

Очевидно, разрушение шва будет происходить по его минимальному сечению, высота которого $m = \delta \cos 45^\circ \approx 0{,}7\,\delta$. Расчет швов, как и заклепок, ведется в предположении равномерного распределения напряжений по сечению шва.

Расчет лобового шва. С учетом того, что сопротивление стали срезу ниже, чем сопротивление растяжению, составляющей нормальных напряжений в лобовом шве пренебрегают и расчет швов производят условно на срез, предполагая, что касательные напряжения равномерно распределены по расчетной площади сечения, на рис. 3.33 это площадь *ABCD*.

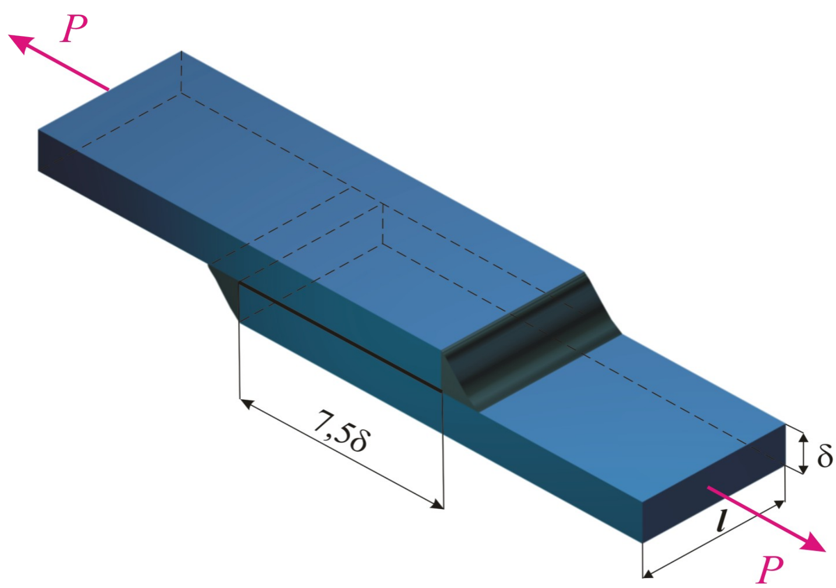


Рис. 3.29. Соединение внахлестку с помощью лобовых швов

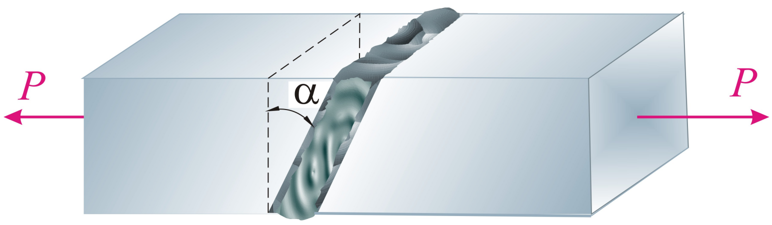


Рис. 3.30. Пример косого шва

При расчете лобовых швов соединения внахлестку учитывают оба шва - верхний и нижний. Их общая площадь: $A = 2\,ml = 2 \cdot 0{,}7\,\delta l = 1{,}4\,\delta l$. В таком случае условие прочности:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{1{,}4 \cdot \delta l} \leqslant [\tau_э]. \tag{3.58}$$

Расчетная длина торцового шва l_p определяется по формуле:

$$l_p = \frac{P}{1{,}4 \cdot \delta \cdot [\tau_э]}. \tag{3.59}$$

Кроме того, расчетная длина шва l_p в связи с непроваром в начале и в конце шва обычно принимается на 10 мм меньше действительной l:

$$l_p = l - 10\ мм. \tag{3.60}$$

Расчет фланговых швов

Фланговые швы имеют на практике наибольшее распространение. Они менее жестки, чем лобовые, вследствие большей протяженности металла в направлении действия силы. Фланговые швы всегда ставятся парами. Они работают на срез в биссекторных сечениях. Площадь среза двух швов оценивается как

$$A = 2 \cdot 0{,}7\delta\left(l - 10\,мм\right) = 1{,}4\delta\left(l - 10\,мм\right). \tag{3.61}$$

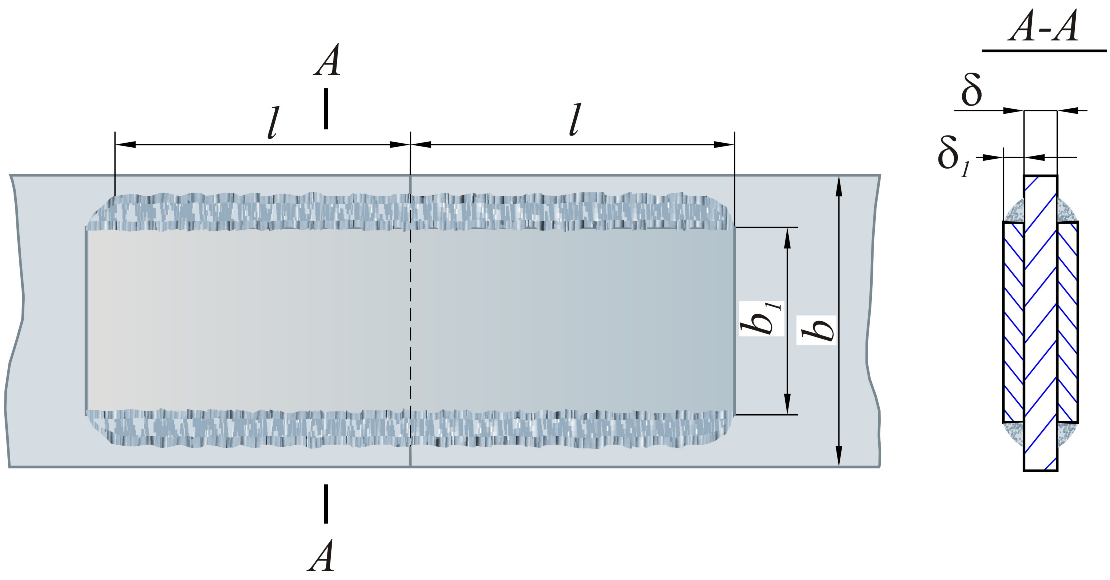


Рис. 3.31. Соединение с накладками, приваренными фланговыми швами

Условие прочности на срез:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{1{,}4\delta\left(l - 10\,мм\right)} \leqslant \left[\tau_э\right]. \tag{3.62}$$

Длина шва определяется по формуле:

$$l = \frac{P}{1{,}4\delta\left[\tau_э\right]} + 10\,мм. \tag{3.63}$$

Таблица 3.2

Ориентировочные допускаемые напряжения для сварных соединений (материал электродов и соединяемых элементов - малоуглеродистая сталь ст.3; сталь 20)

Вид деформации	Обозначение	Ручная сварка (электроды с тонкой обмазкой)	Автоматическая сварка и ручная сварка (электроды с толстой обмазкой)
Растяжение	$\left[\sigma_э^+\right]$	98 *МПа*	128 *МПа*
Сжатие	$\left[\sigma_э^-\right]$	108 *МПа*	142 *МПа*
Срез	$\left[\tau_э\right]$	79 *МПа*	108 *МПа*

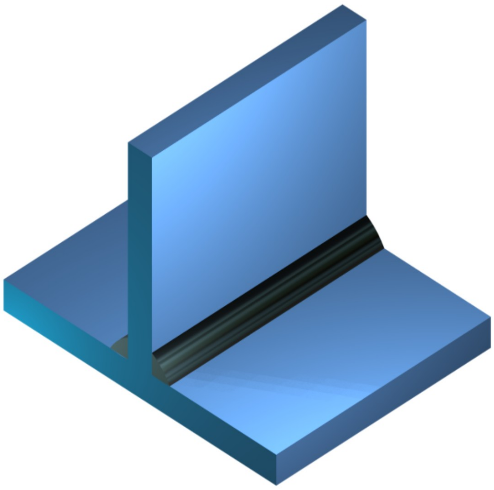


Рис. 3.32. Тавровое соединение

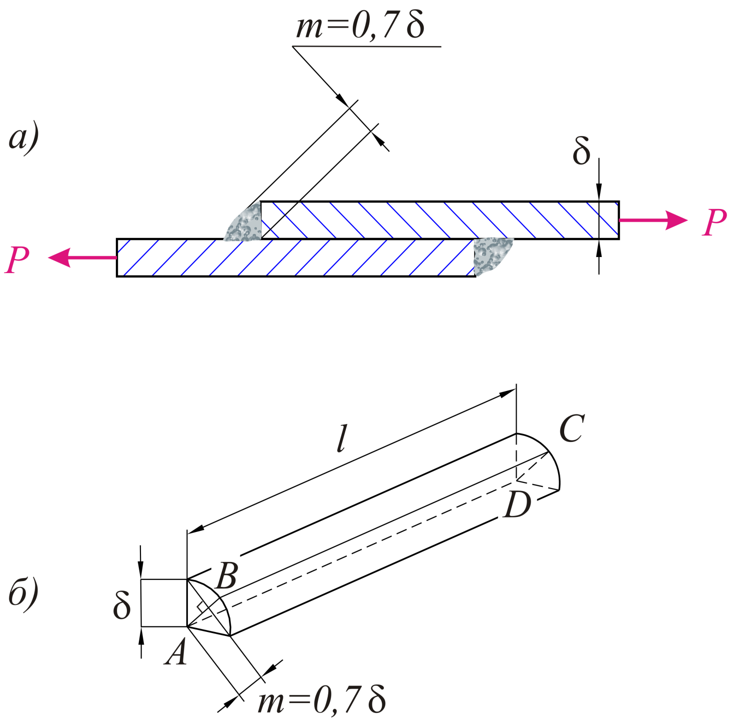


Рис. 3.33. К расчету угловых швов: *а)* -поперечное сечение соединения; *б)* биссекторное сечение $ABCD$

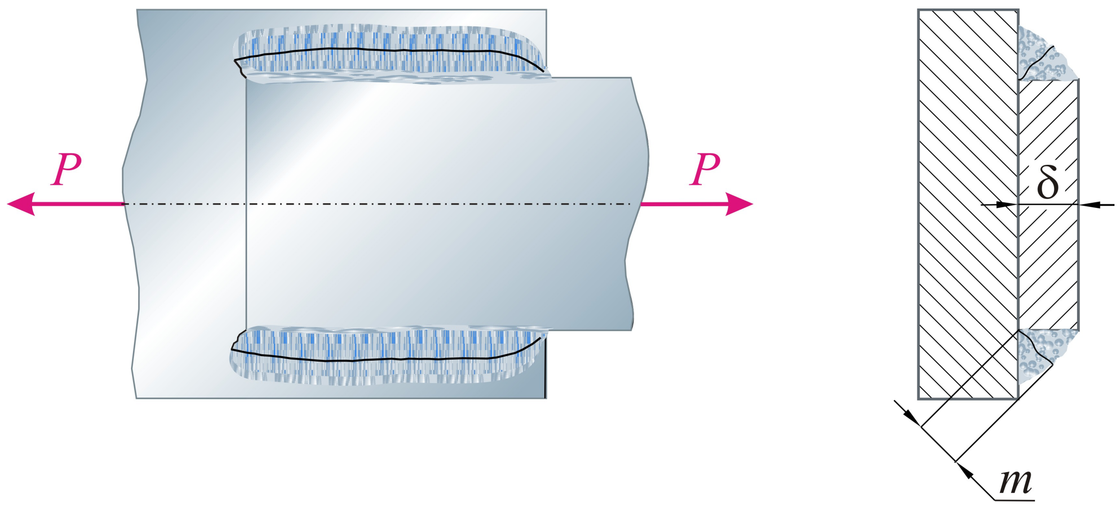


Рис. 3.34. Фланговые швы, работа на срез в биссекторных сечениях

Пример 3.8. Рассчитать потребную длину соединения встык двух листов (рис. 3.35) толщиной $t = 4\,мм$, необходимую для обеспечения прочности данного соединения, если величина предполагаемой центральной растягивающей статически прикладываемой нагрузки $P = 3\,т$.

Материал свариваемых листов и электрода - малоуглеродистая сталь. Способ сварки -автоматическая в среде углекислого газа.

Решение: С учетом особенностей сварки встык, расчёт на прочность ведут по допускаемым нормальным напряжениям растяжения для соединений, полученных электродуговым способом - $\left[\sigma_э^+\right]$.

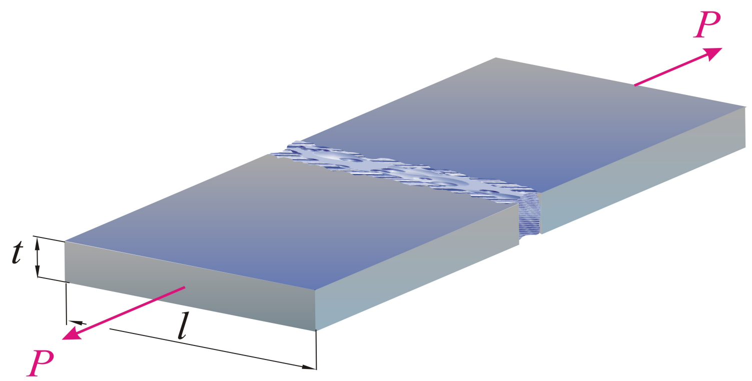


Рис. 3.35. К условиям примера 3.8

Принимаем согласно способу сварки - $\left[\sigma_э^+\right]=127\,МПа$.

Условие прочности в таком случае будет следующим:

$$\sigma^+=\frac{P}{(l-10\,мм)\cdot t}\leqslant\left[\sigma_э^+\right]\Rightarrow$$

Необходимая длина шва с учетом непровара материала листа в начале и конце шва должна составлять следующую величину:

$$l=\frac{P}{t\cdot\left[\sigma_э^+\right]}+10\cdot10^{-3},\ [м].$$

Считаем: $l=\dfrac{3\cdot10^4}{4\cdot10^{-3}\cdot127\cdot10^6}+10\cdot10^{-3}=0{,}069\,м$, или $69\,мм$.

Ответ: $l=69\,мм$.

Пример 3.9. Выполнить проверочный расчет на прочность соединения внахлёст лобовым швом (рис. 3.36), если ширина листов составляет $l=60\,мм$, толщина соединяемых листов $t_1=4\,мм$ и $t_2=7\,мм$.

Материал листов и электрода - малоуглеродистая сталь, способ сваривания - ручной, электродами с тонкой обмазкой. Величина предполагаемой центральной растягивающей нагрузки $P=2{,}5\,т$.

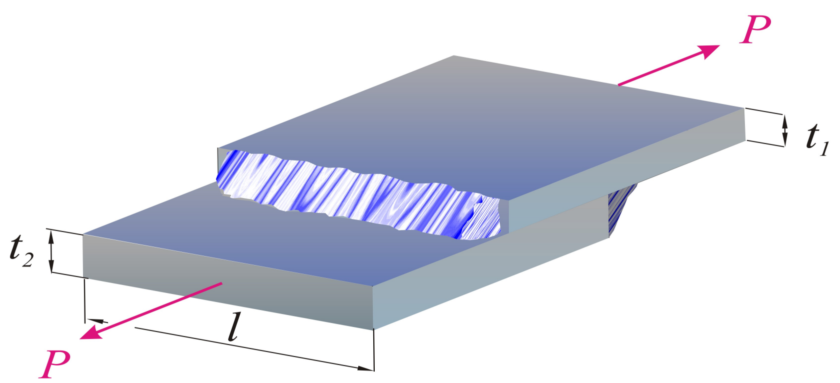


Рис. 3.36. К условию примера 3.9

Решение.

С учетом особенностей сварки внахлест лобовым швом, расчёт на прочность ведут по допускаемым касательным напряжениям для соединений, полученных электродуговым способом - $\left[\tau_э\right]$.

Принимаем согласно способу сварки - $[\tau_э]=78{,}4\,МПа$.

Условие прочности, в таком случае будет следующим:

$$\tau=\frac{P}{A}=\frac{P}{1{,}4\,\delta(l-10\,мм)}\leqslant[\tau_э],$$

где δ - минимальная толщина среди соединяемых листов.

Проверим, будет ли выполняться данное условие в нашем случае:

$$\frac{2{,}5\cdot 10^4}{1{,}4\cdot 4\cdot 10^{-3}(0{,}06-10^{-2})}\leqslant 78\cdot 10^6\Rightarrow \quad 89{,}3\cdot 10^6>78\cdot 10^6\Rightarrow$$

Условие не выполняется, и соединение будет разрушено.

В данном случае для обеспечения прочности достаточно изменить технологию сварки: заменить способ сваривания на автоматический, при котором $[\tau_э]=107{,}8\,МПа$.

Более качественный шов, при той же геометрии и тех же условиях работы конструкции, обеспечит прочность соединения, условие прочности в случае применения автоматической сварки будет безусловно выполнено: $89{,}3\cdot 10^6<107{,}8\cdot 10^6$.

3.3.4. ПАЯНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Паянием -называется процесс соединения деталей с друг с другом или устранения их дефектов, производимый посредством нанесения на нагретые детали расплавленного материала – припоя. При охлаждении расплавленный припой вместе с охлаждаемой поверхностью образуют паяльный шов, диффузионно и химически связанный с материалом этой поверхности.

При помощи паяния возможно получение соединения элементов из черных и цветных сплавов. В последнее время всё шире применяется паяние для ремонта и получения неразъёмных однородных соединений из некоторых видов пластмасс (телескопическое и встык соединения пластмассовых труб и т.д.). Рассмотрим ряд терминов, применяемых при паянии.

Припаивание (*спаивание*) – процесс соединения деталей при помощи паяния. *Запаивание* – устранение дефектов на деталях – раковин, пустот при помощи паяния. *Напаивание* – наращивание металла для увеличения размера детали. *Спайка* – место соединения двух спаянных деталей.

Припой – сплав, необходимый для наполнения швов и пустот при паянии. Паяние мягкими (слабыми) припоями производится в случаях, когда от спайки не требуется большая прочность. В качестве слабых припоев используют обычно сплавы олова со свинцом. Для обеспечения достаточной прочности (или особых физических свойств) паяного соединения используют твёрдые (крепкие) припои. В качестве твердых (крепких) припоев используются латунные или серебрянные сплавы.

Флюс – вещество, служащее для удаления окислов с поверхности деталей из металлов и сплавов, предназначенной для паяния. При пайке пластмасс флюс не используется.

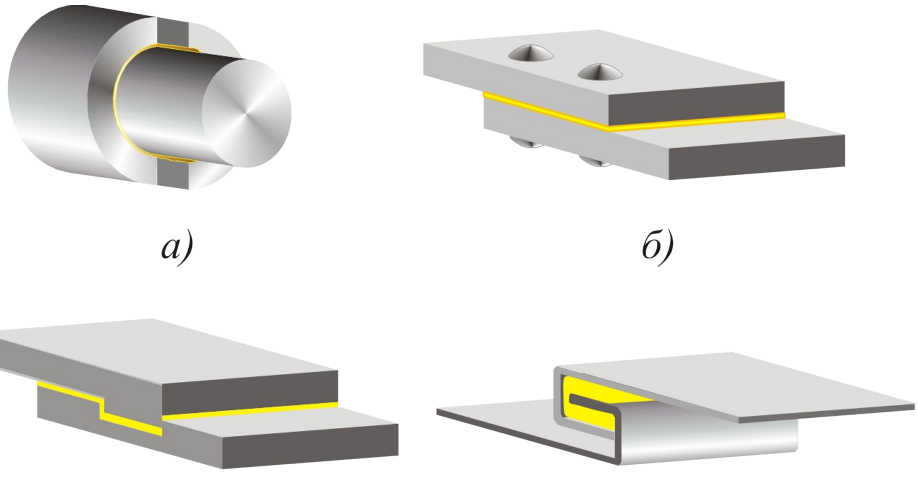
При пайке металлов и сплавов в качестве флюса для слабых припоев применяется чаще всего хлористый цинк (с добавкой нашатыря образующий так называемую паяльную кислоту), получаемый от растворения в соляной кислоте цинка. После спаивания рекомендуется очищать место пайки от остатков флюса, с целью избежания последующей коррозии.

Для элементов, которые нельзя очистить после пайки от следов хлористого цинка (паяльной кислоты), рекомендуется применять паяльный жир (канифолевую мазь), спиртовый раствор канифоли или чистую канифоль. Последняя представляет собой единственный флюс, не вызывающий последующего окисления.

При паянии твердыми припоями в качестве флюса используют чистую обезвоженную буру (при паянии серебрянными припоями) или смесь железного порошка с бурой при паянии латунными припоями чугуна.

Расчёт на прочность паяльных соединений производится по аналогии с расчетом на прочность сварных соединений. Необходимые для расчёта механические свойства припоев содержатся в технических справочниках. Отметим так же, что несущая способность паяного соединения увеличивается за счет площади контактной поверхности пайки.

Основные виды паяных соединений представлены на рис. 3.37.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 3.37. Паяные соединения: *а*) телескопическое; *б*) внахлестку с заклёпкой(штифтом); *в*) внахлёстку со шпонкой; *г*) фальцевым замком

3.3.5. КЛЕЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Клеевым называется неразъемное соединение, образованное с помощью вещества (клея), способного соединять (склеивать) поверхности материалов и удерживать их вместе.

Особенностью клеевого соединения является его способность соединять практически любые разнородные материалы и практически в любом их сочетании, включая: древесину, пластики, стекло, ткани, кожу, керамику, стекло, чугун, стали, цветные металлы и их сплавы и т.д. Эта способность в отдельных случаях определяет склеивание, как единственную возможность получения прочного соединения различных материалов в ответственных конструкциях.

Кроме того, следует отметить, что клеевое соединение не ослабляет соединяемые элементы. Многие клеи инертны по отношению к агрессивным средам и способны в сочетании с конструктивными и технологическими мерами обеспечивать герметичность при монтаже конструкции. Кроме того стоимость склеивания, как правило, ниже сварочных, заклёпочных или болтовых соединений.

Наиболее широко распространены такие виды клеевых соединений, различаемых по роду клея, как соединение *внахлёстку* и *телескопическое*.
Для телескопического соединения обычно применяют жидкие клеи холодного затвердевания, для соединения внахлест -высокопрочные (плёночные) клеи.

По аналогии с пайкой, прочность склеивания прямо пропорциональна наименьшей площади контактирующей поверхности одного из соединяемых элементов, а также зависит от химической природы склеивающего вещества (клея) и толщины наносимого слоя.

Как правило, клеевые соединения неплохо работают на сдвиг, несколько хуже – на разрыв. Кроме того, клеевые соединения хорошо справляются с статической нагрузкой и хуже - с динамической. В случае динамической нагрузки, для обеспечения запаса прочности целесообразно клеевое соединение сочетать с другими видами механических соединений или принимать дополнительные меры конструктивного характера.

На рис. 3.38 изображены некоторые виды клеевых соединений.

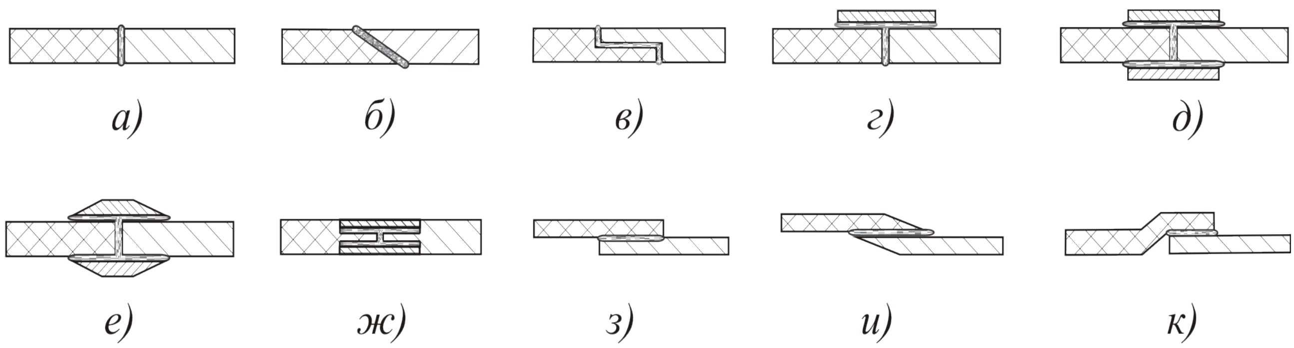


Рис. 3.38. Некоторые виды клеевых соединений: *а*) стыковое; *б*) усовое; *в*) полушиповое; *г*) стыковое с накладкой; *д*) стыковое с двумя накладками; *е*) стыковое со скошенными накладками; *ж*) стыковое с утопленной двойной накладкой; *з*) внахлёст; *и*) внахлёст со скосом; *к*) внахлёст с подсечкой

Толщина наносимого клея зависит от его вязкости, условий монтажа и обычно составляет $0{,}04\ldots0{,}3\ \text{мм}$.

Условие прочности для клеевого соединения внахлест (см. рис. 3.38, *з*), работающего на сдвиг (скол):

$$\tau = \frac{P}{A_p} \leqslant [\tau_c], \tag{3.64}$$

где A_p - расчётная площадь, равная $b \cdot l$, здесь b и l - ширина и длина нахлёста; $[\tau_c]$ - допускаемое касательное напряжение клея при сдвиге (сколе).

В промышленности наиболее широко распространены клеи на фенолонитрилкаучуковой основе, эпоксидные, на полиуретановой основе.
Для склеивания древесины продолжают применять клеи на казеиновой основе.

В последнее время всё активнее применяют высокопрочные быстросхватывающиеся циакриновые (циакриловые) клеи, например, этилцианакрилат. Более подробно с характеристиками клеёв и механическими свойствами клеевых соединений можно ознакомиться в соответствующих технических справочниках.

3.4. КРУЧЕНИЕ

3.4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КРУЧЕНИИ

Если в поперечном сечении бруса из шести внутренних усилий имеется внутренний момент (M_{KP} или M_x) относительно продольной оси x, (или линии, параллельной направлению наибольшего распространения материала) бруса, то в таких случаях наблюдается так называемая деформация *кручения.*

Деформация кручения вызывается парами сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси стержня.

К конструкциям, работающим на кручение, можно отнести следующие: торсионные и трансмиссионные валы, пружины, пространственные тонкостенные и прочие профиля и т.д.

3.4.2. ВРАЩАЮЩИЙ МОМЕНТ. МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ КРУЧЕНИЮ. КРУТЯЩИЕ МОМЕНТЫ. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

В качестве примера рассмотрим случай работы на кручение валов круглого поперечного сечения. Возьмем трансмиссионный вал CD, имеющий два шкива *I* и *II*. Вал установлен на подшипники (рис. 3.39).

Шкив *I* передает валу вращение при помощи клиноременной передачи от источника энергии (электродвигателя).

Шкив *II* передает это вращение исполняющему механизму.

К шкиву *I* приложены силы натяжения ведущей T_1 и набегающей t_1 ветвей ремня. Данные силы лежат в плоскости, перпендикулярной оси вала. Аналогично к шкиву *II* приложены силы натяжения ремня T_2 и t_2.

Анализируя действие этих сил, можно сказать, что данные силы создают давление на подшипники, а также образуют пары сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вала.

Величина момента, передающегося на вал от шкива *I* на вал: $M_1 = T_1 R_1 - t_1 R_1 = (T_1 - t_1) R_1$ - называется *вращающим моментом.*

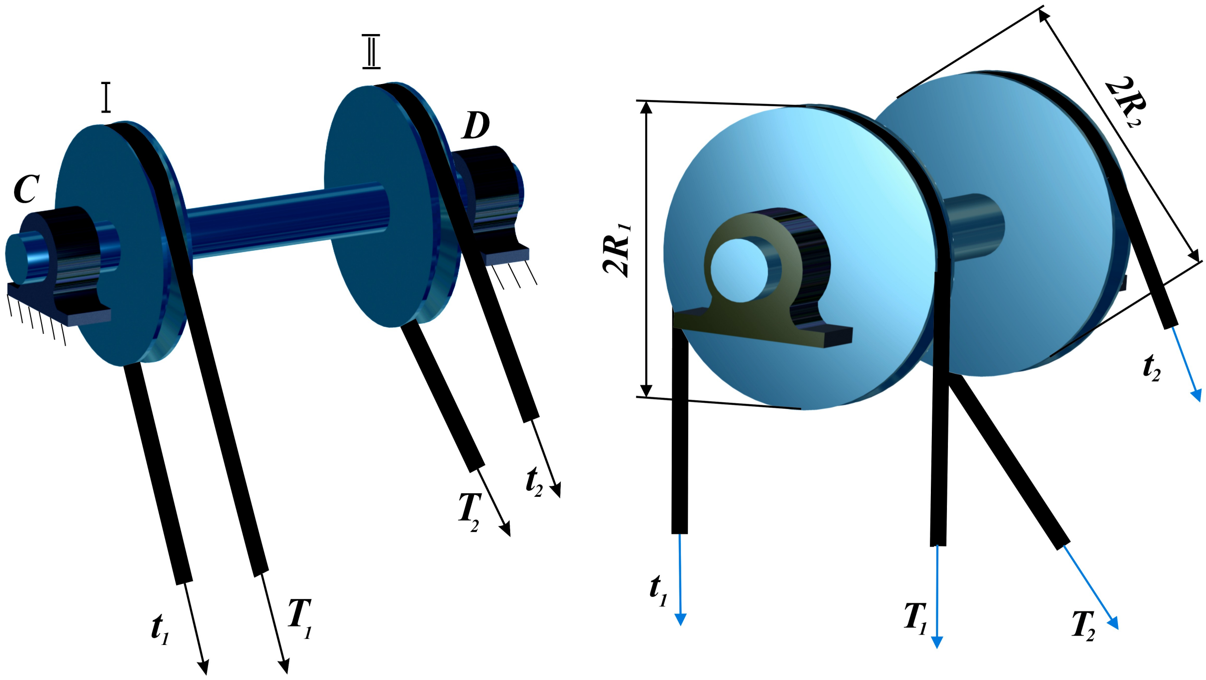


Рис. 3.39. Трансмиссионный вал, работающий на кручение

По аналогии, от шкива *II* на вал передается момент M_2, направленный в противоположную сторону и равный: $M_2 = (T_2 - t_2) R_2$ - *моментом сопротивления вращению.*

Установившееся (равномерное) движение привода и исполнительных механизмов обуславливает равномерное вращение трансмиссионного вала. На основании этого можно утверждать, что все силы, действующие на вал, находятся в равновесии.

То есть вращающий момент $(T_1 - t_1) R_1$ уравновешивается моментами сопротивления вращению $(T_2 - t_2) R_2 + \ldots + (T_i - t_i) R_i$, т.е. $(T_1 - t_1) R_1 = (T_2 - t_2) R_2 + \ldots + (T_i - t_i) R_i = M_k$.

На основании ранее приведенного понятия о деформации кручения (вызывается парами сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси стержня), можно считать, что участок вала между центрами шкивов будет скручиваться.

Внутренний момент, равный по величине моменту пар сил, скручивающих вал, называется *крутящим моментом*. Рассмотрим расчёт данных внутренних усилий на конкретном примере.

Пример 3.10. Построить эпюру крутящего момента для равномерно вращающегося вала. Момент вращения на ведущем шкиве составляет $M_3 = 600\, Н \cdot м$.

Моменты сопротивления вращению на ведомых шкивах: $M_1 = 300\, Н \cdot м$; $M_2 = 100\, Н \cdot м$; $M_4 = 200\, Н \cdot м$, рис. 3.40.

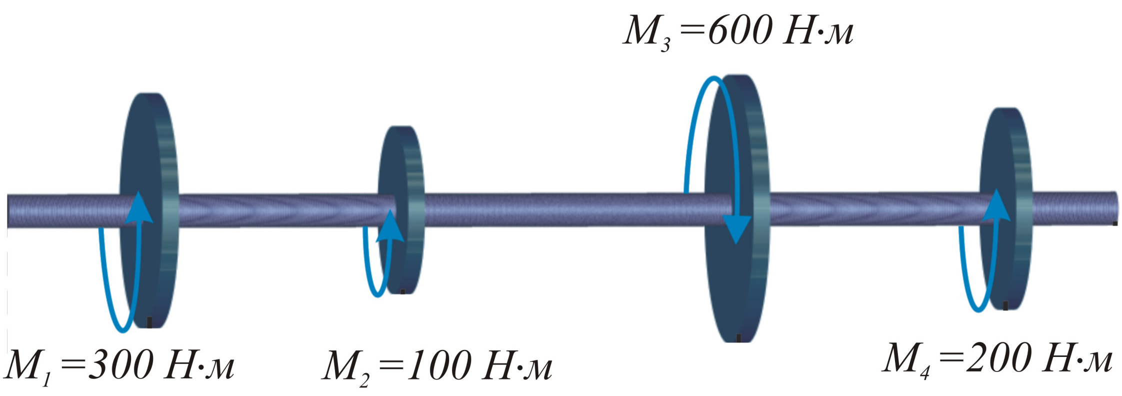


Рис. 3.40. К условию примера

Решение: Для вращающих моментов и моментов сопротивления вращению справедливо равенство $M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = 0$. Очевидно, крутящий момент на участках вала будет принимать различные значения.

Для их определения применяют универсальный метод сечений, т.е.: *крутящий момент для любого сечения равен сумме скручивающих внешних моментов, действующих на вал слева или справа от данного сечения.*

$$M_{kp} = \sum_{слева} M_i = \sum_{справа} M_j \,. \qquad (3.65)$$

Знак крутящего момента в сечении определяется следующим правилом:

Крутящий момент, уравновешивающий внешний скручивающий момент в рассматриваемом сечении, будет положительным, если со стороны отсечённой части он виден направленным по часовой стрелке.

Считая опорами крайние сечения, разобьем вал на пять участков.

Применяя метод сечения справа и правило знака крутящего момента, определим внутренние усилия для каждого участка, рис. 3.41.

Первый участок:

$M_{kp1} = 0$.

Второй участок:

$M_{kp2} = M_4 = 200\, H \cdot м$.

Третий участок:

$M_{kp3} = M_4 - M_3 = 200 - 600 = -400\, H \cdot м$.

Четвёртый участок:

$M_{kp4} = M_4 - M_3 + M_2 = 200 - 600 + 100 = -300\, H \cdot м$.

Пятый участок:

$M_{kp5} = M_4 - M_3 + M_2 + M_1 = 200 - 600 + 100 + 300 = 0$.

Величину крутящего момента в сечении отображают графически путем построения эпюры крутящих моментов, рис. 3.42.

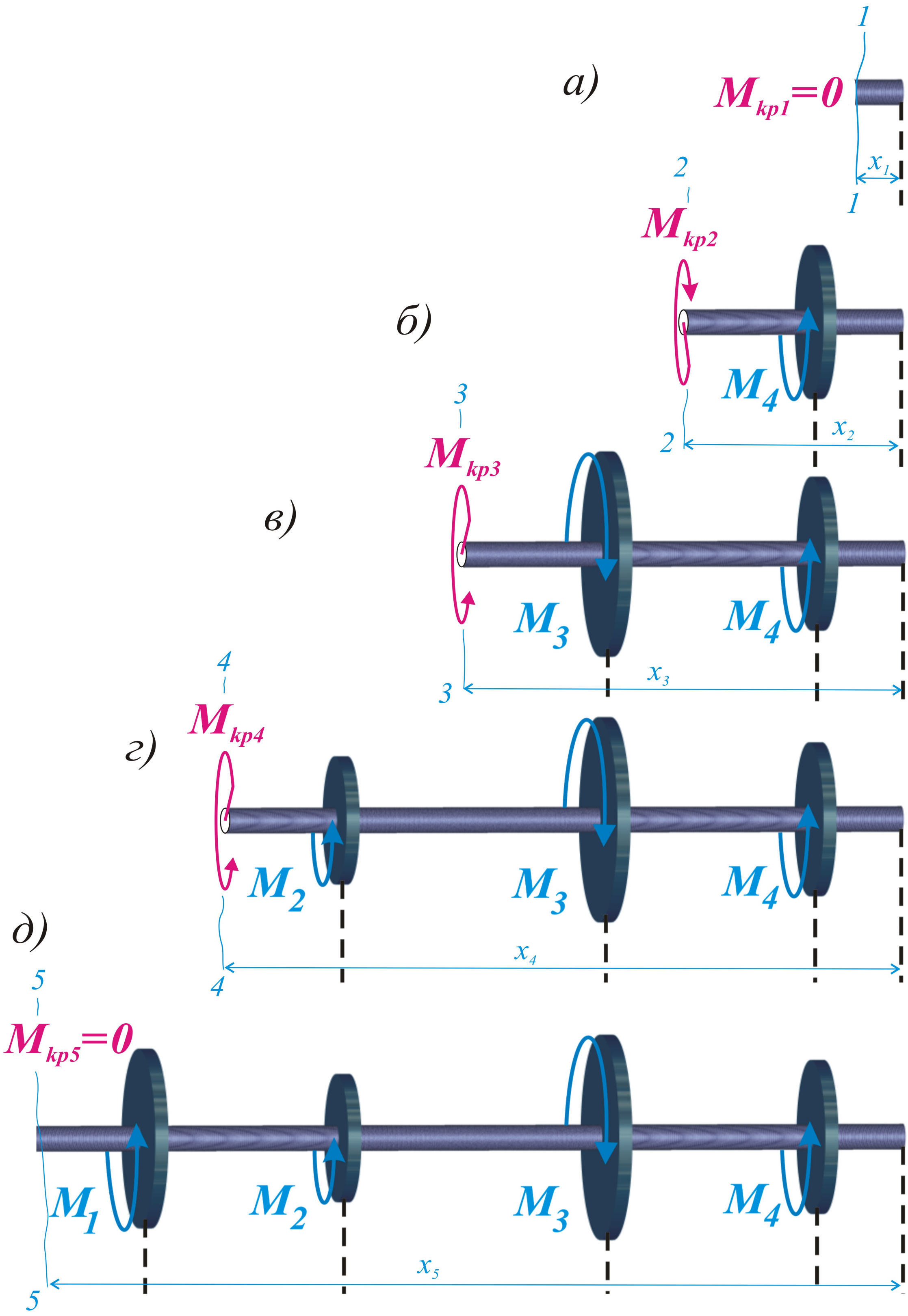


Рис. 3.41. К определению внутреннего крутящего момента методом сечения справа: *а)* первый участок; *б)* второй участок; *в)* третий участок; *г)* четвёртый участок; *д)* пятый участок

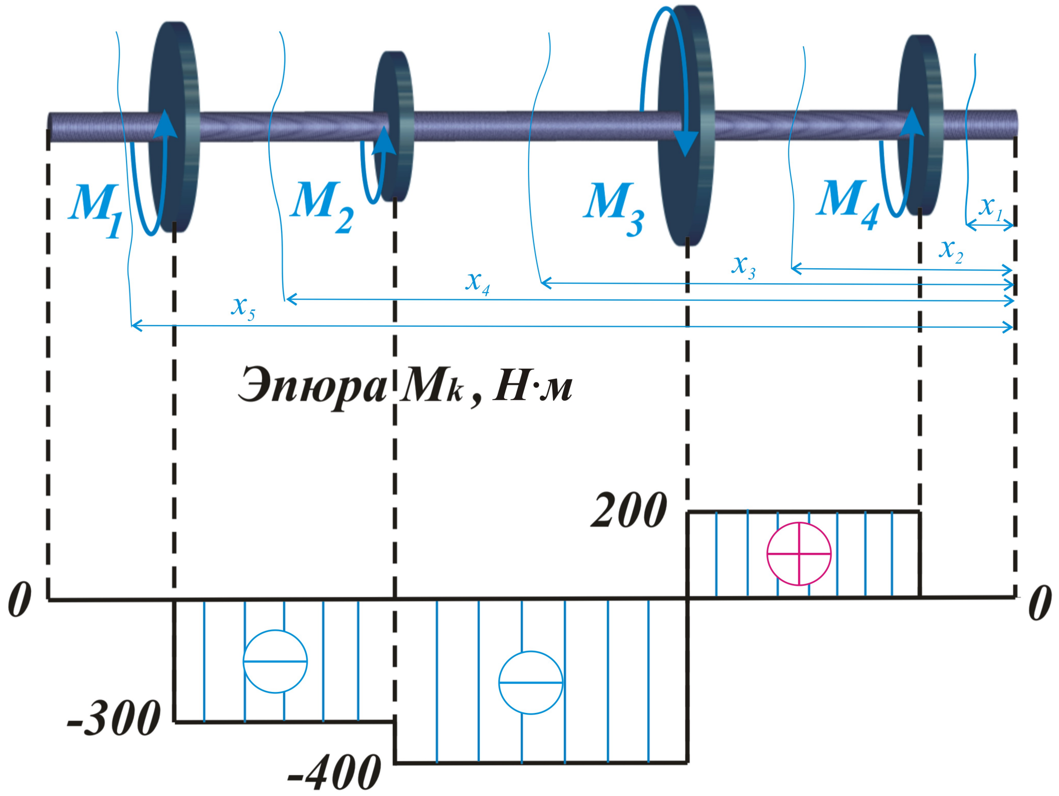


Рис. 3.42. Эпюра крутящего момента

3.4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ, ПЕРЕДАВАЕМЫХ НА ВАЛ

При повороте вала на угол α (рад) каждая из пары сил M, представляющая окружные усилия на шкиве радиуса R (рис. 3.43), пройдет путь $R\alpha$ и соответственно произведёт работу: $A=2PR\alpha=M\alpha$. Если вал совершает m оборотов в единицу времени, то работа момента будет равна: $A=M\cdot 2\pi\cdot m$.

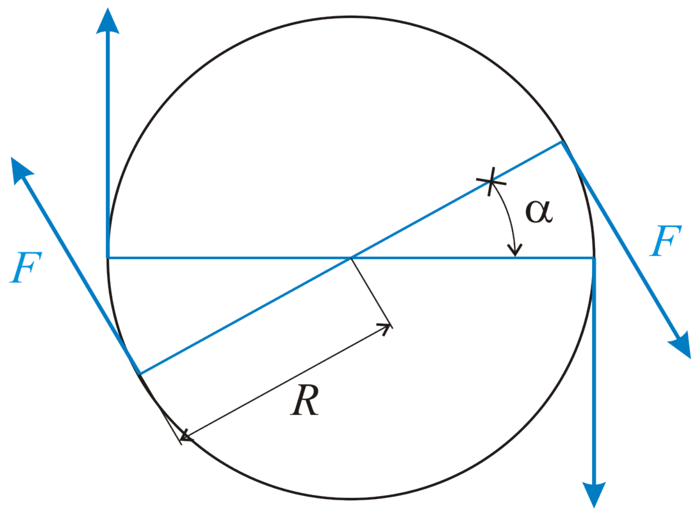


Рис. 3.43. Работа пар сил при кручении

Исходя из определения мощности W (работа в единицу времени), вращающий момент можно выразить через известную подводимую мощность

W , Bm, и число оборотов вала m, $[сек^{-1}]$, $m = \dfrac{n}{60}$; где n, $[мин^{-1}]$, тогда $M = \dfrac{W}{2\pi \cdot m}$.

Если мощность привода задана в лошадиных силах $W = N$, то $W = 75\,N \left[\dfrac{кг \cdot м}{сек}\right]$ и $M = \dfrac{75 \cdot N \cdot 60}{2\pi \cdot n} \Rightarrow$

$$M = 7{,}01876 \cdot \frac{N}{n}, [kH \cdot м]. \tag{3.66}$$

Если мощность привода задана в киловаттах $W = K, квт$, учитывая, что $1\,квт \approx 102 \left[\dfrac{кг \cdot м}{сек}\right]$, то $M = \dfrac{102 \cdot 60}{2\pi} \cdot \dfrac{K}{n} \Rightarrow$

$$M = 9{,}5413 \cdot \frac{K}{n} [kH \cdot м]. \tag{3.67}$$

3.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим брус круглого сечения с защемленным концом (рис. 3.44). Загрузим данный брус моментом, прикладывая его в крайнем (свободном) сечении.

В результате чего крайние сечения бруса повернутся относительно друг друга вокруг продольной оси на некоторый угол φ, который представляет собой *полный угол закручивания* на участке длиной l .

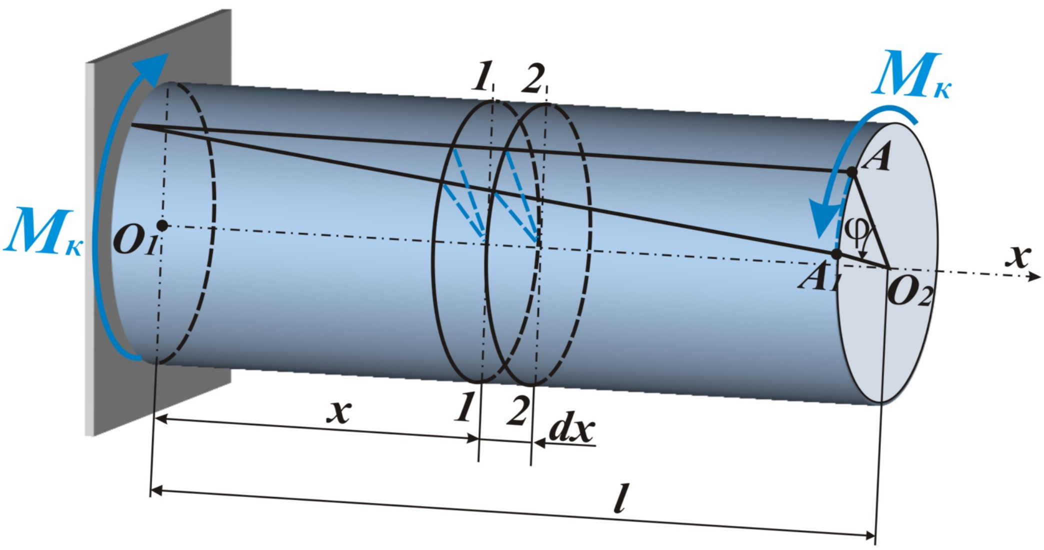


Рис. 3.44. Деформационная картина при кручении

Отношение полного угла закручивания $d\varphi$ на элементарном участке бруса к длине dx называется *относительным углом закручивания* φ_0 (ϑ):

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}. \tag{3.68}$$

Если размеры поперечного сечения бруса и крутящий момент в поперечном сечении в пределах i - го участка постоянны, то значение относительного угла закручивания φ_0 также постоянно и равно: $\varphi_{0_i} = \varphi_i / l_i$.

Анализ опытных данных показывает, что при кручении вала круглого сечения происходит следующее:

1. Все образующие поворачиваются на один и тот же угол γ (рис. 3.45).
2. Расстояния между соседними поперечными сечениями *1-2* Δx после деформации не изменяются.
3. Форма поперечных сечений остается неизменной, и радиусы, проведенные в поперечных сечениях, остаются прямолинейными и после деформации.
4. Все поперечные сечения после деформации остаются плоскими.
5. Наибольшие касательные напряжения наблюдаются на поверхности стержня и равны нулю на его оси.

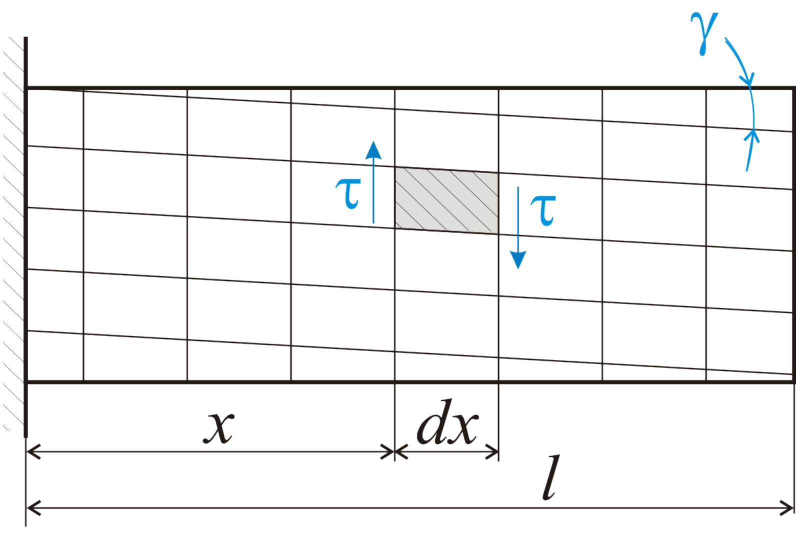


Рис. 3.45. К определению напряжений при кручении

Очевидно, максимальные касательные напряжения (рис. 3.46) будут на поверхности вала:

$$\tau_{max} = \frac{M_k \rho_{max}}{J_p} = \frac{M_k r}{J_p}, \tag{3.69}$$

или $$\tau_{max}=\frac{M_k\rho_{max}}{J_p}=\frac{M_k}{W_p}. \qquad (3.70)$$

Отношение

$$\frac{J_p}{\rho_{max}}=W_p;\ \left[м^3\right], \qquad (3.71)$$

называется *моментом сопротивления кручению*.

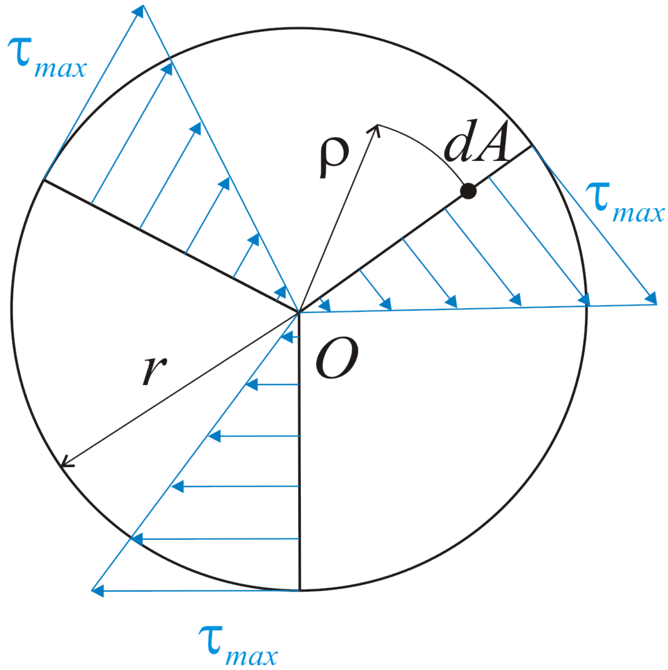


Рис. 3.46. Линейная зависимость между касательными напряжением и расстоянием волокна до нейтральной оси при кручении круглого сечения

3.4.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЯРНЫХ МОМЕНТОВ И МОМЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Для сплошного круглого сечения $J_p=\frac{\pi\cdot d^4}{32}\approx 0{,}1\,d^4$ и $W_p=\frac{\pi\cdot d^3}{16}\approx 0{,}2\,d^3$.

Для кольцевого сечения $J_p=\frac{\pi\cdot D^4}{32}\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right)$ и $W_p=\frac{\pi\cdot D^3}{16}\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right)$.

3.4.6. УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ

По условию прочности наибольшее касательное напряжении не должно превышать допускаемое, т.е.:

$$\max\tau=\frac{M_k}{W_p}\leqslant[\tau]. \tag{3.72}$$

Исходя из этого, для круглого сечения: диаметр подбирается по формуле:

$$D\geqslant 2\cdot\sqrt[3]{\frac{2M_k}{\pi\cdot[\tau]}}, \tag{3.73}$$

а для кольцевого сечения:

$$D\geqslant 2\cdot\sqrt[3]{\frac{2M_k}{\pi\cdot[\tau](1-c^4)}}, \tag{3.74}$$

где $c=\dfrac{d}{D}$ - величина, задаваемая изначально.

При кручении (чистом кручении) допускаемое касательное напряжение $[\tau]=0{,}5\ldots0{,}6[\sigma]$.

Для валов, работающих на кручение, с повышенными требованиями к жесткости, определяющим фактором при подборе сечения является не условие прочности, а ограничение на их деформацию (максимальный или относительный углы закручивания).

3.4.7. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Деформацию кручения рассмотрим на примере цилиндрического стержня с защемленным концом и приложенными по его крайним сечениям парами сил M_K.

Её сущность состоит в том, что поперечные сечения стержня поворачиваются относительно неподвижного опорного сечения на некоторый угол.

Вспомним, что для сечения на расстоянии x от опорного сечения этот угол равен φ_x и называется относительным углом закручивания (угол закручивания на единицу длины):

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_k}{G\cdot J_p}, \tag{3.75}$$

или

$$d\varphi=\frac{M_k dx}{G\cdot J_p}. \tag{3.76}$$

Если в пределах данного участка $M_k=const$, то, интегрируя по x, получим:

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{M_k \cdot dx}{G \cdot J_p}=\frac{M_k \cdot x}{G \cdot J_p}. \quad (3.77)$$

При длине рассматриваемого участка, равной l, данное выражение для крайнего сечения принимает максимальное значение:

$$\varphi=\frac{M_k l}{G \cdot J_p}. \quad (3.78)$$

Очевидна аналогия данной формулы с выражениями для определений абсолютных деформаций:

при растяжении-сжатии $\Delta l=\dfrac{N \cdot l}{E \cdot A}$;

и деформации сдвига $\Delta s=\dfrac{Q \cdot a}{G \cdot A}$.

В случаях, где от конструктивного элемента требуется жесткость, подбор поперечного сечения вала осуществляют исходя из условий ограничения максимального или относительного угла закручивания:

$$\varphi=\frac{M_k l}{G \cdot J_p} \leqslant [\varphi], \text{ или } \varphi_0=\frac{M_k}{G \cdot J_p} \leqslant [\varphi_0], \quad (3.79)$$

здесь величина $G \cdot J_p$ - жесткость при кручении.

Исходя из (3.79), для валов круглого сплошного поперечного сечения по условию ограничения максимального или относительного угла закручивания:

$$D \geqslant 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2 M_k l}{\pi \cdot G[\varphi]}}, \text{ или } D \geqslant 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2 M_k}{\pi \cdot G[\varphi_0]}}. \quad (3.80)$$

По аналогии, для валов с поперечным сечением в виде кольца:

$$D \geqslant 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2 M_k l}{\pi \cdot G[\varphi](1-c^4)}}, \text{ или } D \geqslant 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2 M_k l}{\pi \cdot G[\varphi](1-c^4)}}, \quad (3.81)$$

где $c=\dfrac{d}{D}$ - величина, задаваемая изначально.

Для длинных валов учет жесткости, как правило, необходим.

Пример 3.11. Для стального вала, нагруженного внешними скручивающими моментами $M_0=12\,кН \cdot м$; $M_1=6\,кН \cdot м$; $M_2=4\,кН \cdot м$; $M_3=2\,кН \cdot м$, рис. 3.47, требуется:

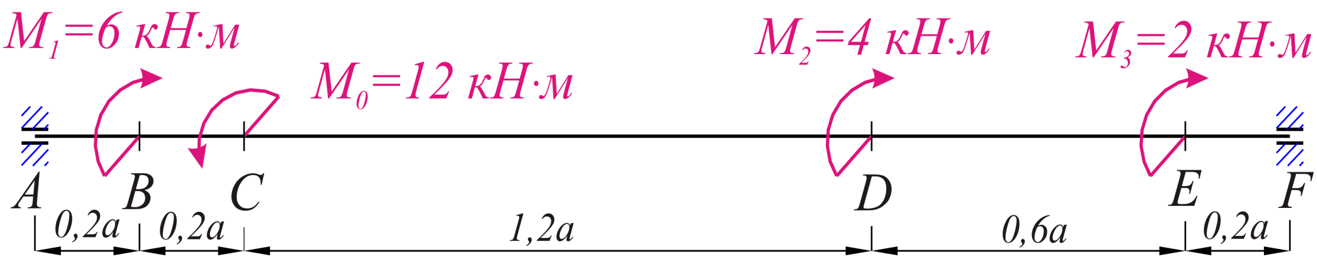


Рис. 3.47. К заданию примера 3.11

1. Построить эпюру крутящего момента.

2. Подобрать размеры сечения сплошного и полого валов из расчета на прочность и жесткость. При решении задачи принять отношение внутреннего диаметра к внешнему для полого вала $c = d/D = 0{,}75$.

3. Сравнить массы сплошного и полого валов и сделать вывод.

4. Построить эпюру углов закручивания сплошного вала, приняв за начало отсчета сечение, где приложен момент M_0.

5. Принять для материала вала $G = 80 \cdot ГПа$; $[\tau] = 30\,МПа$; $[\varphi_0] = 0{,}4\,град/м$. Размер вала - $a = 0{,}5\,м$.

Решение: Предполагаем, что исходный вал совершает равномерное вращение, и поэтому сумма активных и реактивных крутящих моментов на этом валу должна быть равной нулю.

Разбиваем данный брус на 5 участков (рис. 3.48) и, используя метод сечения справа, определяем величины крутящих моментов:

$0 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}2a \ \rightarrow M_{kp1} = 0;$

$0{,}2\,a \leqslant x_2 \leqslant 0{,}8\,a \ \rightarrow M_{kp2} = M_3 = 2\,kH \cdot м;$

$0{,}8\,a \leqslant x_3 \leqslant 2a \ \rightarrow M_{kp3} = M_3 + M_2 = 2 + 4 = 6\,кН \cdot м;$

$2\,a \leqslant x_4 \leqslant 2{,}2\,a \ \rightarrow M_{kp4} = M_3 + M_2 - M_0 = 2 + 4 - 12 = -6\,кН \cdot м;$

$2{,}2\,a \leqslant x_5 \leqslant 2{,}4\,a \ \rightarrow M_{kp5} = M_3 + M_2 - M_0 + M_1 = 2 + 4 - 12 + 6 = 0.$

На основании расчётных данных построим эпюру $M_{кр}$, $[кН \cdot м]$.

Из условия прочности определим диаметр сплошного вала:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр.max}}{W_\rho} \leqslant [\tau],$$

с учётом $W_\rho = \dfrac{J_p}{r} = \dfrac{\pi \cdot r^4}{2} \cdot \dfrac{1}{r} = \dfrac{\pi \cdot r^3}{2} \Rightarrow$

$$D \geqslant \sqrt[3]{\frac{16\,M_{кр.max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6 \cdot 10^3}{\pi \cdot 30 \cdot 10^6}} = 0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{16 \cdot 6}{\pi \cdot 30}} \approx 0{,}1 \cdot 10^{-2}\,м \approx 100\,мм.$$

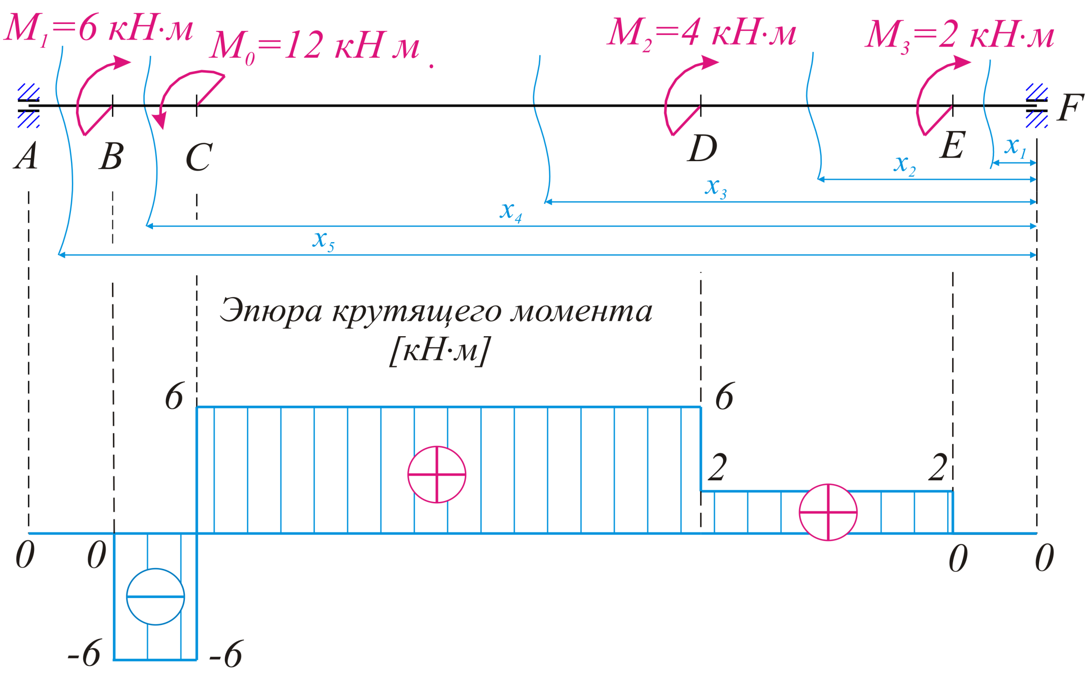


Рис. 3.48. Эпюра крутящего момента (пример 3.11)

Из условия жесткости определяем диаметр сплошного вала $\varphi_0 = \dfrac{M_{кр.max}}{GJ_p} \leqslant [\varphi_0]$, где $J_p = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$ или $J_p = \dfrac{\pi \cdot r^4}{2}$. Следовательно:

$$D \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\,M_{кр.max}}{\pi\,G \cdot [\varphi_0]} \cdot \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0{,}4} \cdot \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^4 \cdot 18}{\pi \cdot 800 \cdot 10^8 \cdot 0{,}4}} = 0{,}1 \cdot \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 18}{\pi \cdot 80 \cdot 4}} \Rightarrow$$

$D \approx 0{,}136\,м \approx 136\,мм$.

Окончательно выбираем диаметр сплошного вала по лимитирующему условию, в данном случае условию жесткости: $D = 136\,мм$. Определим наружний диаметр вала кольцевого сечения из условия прочности, учитывая, что $c = \dfrac{d}{D} = 0{,}75 \Rightarrow$

$$D \geqslant \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр.max}}{\pi \cdot [\tau](1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6 \cdot 10^3}{\pi \cdot 30 \cdot 10^6 (1 - 0{,}75^4)}} = 0{,}1 \cdot \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6}{\pi \cdot 30 \cdot (1 - 0{,}75^4)}} \approx 0{,}114\,м \approx 114\,мм.$$

Определим наружний диаметр вала кольцевого сечения из условия жесткости:

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр.max}}{\pi\,G \cdot [\theta](1 - c^4)} \cdot \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 10^4}{\pi \cdot 800 \cdot 10^8 \cdot 0{,}4(1 - 0{,}75^4)} \cdot \frac{18}{\pi}} = 0{,}1 \cdot \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 6 \cdot 18}{\pi \cdot 80 \cdot 4 \cdot (1 - 0{,}75^4)}} \Rightarrow$$

$D \approx 0{,}150 \cdot 10^{-2}\,м \approx 150\,мм$.

Окончательно, для трубчатого сечения, подбираем наружний диаметр, исходя из условия жесткости: $D = 150\,мм$. Внутренний диаметр трубчатого вала: $d = 0{,}75\,D = 0{,}75 \cdot 150 \approx 113\,мм$. Сравним массы сплошного и полого вала: Отношение весов валов (при одинаковом материале и длине) равно отношению площадей поперечных сечений. Площадь поперечного сечения сплошного вала:

$$A_{круга}=\frac{\pi\cdot D^2}{4}=\frac{\pi\cdot 136^2}{4}=14527\,мм^2.$$

Площадь поперечного сечения полого вала:

$$A_{кольца}=\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot(1-c^2)=\frac{\pi\cdot 150^2}{4}\cdot(1-0{,}75^2)=12080\,мм^2\Rightarrow$$

$$\frac{A_{кольца}}{A_{круга}}=\frac{12080}{14527}=0{,}832.$$

Таким образом, при равной прочности и жесткости полый вал получается легче сплошного на $16{,}8\,\%$. Построим эпюру углов закручивания для сплошного вала, для этого определим абсолютные углы закручивания для сплошного вала на участках по формуле:

$\varphi_i=\frac{M_{крi}\cdot l_i}{G\cdot J_\rho}$, где $J_p=\frac{\pi\cdot D^4}{32}=\frac{\pi\cdot 0{,}136^4}{32}=3{,}3585\cdot 10^{-5}\,м^4.$ Крутильная жесткость вала: $GJ_\rho=80\cdot 10^9\cdot 3{,}3585\cdot 10^{-5}=268{,}68\cdot 10^4\,Н\cdot м^2=2686{,}8\,кН\cdot м^2.$

Для участков вала абсолютные углы закручивания:

$$\varphi_1=0;$$

$$\varphi_2=\frac{M_{кр2}\cdot l_2}{G\cdot J_\rho}=\frac{M_{kp2}\cdot 0{,}6\cdot a}{G\cdot J_p}=\frac{2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5}{2686{,}8}=0{,}000223\,рад;$$

$$\varphi_3=\frac{M_{кр3}\cdot l_3}{G\cdot J_\rho}=\frac{M_{kp3}\cdot 1{,}2\cdot a}{G\cdot J_p}=\frac{6\cdot 1{,}2\cdot 0{,}5}{2686{,}8}=0{,}00134\,рад;$$

$$\varphi_4=\frac{M_{кр4}\cdot l_4}{G\cdot J_\rho}=\frac{M_{kp4}\cdot 0{,}2\cdot a}{G\cdot J_p}=\frac{-6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5}{2686{,}8}=-0{,}000223\,рад;$$

$$\varphi_5=0.$$

Вычисляем углы поворота характерных сечений вала A, B, C, D, E, F. За начало отсчета принимаем точку C, где расположен момент M_0. Используем правило, по которому

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{прав}&=\alpha_{лев}+\varphi\\ \alpha_{лев}&=\alpha_{прав}-\varphi\end{aligned}\right\}. \qquad (3.82)$$

Угол α считается положительным, если при взгляде вдоль оси бруса со стороны левого конца на правый поворот происходит против часовой стрелки; а при взгляде со стороны правого конца на левый – по часовой стрелке.

С учётом правила знаков для углов поворота:

$$\varphi_C=0;$$

$$\varphi_B=0-\varphi_4=0-(-0{,}000223)=0{,}000223\,рад;$$

$$\varphi_A=\varphi_B-0=0{,}000223-0=0{,}000223\,рад;$$

$$\varphi_D=\varphi_C+\varphi_3=0+0{,}00134=0{,}00134\,рад;$$

$$\varphi_E=\varphi_D+\varphi_2=0{,}00134+0{,}000223=0{,}001563\,рад;$$

$$\varphi_F=\varphi_E+\varphi_1=0{,}001563+0=0{,}001563\,рад.$$

Строим эпюру углов закручивания (рис. 3.49):

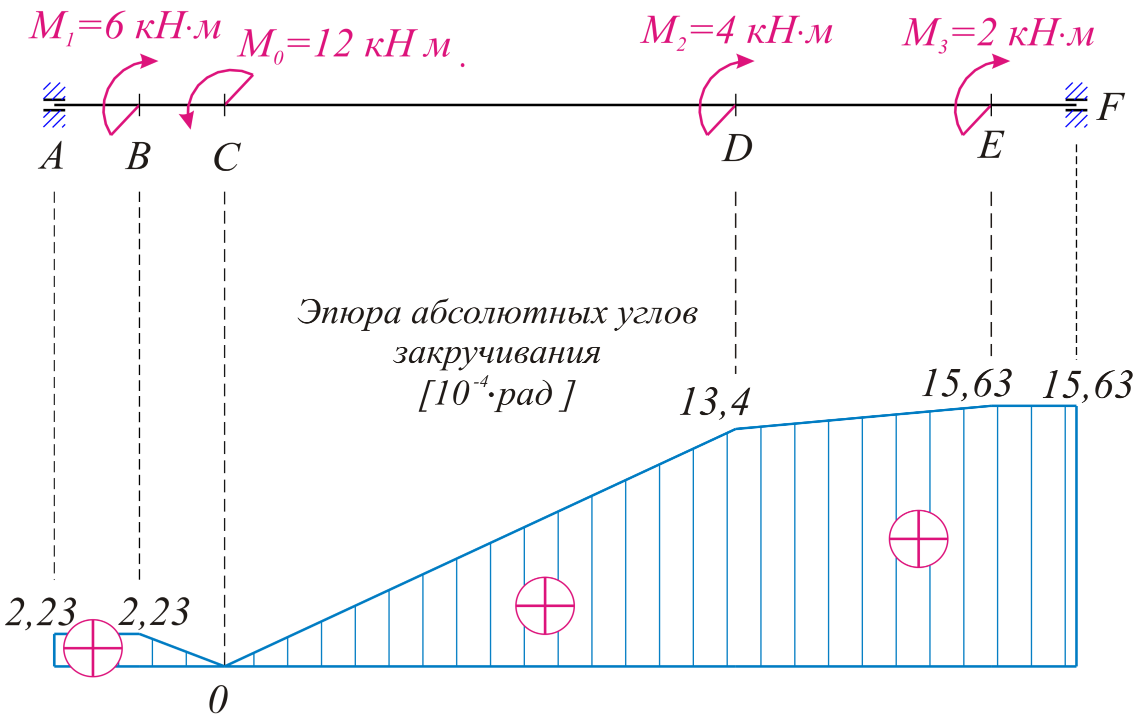


Рис. 3.49. Эпюра абсолютных углов закручивания (пример 3.11)

3.5. ИЗГИБ

3.5.1.ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗГИБЕ

Деформация *изгиба* наблюдается в том случае, если в рассматриваемом сечении есть внутренние усилия в виде поперечных сил Q_y, Q_z, перпендикулярных к оси балки, или моментов M_y, M_z, лежащих в плоскостях, проходящих через ось стержня. Стержень, работающий на изгиб, как правило, называется балкой. Изгиб представляет собой деформацию, при которой происходит искривление осей прямых брусьев или изменение кривизны осей кривых брусьев. При изгибе в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты. Если изгибающий момент является единственным силовым фактором, то изгиб называется *чистым*. Как правило, в поперечных сечениях бруса, наряду с изгибающими моментами, возникают также и поперечные силы. В этом случае изгиб называют поперечным. Изгиб называют *прямым,* если изгибающий момент в данном поперечном сечении бруса действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции этого сечения.

3.5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА И ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛЫ

Поперечная сила Q_x вычисляется как алгебраическая сумма проекций на нормаль к оси балки всех внешних сил, в том числе опорных реакций, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$Q_x = \sum_{слева} P_i = \sum_{справа} P_j . \qquad (3.83)$$

Изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов относительно сечения от всех внешних сил, в том числе и опорных реакций, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$M_x = \sum_{слева} M_i = \sum_{справа} M_j . \qquad (3.84)$$

С целью упорядочения оценки суммарной величины поперечной силы и изгибающих моментов, примем следующее правило знаков $Q(x)$ и $M(x)$ (рис. 3.50).

Изгибающий момент для левой отсеченной части, образуемый действием каждой силы в отдельности, считаем положительным, если момент относительно центра тяжести сечения направлен по часовой стрелке, отрицательным – против часовой стрелки. Для правой части балки знаки изгибающих моментов противоположны.

Принятое *правило знаков* для $M(x)$ соответствует характеру деформации балки: *положительный изгибающий момент изгибает её выпуклостью вниз, а отрицательный – выпуклостью вверх.*

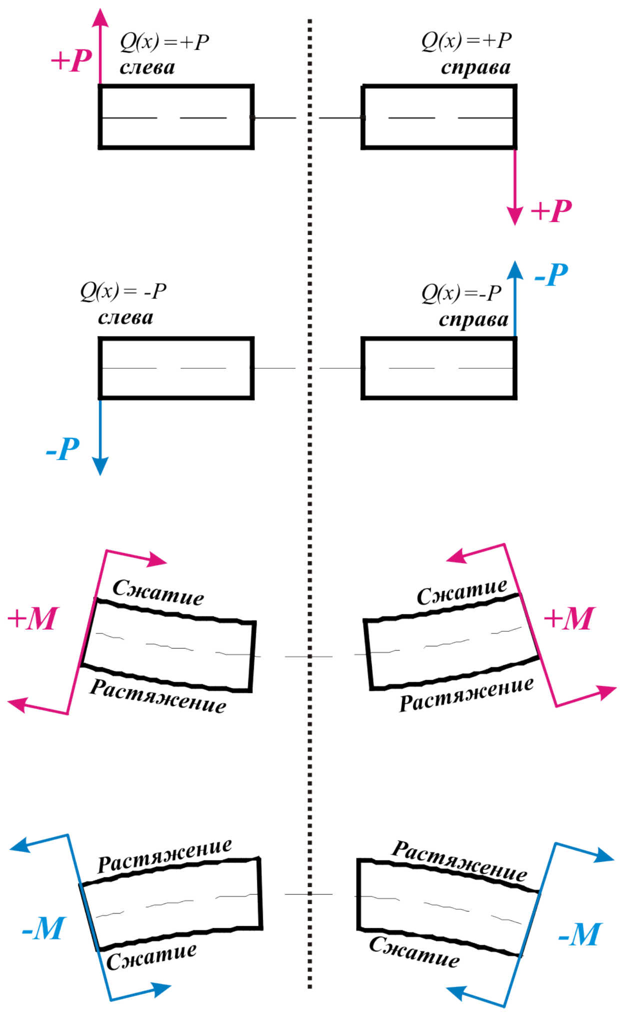


Рис. 3.50. Правило знаков внутренних сил при изгибе

При положительном изгибающем моменте верхние волокна балки испытывают сжатие, а нижние – растяжение. Поперечную силу Q_x условимся считать положительной, если внешние силы, лежащие слева от проведенного сечения, направлены вверх, справа – вниз. *Правила знаков* Q_x и M_x, графически отображены на рисунке 3.50. Указанный метод определения поперечных сил и изгибающих моментов позволяет построить эпюры Q и M.

3.5.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ СПЛОШНОЙ НАГРУЗКИ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ

Рассматривая условие равновесия элемента длиной dx, взятого в произвольном месте шарнирно закреплённого бруса находящегося под действием внешней распределённой нагрузки интенсивностью q, получим:

$$q \cdot dx - dQ = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = q. \tag{3.85}$$

Рассматривая равновесие этого же элемента, с учётом уравнения (3.85), отбрасывая бесконечно малые величины второго порядка, запишем:

$$Q \cdot dx - dM = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = Q. \tag{3.86}$$

Взяв производную от обеих частей последнего равенства, выведем:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = q. \tag{3.87}$$

На основании полученных зависимостей делаем следующие выводы.

1. Производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.
2. Производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.
3. Вторая производная от изгибающего момента по абсциссе равна интенсивности сплошной нагрузки.

Надо полагать, что величина поперечной силы в сечении представляет собой тангенс угла наклона, образуемого с осью абсцисс, касательной к эпюре M в точке, соответствующей этому сечению. Если ось x направлена справа налево, то $\frac{dM}{dx} = -Q$, так как угол наклона касательной меняет знак при изменении направления оси абсцисс. Отдельные теоретические положения, используемые для контроля правильности построения эпюр Q и M, приведены ниже.

1. Если в сечении интенсивность нагрузки $q = \frac{dQ}{dx} = 0$, касательная к

эпюре Q параллельна оси абсцисс и поперечная сила $Q = Q_{max}$ или $Q = Q_{min}$.

2. Величина изгибающего момента в сечении достигает максимума (минимума) в том сечении, где поперечная сила $Q = \frac{dM}{dx} = 0$.

3. Если значение поперечной силы на рассматриваемом участке положительно, то на данном участке функция момента будет возрастать, и наоборот.

4. Эпюра поперечной силы в сечении, соответствующем точке приложения сосредоточенной поперечной силы, имеет скачок (разрыв), равный величине данной силы. Направление скачка определяется знаком данной поперечной силы.

6. Эпюра изгибающих моментов в сечении, соответствующем точке приложения сосредоточенного момента, имеет скачок (разрыв), равный величине данного момента. Направление скачка определяется знаком данного изгибающего момента.

7. Кривая второго и высшего порядков эпюр поперечных и изгибающих моментов имеет выпуклость, всегда направленную навстречу соответствующей распределенной нагрузке.

8. В сечении, расположенном на опоре, изгибающий момент равен нулю, если на данной опоре не приложен сосредоточенный момент. В последнем случае изгибающий момент будет равен величине этого сосредоточенного момента.

3.5.4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ФОРМУЛА НАВЬЕ

Рассмотрим вопрос о связи напряжений σ и с величиной изгибающего момента в сечении M. Определим удлинение волокна AB (рис. 3.51 - 3.52), расположенного на расстоянии z от нейтрального слоя, растянутого напряжениями σ. Первоначальная длина этого волокна $dx = \breve{O_1 O_2} = \rho\, d\alpha$, рис. 3.52. После деформации его длина по дуге AB: $\breve{AB} = (\rho + z)\, d\alpha$.

Его абсолютное удлинение равно: $\Delta l = (\rho + z)\, d\alpha - \rho\, d\alpha = z\, d\alpha$. Его относительное удлинение равно: $\varepsilon = \frac{z}{\rho}\frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{z}{\rho}$. Т.е. удлинения волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя. Радиус кривизны нейтрального слоя ρ, величину которого для выделенного (бесконечно малого) элемента считаем постоянной. Учитывая допущение о ненадавливании друг на друга волокон, вычисление напряжений можно произвести по закону Гука, применяемому при растяжении-сжатии:

$$\sigma = E\,\varepsilon,$$

или

$$\sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \qquad (3.88)$$

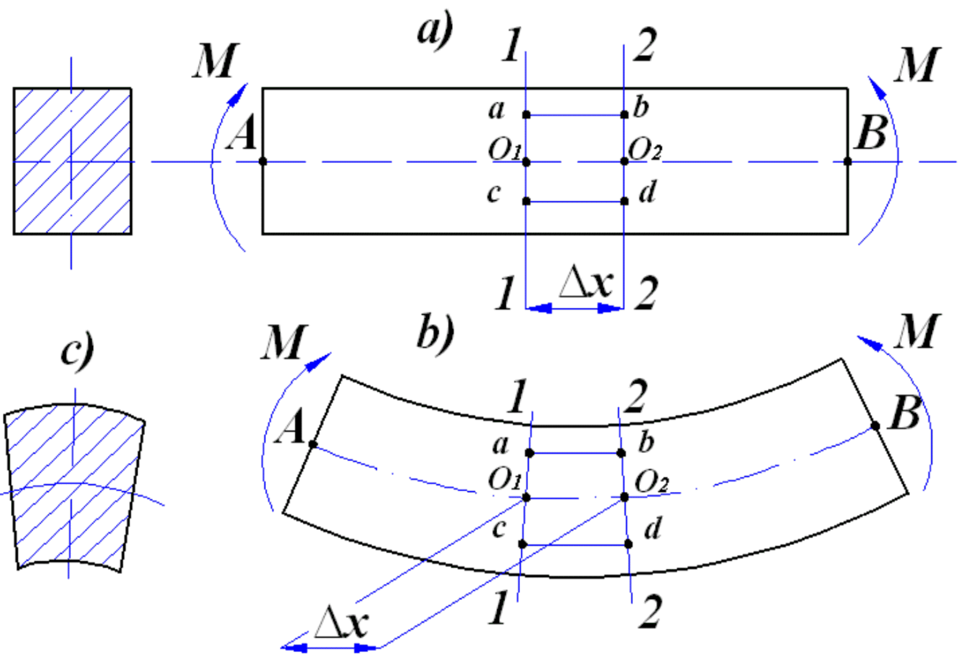


Рис. 3.51. Деформации волокон при изгибе

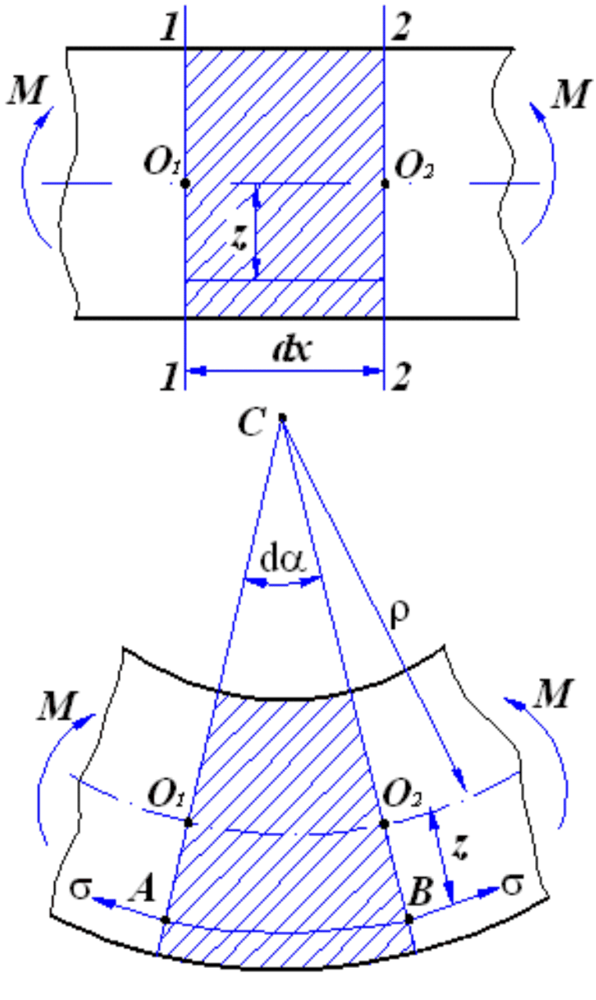


Рис. 3.52. К определению нормальных напряжений при изгибе

Таким образом, величина нормальных напряжений прямо пропорциональна расстоянию z от рассматриваемой точки до нейтрального слоя. Следовательно, нормальные напряжения распределяются по сечению по линейному закону и наибольшими будут нормальные напряжения у верхнего и нижнего краев сечения, рис. 3.53.

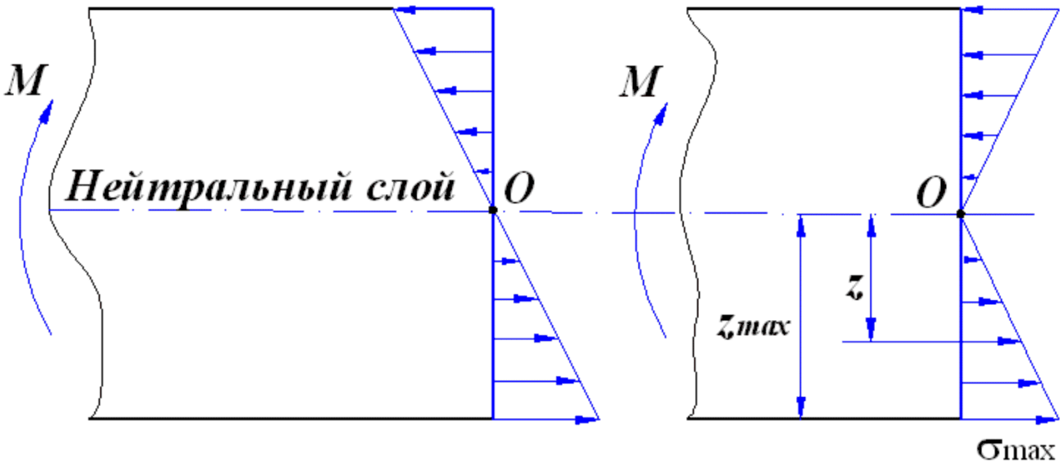


Рис. 3.53. Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению

В каждой точке поперечного сечения действуют нормальные напряжения σ, согласно формуле *Анри Навье:*

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \tag{3.89}$$

Таким образом, нормальные напряжения в любой точке сечения *прямо пропорциональны величине изгибающего момента в сечении и расстоянию точки от нейтральной оси* и *обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.*

3.5.5. ПОДБОР ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ БАЛКИ ПО НАИБОЛЬШИМ ДОПУСКАЕМЫМ НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Подбор необходимого сечения балки при плоском изгибе в вертикальной плоскости по наибольшим нормальным напряжениям осуществляют из условия прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} z_{max}}{J_y} = \frac{M_{max}}{W_y} \leqslant [\sigma]. \tag{3.90}$$

Здесь $W_y = \dfrac{J}{z_{max}}$ - *момент сопротивления* поперечного сечения, относительно нейтральной оси y;

z_{max} - расстояние до волокна, наиболее удаленного от нейтральной оси y;
$[\sigma]$ - допускаемое нормальное напряжение;
M_{max} - наибольший по абсолютному значению изгибающий момент.

Расчетная формула на изгиб для подбора сечения в этом случае записывается в следующем виде:

$$W \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \tag{3.91}$$

Для прямоугольного сечения

$$W_y = \frac{J_y}{h/2} = \frac{bh^2}{6};\ W_z = \frac{hb^2}{6}. \tag{3.92}$$

Для круглого сечения

$$W = \frac{J}{r} = \frac{\pi r^3}{4}. \tag{3.93}$$

Максимальные нормальные напряжения не должны превышать допускаемые расчетные, более 5%.

При подборе сечений прокатных балок, а также балок, составленных из стандартных профилей, допускаются и более значительные отклонения в сторону увеличения запаса прочности.

Пример 3.12. Для консольной балки, схема которой показана на рис. 3.54, построить эпюры внутренних усилий, подобрать поперечное сечение в виде полой квадратной трубы, по ТУ-36-2287-80.

Подбор осуществить по наибольшим допускаемым нормальным напряжениям, исходя из того, что для материала балки $[\sigma] = 135\,МПа$.

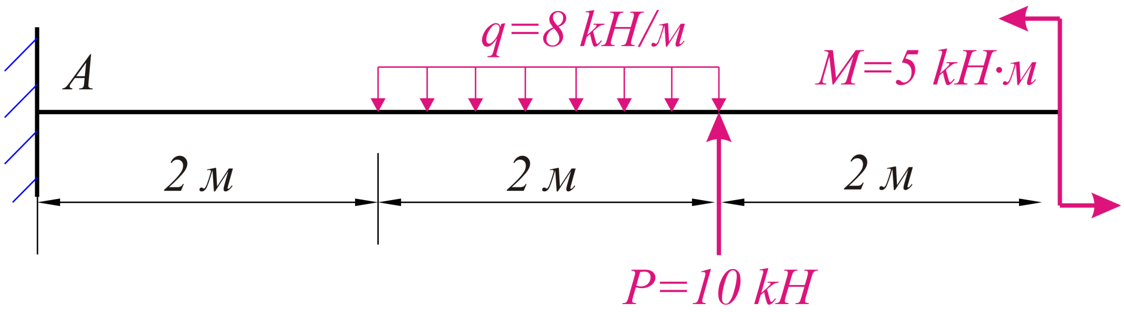


Рис. 3.54. К условию примера 3.12

Решение:

Разобьем консоль на три участка (рис. 3.55).

Чтобы не определять опорные реакции заделки, будем использовать метод сечения справа.

Рассмотрим каждый участок в отдельности.

Составим уравнения поперечных сил и изгибающих моментов для данных участков.

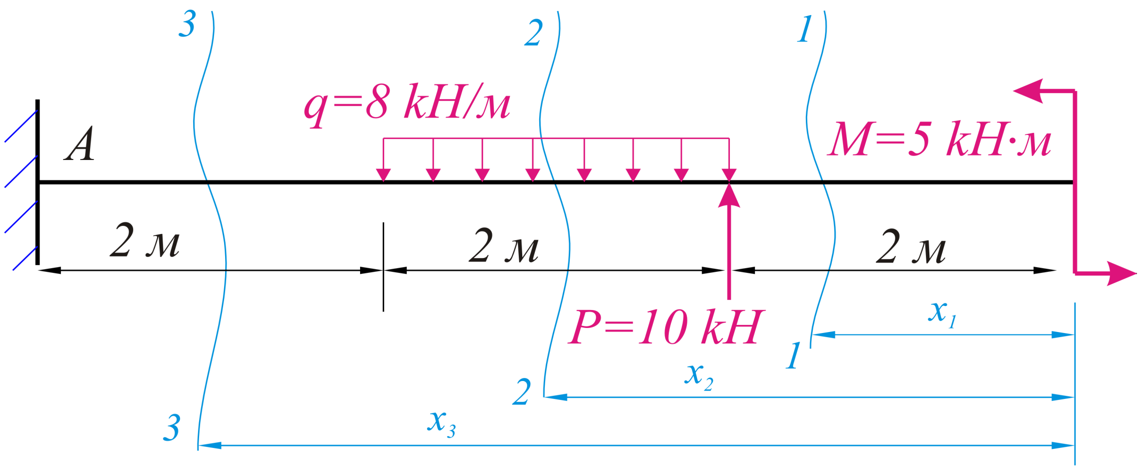


Рис. 3.55. Разбиение балки на участки (пример 3.12)

Первый участок.
Метод сечения справа,

$0 \leqslant x_1 \leqslant 2\,м$:

$Q_1 = 0$;

$M_1 = M = 5\,kH \cdot м = const$.

Второй участок.
Метод сечения справа,

$2 \leqslant x_2 \leqslant 4\,м$:

$Q_2 = -P + q \cdot (x_2 - 2)$;

При $x_2 = 2\,м \to$

$Q_2 = -P = -10\,kH$.

При $x_2 = 4\,м \to$

$Q_2 = -P = -10 + 8 \cdot (4 - 2) = 6\,kH$.

Определим координату точки, в которой поперечная сила меняет свой знак в пределах данного участка.

Для этого приравняем уравнение поперечной силы на данном участке нулю:

$$Q_2 = -P + q \cdot (x_2 - 2) = 0 \Rightarrow \; x_2 = \frac{P}{q} + 2 \;\; \Rightarrow = \frac{10}{8} + 2 = 3{,}25\,м;$$

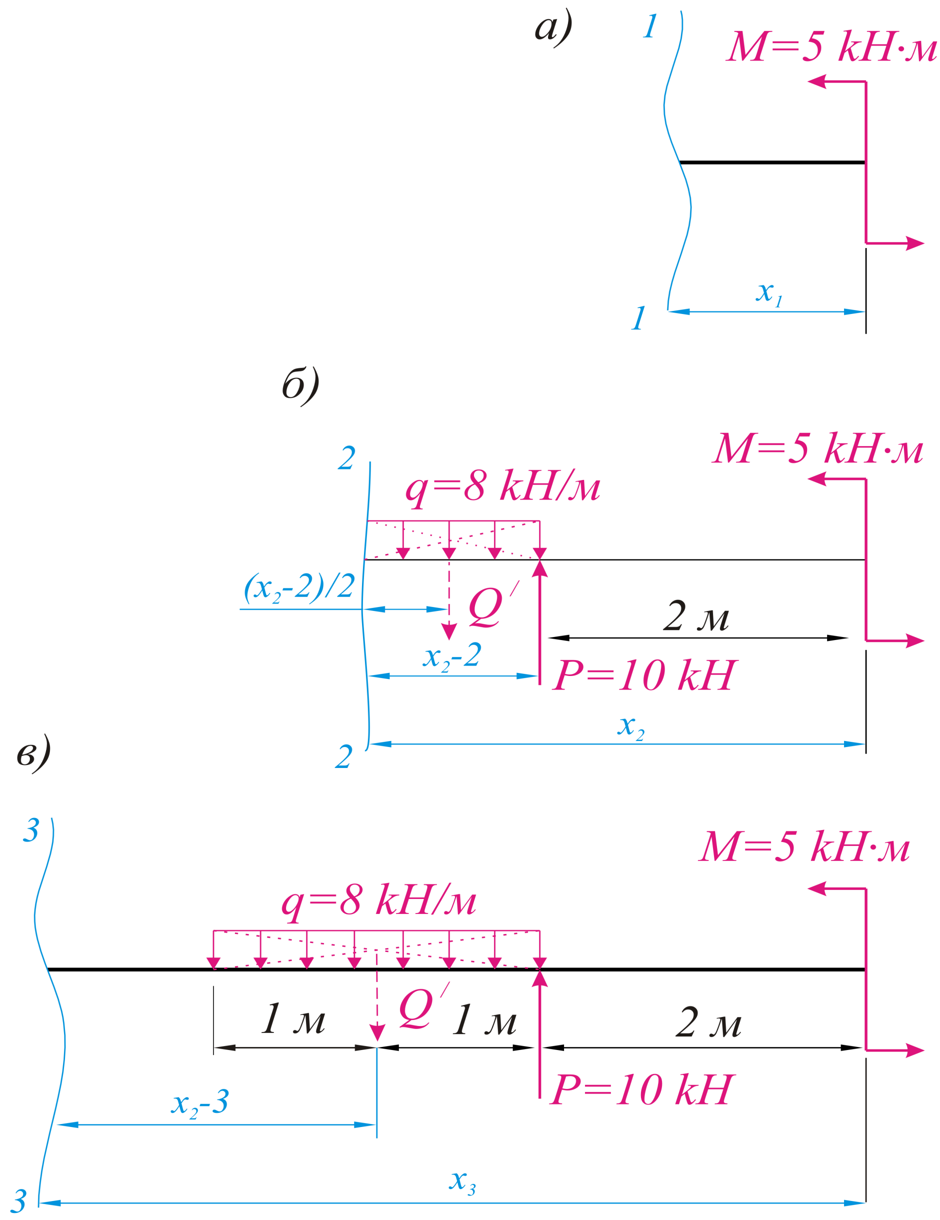


Рис. 3.56. Рассмотрение участков балки методом сечения справа (пример 3.12): *а)* первый участок; *б)* второй участок; *в)* третий участок

Полученное значение мы будем использовать при построении эпюры изгибающего момента в качестве точки -экстремума.

$$M_2 = M + P\cdot(x_2 - 2) - \frac{q\cdot(x_2-2)^2}{2}.$$

При $x_2 = 2\,м \rightarrow$ $M_2 = 5 + 10\cdot(2-2) - \frac{8\cdot(2-2)^2}{2} = 5\,kH\cdot м.$

При $x_2 = 3{,}25\,м \rightarrow$ $M_2 = 5 + 10\cdot(3{,}25-2) - \frac{8\cdot(3{,}25-2)^2}{2} = 11{,}25\,kH\cdot м.$

При $x_2 = 4\,м \rightarrow$ $M_2 = 5 + 10\cdot(4-2) - \frac{8\cdot(4-2)^2}{2} = 9\,kH\cdot м.$

Третий участок.

Метод сечения справа, $4 \leqslant x_3 \leqslant 6\, м$:

$Q_3 = -P = q \cdot 2 = -10 + 8 \cdot 2 = 6\, kH = const$.

$M_3 = M + P \cdot (x_3 - 2) - q \cdot 2 \cdot (x_3 - 3)$.

При $x_3 = 4\, м \rightarrow M_3 = 5 + 10 \cdot (4 - 2) - 8 \cdot 2(4 - 3) = 9\, kH \cdot м$.

При $x_2 = 2\, м \rightarrow M_3 = 5 + 10 \cdot (6 - 2) - 8 \cdot 2(6 - 3) = -3\, kH \cdot м$.

На основании расчитанных внутренних усилий на участках строим эпюру поперечной силы и изгибающего момента, рис. 3.57.

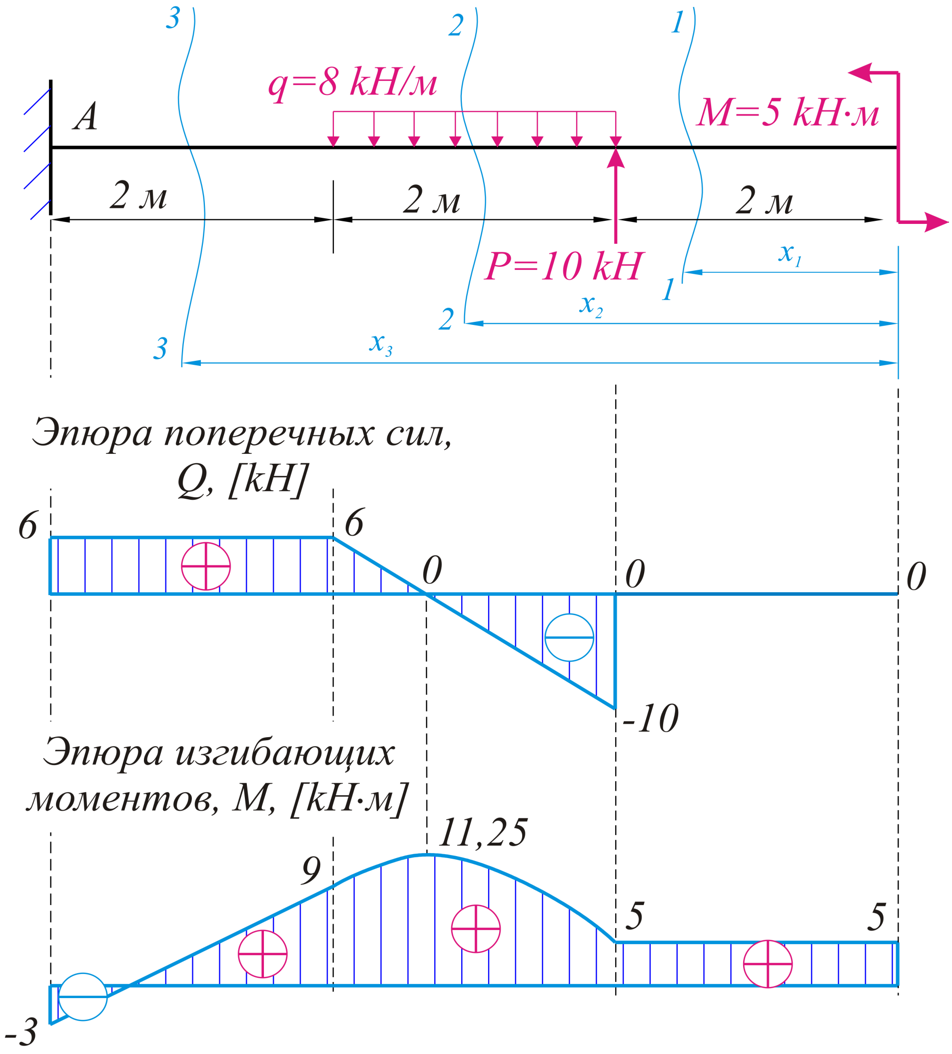


Рис. 3.57. Построение эпюр внутренних усилий (пример 3.12)

С учётом предлагаемого по условию метода расчёта, определяем опасное сечение бруса, как сечение с максимальным по абсолютной величине моментом. Такое сечение расположено на втором участке и соответствует координате, отсчитанной от крайней правой точки консоли $x_2 = 3{,}25\, м$, где $M = M_{max} = 11{,}25\, kH \cdot м$.

Определим потребный момент сопротивления W_y, используя формулу Анри Навье, из которой следует:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_y}\leqslant[\sigma]\Rightarrow$$

$$W_y\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}=\frac{11{,}25\cdot10^3}{135\cdot10^6}=83{,}33\cdot10^{-6}\left[м^3\right],\quad \text{или}\quad W_y\geqslant83{,}33\,см^3.$$

Открываем приложение и ищем требуемый профиль с ближайшим большим моментом сопротивления относительно поперечной горизонтальной оси. Им оказывается профиль 120×5, с $W_y=84{,}6\,см^3$. Задача решена.

3.5.6. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ФОРМУЛА ЖУРАВСКОГО

В тех случаях, когда в сечениях действует значительные поперечные силы, касательными напряжениями пренебрегать нельзя. Значительных величин касательные напряжения могут достигать в сечениях, перпендикулярных оси балок прямоугольного профиля, в двутавре и т.д.

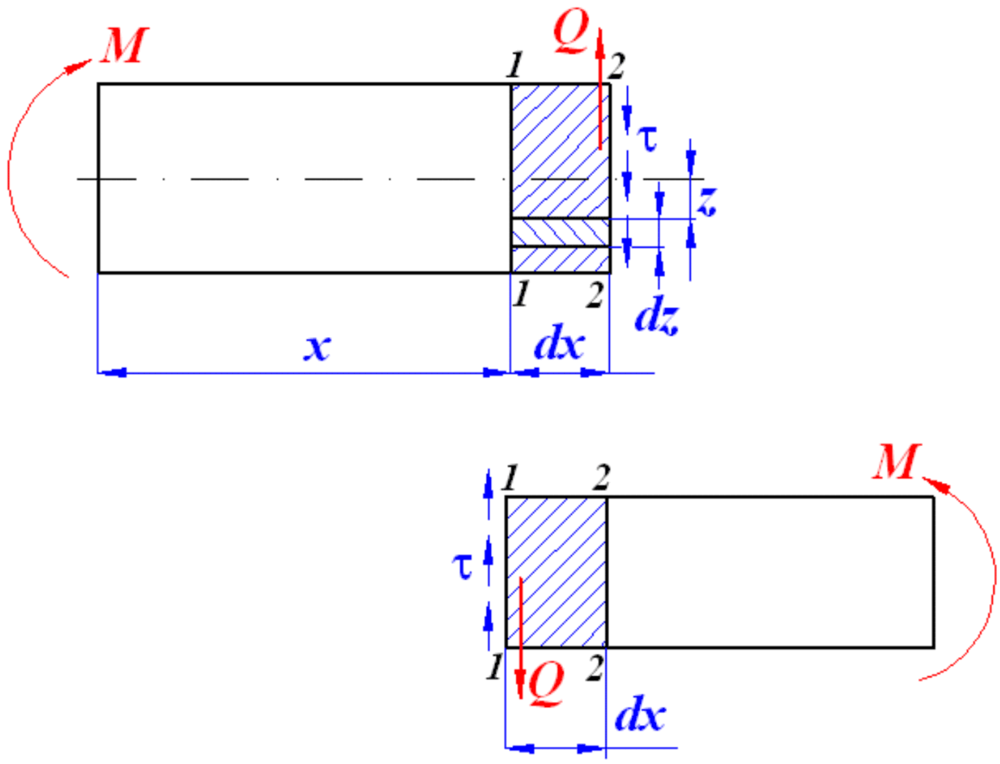


Рис. 3.58. Определяющая роль поперечной силы в формировании касательных напряжений в поперечных сечениях бруса

Очевидно, что, также как и нормальные напряжения, касательные распределяются по сечению определенным образом. Относительно характера распределения касательных напряжений Журавский (1855 г.) сделал следующие предположения:

1) Касательные напряжения направлены параллельно уравновешиваемой ими силе Q.

2) Касательные напряжения, действующие на площадках, находящихся на одном и том же расстоянии z от нейтральной оси y, равны между собой.

Для оценки действующих касательных напряжений используют выражение:

$$\tau = \frac{Q \cdot S(z)}{J_y \cdot b}. \tag{3.94}$$

Оно определяет касательное напряжение на уровне z, по сечению, перпендикулярному к оси балки.

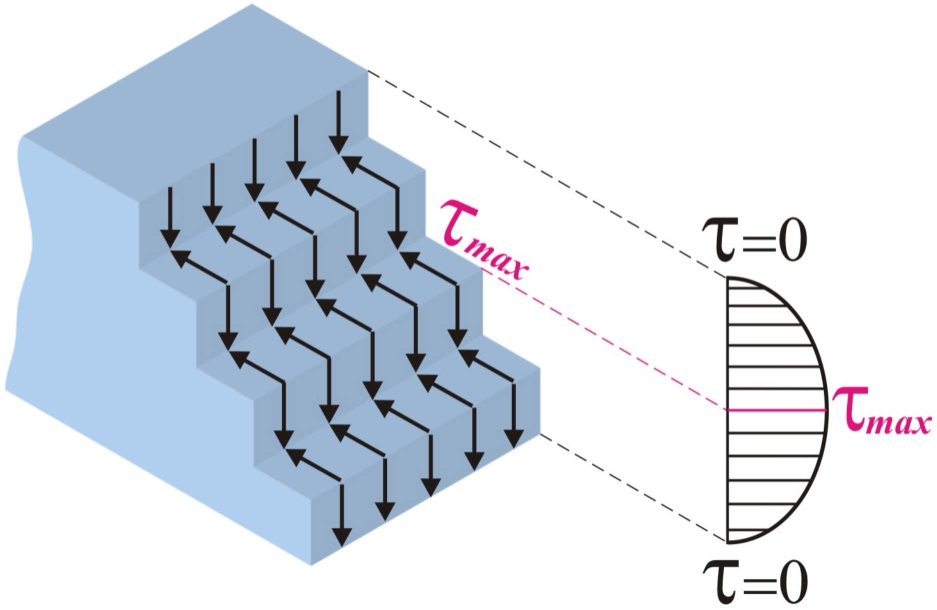


Рис. 3.59. Распределение касательных напряжений в поперечных сечениях бруса

В некоторых случаях касательные напряжения достигают значительной величины, поэтому проверку на прочность по нормальным напряжениям дополняют проверкой на прочность по касательным, согласно формуле:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{J_y b} \leqslant [\tau], \tag{3.95}$$

для прямоугольного сечения *(формула Журавского)*:

$$\tau_{MAX} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{MAX}}{bh}. \tag{3.95$'$}$$

Данную формулу вывел и применил при проектировании деревянных мостов для железной дороги Санкт-Петербург – Москва в 1855г. инженер Д.И. Журавский. С помощью данной формулы стало возможным корректировать прочностные расчеты, с учетом реальных сдвиговых деформаций поперечных сечений. За пределами России эта формула носит название *формулы Шведлера*.

3.5.7. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ ПО ГЛАВНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ. НЕОБХОДИМОСТЬ ПРОВЕРКИ НА ПРОЧНОСТЬ ПО ГЛАВНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Из материала предыдущих лекций мы проводили две проверки на прочность материала балки при изгибе:

По нормальным напряжениям: $\sigma_{max}=\dfrac{M_{max}}{W}\leqslant[\sigma]$.

По касательным напряжениям: $\tau_{max}=\dfrac{Q_{max}\cdot S_{max}}{J_y\cdot b(z)}\leqslant[\tau]$.

Уточним, прочность каких элементов балки мы проверяем. На рисунке 3.60 изображены два поперечных сечения.

В первом поперечном сечении - M_{max}, во втором - Q_{max}. В первом сечении мы проверяем на прочность элементы, расположенные у крайних волокон, которые подвергаются простому сжатию и растяжению. Во втором сечении мы проверяем на прочность элемент, расположенный у нейтрального слоя.

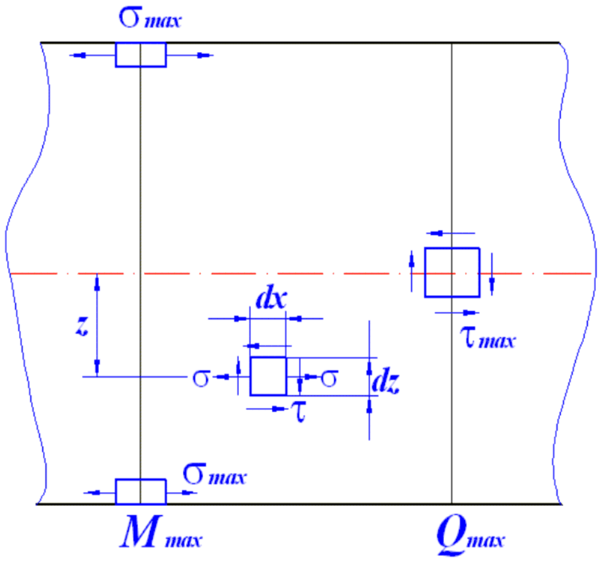


Рис. 3.60. К проверке бруса по нормальным и касательным напряжениям

Этот элемент испытывает чистый сдвиг. Таким образом, производя вышеописанные расчеты на прочность, мы проверяем на прочность материал только в трех указанных элементов.

В каком из этих элементов наблюдается наиболее опасные напряжения, на основании только этих расчетов сказать нельзя. Практика показывает, что разрушение балок зачастую происходит не только по плоскостям поперечных сечений и это нельзя связывать только с дефектами структуры и анизотропией материала балок. Можно предположить наличие напряжений в сечениях, положения которых отличаются от положений поперечных сечений, а их величина превосходит напряжения, действующие в поперечном сечении балки, где наблюдается M_{max} и Q_{max}. Таким образом, чтобы производить более точную проверку балки на прочность, необходимо определить значения и направления действия максимальных напряжений в теле балки.

3.5.8. СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Если материал подвергается деформации по двум и трем направлениям, то в таком случае наблюдается сложное напряженное состояние.

Площадки элемента, по которым не действуют касательные напряжения, называются *главными;* нормальные напряжения, которые действуют по таким площадкам, называются *главными напряжениями*.

В теории упругости доказывается, что в окрестности любого напряженного тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, через которые передаются три главных (нормальных) напряжения. Два из них имеют экстремальные значения (одно max, другое min), третье промежуточное.

В каждой точке напряженного тела можно выделить элементарный кубик, гранями которого служат главные площадки.

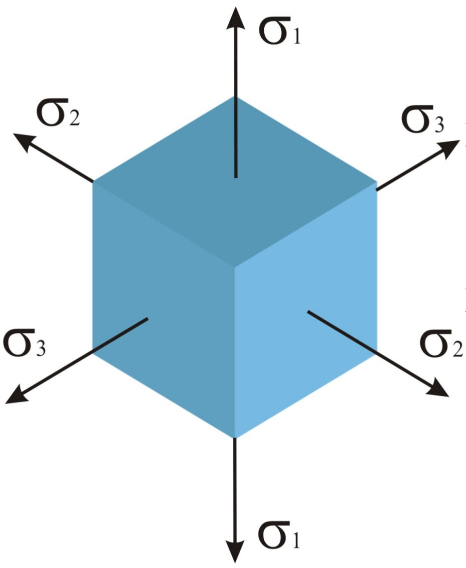


Рис. 3.61. Объемное напряженное состояние

В случае если два главных нормальных напряжения равны нулю, то такое напряженное состояние называется *линейным* (случай простого растяжения-сжатия).

В случае если два главных напряжения отличны от нуля, то наблюдается так называемое *плоское напряженное состояние*. (Случай растяжения или сжатия по двум направлениям.)

В случае, если все три главных напряжения не равны нулю в рассматриваемой точке, то наблюдается самый общий случай – *объемное напряженное состояние*. (Случай растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям).

Главные напряжения условимся обозначать в виде $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ассоциация нормальных напряжений в точке с форматом σ_i производится следующим образом.

Индексу $i=1$ соответствует наибольшее нормальное напряжение по алгебраической величине.

Индексу $i=3$ соответствует наименьшее напряжение. Сжимающие напряжения считается отрицательными. Таким образом, в общем случае должно выполняться условие: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$.

Общей характеристикой объёмного напряжённого состояния может являться так называемое *среднее* (нормальное) напряжение, определяемое через главные напряжения по формуле:

$$\sigma_{ср}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}. \tag{3.96}$$

Кроме этого, объёмное напряжённое состояние может характеризоваться максимальным касательным напряжением, которое действует по площадкам, равнонаклонённым к главным площадкам с экстремальными напряжениями, величину которого можно определить по формуле:

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2}. \tag{3.97}$$

3.5.9. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Используя теорию напряженного состояния, можно определить величины трех главных напряжений, касательных и нормальных напряжений на площадках сдвига. Зная допускаемое напряжение $[\sigma]$ для материала, для оценки прочности конструкции (в том числе и при изгибе) используют классические теории прочности. Данные теории прочности комплексно отображают взаимодействие нормальных и касательных напряжений, действующих в поперечных сечениях в виде эквивалента $\sigma_{экв}$ - отображающего в свою очередь значения главных напряжений, действующих по главным площадкам рассматриваемого элемента. Рассмотрим, как оцениваются эквивалентные напряжения для линейного, плоского и объёмного напряжённого состояния по различным теориям прочности.

По *первой теории наибольших нормальных напряжений*:

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma] \Leftrightarrow \sigma_{экв\,I}=\frac{1}{2}\left[\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right] \leqslant [\sigma]. \tag{3.98}$$

По *второй теории наибольших относительных удлинений*:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)-\frac{1}{2}\mu\left(\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\mu^2}\right)\right] \leqslant [\sigma], \tag{3.99}$$

или

$$\sigma_{экв\,II}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3) \leqslant [\sigma]. \tag{3.99$'$}$$

По *третьей теории наибольших касательных напряжений*:

$$\sigma_{экв\,III}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} \leqslant [\sigma], \tag{3.100}$$

или

$$\sigma_{экв\,III}=\sigma_1-\sigma_3 \leqslant [\sigma]. \tag{3.100$'$}$$

По *четвертой теории – наибольшей потенциальной энергии изменения формы (энергетической теории)*:

$$\sigma_{экв\,IV}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\leqslant[\sigma], \qquad (3.101)$$

или $$\sigma_{экв\,IV}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\leqslant[\sigma]. \qquad (3.101')$$

Уточним, в каких точках поперечного сечения (например, при изгибе) балки следует производить проверку прочности. Так как расчетное напряжение $\sigma_{экв}$ зависит и от σ и от τ, то проверку производят для того элемента балки, для которого σ и τ будут одновременно возможно большими. Данное условие имеет место, при наличии следующего:

1) Изгибающий момент и поперечная сила достигают наибольшей величины в одном и том же сечении.

2) Ширина балки резко меняется вблизи краев сечения (например, на уровне перехода от полки к стенке у двутаврового профиля касательные и нормальные напряжения имеют величины, близкие к максимальным).

Пример 3.13. Для объёмного напряженного состояния, характеризующегося главными напряжениями (рис. 3.62), определить среднее напряжение, максимальное касательное напряжение.

Решение.

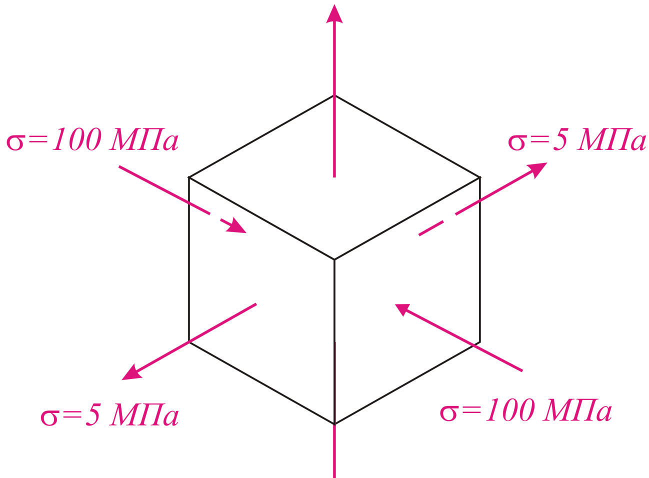


Рис. 3.62. К условию примера 3.13

Проведем инициализацию главных напряжений, согласно свойству: $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$.

Таким образом, для напряжённого состояния, показанного на рисунке 3.62:

$\sigma_1=20\,МПа$; $\sigma_2=5\,МПа$; $\sigma_3=-100\,МПа$;

Для оценки среднего (нормального) напряжения воспользуемся формулой:

$$\sigma_{ср}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}\Rightarrow$$

$$\sigma_{ср}=\frac{20+5-100}{3}=-25\,МПа.$$

Для оценки максимального напряжения воспользуемся формулой:

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{20-(-100)}{2}\Rightarrow\ \tau_{max}=60\,МПа.$$

Ответ: $\sigma_{ср}=-25\,МПа$; $\tau_{max}=60\,МПа$.

Пример 3.14. Сохранит ли элемент при объёмном напряжённом состоянии, с главными напряжениями, показанными на рис. 3.63, прочность, если для пластичного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, допускаемое напряжение составляет $[\sigma]=100\,МПа$. Оценку произвести, пользуясь третьей и четвертой теориями прочности.

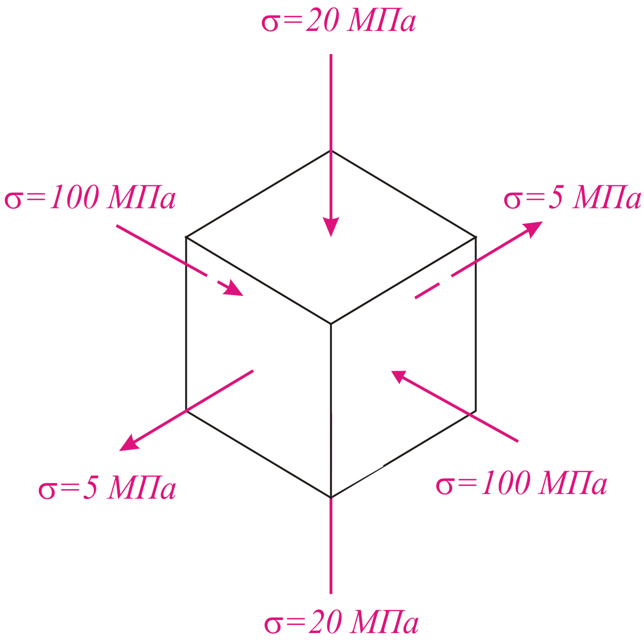


Рис. 3.63. К условиям примера 3.14

Решение.

Проведем инициализацию главных напряжений, согласно свойству: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Таким образом, для напряжённого состояния, показанного на рисунке: $\sigma_1=5\,МПа$; $\sigma_2=-20\,МПа$; $\sigma_3=-100\,МПа$;

Согласно третьей теории (теории наибольших касательных напряжений) условие прочности будет выглядеть:

$\sigma_{экв\,III}=\sigma_1-\sigma_3 \leqslant [\sigma] \Rightarrow \quad \sigma_{экв\,III}=5-(-100) \leqslant 100 \Rightarrow \quad 105>100 \Rightarrow$ Условие не выполняется, и при данном напряжённом состоянии в соответствии с третьей теории прочности элемент будет разрушен.

Согласно четвёртой теории прочности (теории удельной потенциальной энергии формоизменения) условие прочности при объёмном напряжённом состоянии будет выглядеть:

$$\sigma_{экв\,IV}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \leqslant [\sigma] \Rightarrow$$

$$\sigma_{экв\,IV}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(5-(-20))^2+((-20)-(-100))^2+((-100)-5)^2} \leqslant 100 \Rightarrow \quad 95<100.$$

Условие выполняется, и при данном напряжённом состоянии в соответствии с четвёртой теорией прочности элемент будет сохранять прочность.

При общем выводе по результатам расчётов учтем то обстоятельство, что недостатком третьей теории прочности является то, что она не учитывает второго главного напряжения, которое оказывает, хотя и незначительное, влияние на прочность материала. Отмечено, что третья теория прочности дает, как правило, завышенный запас прочности. Поэтому, в случае получения неоднозначных (хотя и близких) результатов расчёта по третьей и четвёртой теории, целесообразно руководствоваться результатами, полученными по четвёртой теории, которая лишена вышеуказанных недостатков.

Ответ: Материал при данном напряжённом состоянии ещё будет сохранять свою прочность.

3.5.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

При действии внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей инерции балки, происходит искривление оси, в той же плоскости. Это явление называется *плоским изгибом*.

Кривизну оси бруса K в выбранном поперечном сечении можно представить в виде:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \qquad (3.102)$$

То есть кривизна бруса прямо пропорциональна величине изгибающего момента в данном сечении и обратно пропорциональна величине EJ, называемой *жесткостью бруса при изгибе*. Перемещения при изгибе могут быть линейными и угловыми (рис. 3.64). Линейное перемещение центра тяжести поперечного сечения по направлению, перпендикулярному к оси вниз, называется *прогибом* этого сечения балки. Линейное перемещение (прогиб) измеряется в $[м]$. При угловом перемещении поперечное сечение, оставаясь плоским, поворачивается по отношению к своему первоначальному положению.

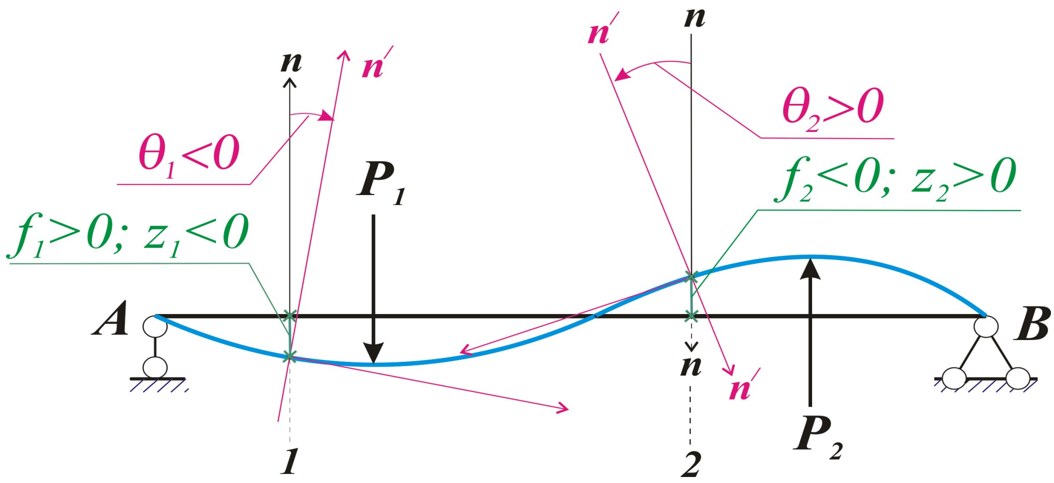


Рис. 3.64. Правила знаков перемещений при изгибе

Угол θ (тэта), на который каждое поперечное сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется *углом поворота* сечения. Угловое перемещение измеряется в $[рад]$. При определении знаков данных перемещений необходимо руководствоваться **правилом:**

Прогиб считается положительным $(f > 0)$, если поперечное сечение переместилось вниз относительно своего первоначального положения, при этом линейное перемещение вдоль оси z считается отрицательным $(z < 0)$, и наоборот.

Угол поворота поперечного сечения считается положительным $(\theta > 0)$, если нормаль n' к оси балки в деформированном состоянии повернулась относительно нормали к оси недеформированной балки n вместе с рассматриваемым сечением против часовой стрелки, и наоборот (см. рис. 3.64).

3.5.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Вычисление перемещений поперечных сечений при изгибе можно осуществить, применяя метод начальных параметров, который представляет к решению единые дифференциальные уравнения, члены которого отображают имеющуюся на балке нагрузку.

Уравнение углов поворота:

$$EJ\cdot\theta = EJ\cdot\theta_0 + \sum\frac{M\cdot c}{1!} + \sum\frac{F\cdot c^2}{2!} + \sum\frac{q\cdot c^3}{3!} + \sum\frac{q'\cdot c^4}{4!}. \qquad (3.103)$$

Уравнение прогибов:

$$EJ\cdot z = EJ\cdot z_0 + \frac{EJ\cdot\theta_0\cdot x}{1!} + \sum\frac{M\cdot c^2}{2!} + \sum\frac{F\cdot c^3}{3!} + \sum\frac{q\cdot c^4}{4!} + \sum\frac{q'\cdot c^5}{5!}. \quad (3.104)$$

Эти уравнения справедливы в том случае, если начальное сечение балки с постоянной жесткостью (с координатой $x=0$) расположено в крайнем левом сечении балки. Ось z направлена вверх, а ось x - слева – направо.

В данных выражениях:

x, $[м]$ - координата поперечного сечения, в котором определяется перемещение, отложенное от крайнего левого (начального) сечения балки.

$E\cdot J \equiv E\cdot J_y$, $[H\cdot м^2]$ - жесткость поперечного сечения балки;

θ, $[рад]$ - угол поворота поперечного сечения с координатой x. (Положительным считается угол поворота в том случае, если острый угол θ между нормалями к деформированной и недеформированной оси отложен от нормали к недеформированной оси против часовой стрелки).

θ_0, $[рад]$ - угол поворота крайнего левого поперечного сечения балки;

$z=-f$, $[м]$ - вертикальное линейное перемещение (прогиб) поперечного сечения с координатой x. Положительному значению прогиба f соответствует перемещение z поперечного сечения вниз (с вогнутостью деформированной оси, направленной вверх);

$z_0=-f_0$, $[м]$ - вертикальное линейное перемещение (прогиб) крайнего левого поперечного сечения;

c, $[м]$ - расстояние от сечения, в котором к балке приложена соответствующая сосредоточенная нагрузка (или начинается действие распределенной нагрузки) до сечения с координатой x, где определяются перемещения;

$q'=\frac{q(x)}{c}$, $\left[\frac{H/м}{м}\right]$ - скорость изменения интенсивности нагрузки, распределенной по закону треугольника.

Пример 3.15. Для шарнирной балки, изготовленной из круга $D=100\,мм$, рис. 3.65, определить перемещения поперечного сечения C, методом начальных параметров. Модуль продольной упругости материала балки составляет $E=200\,ГПа$.

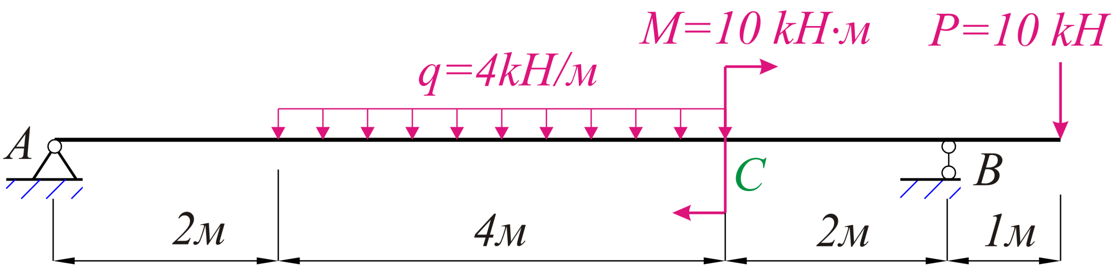


Рис. 3.65. К условию примера 3.15

Решение:

Прикладываем на схеме опорные реакции R_A и R_B, в предположении, что они направлены вертикально вверх. Пользуясь уравнениями статического равновесия, определим их значения.

$$\sum M_A(\vec{F}_i)=0:$$

$$-Q\cdot 4-M+R_B\cdot 8-P\cdot 9=0\Rightarrow$$

$$R_B=\frac{Q\cdot 4+M+P\cdot 9}{8}=\frac{4\cdot 4\cdot 4+10+10\cdot 9}{8}\Rightarrow \quad R_B=20{,}5\,kH.$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i)=0:$$

$$-R_A\cdot 8+Q\cdot 4-M-P\cdot 1=0\Rightarrow$$

$$R_A=\frac{Q\cdot 4-M-P\cdot 1}{8}=\frac{4\cdot 4\cdot 4-10-10\cdot 1}{8}\Rightarrow \quad R_B=5{,}5\,kH.$$

Проверка:

$$\sum Y=0:$$

$$R_A-Q+R_B-P=0\Rightarrow$$

$20{,}5-16+5{,}5-10=0$. Истинно.

Рассчитаем жесткость EJ поперечного сечения при изгибе:

$$J=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi\cdot 0{,}1^4}{64}\Rightarrow \quad J=4{,}908\cdot 10^{-6}\,м^4.$$

Тогда:

$$E\cdot J=200\cdot 10^9\cdot 4{,}908\cdot 10^{-6}=981{,}75\cdot 10^3\,H\cdot м^2.$$

Приступим к определению перемещений. Непосредственно сразу мы не можем использовать уравнения метода начальных параметров, по той причине, что нам неизвестен начальный параметр θ_0. Для того, чтобы его определить, возьмём сечение, величина прогиба в котором первоначально известна (используем граничные и начальные условия). Таким сечением в нашем случае будет являться сечение, расположенное на опоре B, с координатой $x=8\,м$, где вертикальное перемещение известно первоначально и равно нулю, т.е.: $y=0$. Очевидно также, что при $x_0=0\,м$, $z_0=0$. Подставляя начальные и граничные условия в уравнение прогиба, определим неизвестный начальный параметр θ_0. Так как распределённая нагрузка не доходит до сечения B, продлеваем её искусственно, прикладывая соответствующую компенсационную распределённую нагрузку, рис. 3.66.

Уравнение прогибов в общем виде:

$$EJ\cdot z = EJ\cdot z_0 + \frac{EJ\cdot\theta_0\cdot x}{1!} + \sum\frac{M\cdot c^2}{2!} + \sum\frac{P\cdot c^3}{3!} + \sum\frac{q\cdot c^4}{4!} + \ldots$$

Применительно к вспомогательному сечению, расположенному на опоре B:

$$EJ\cdot 0 = EJ\cdot 0 + \frac{EJ\cdot\theta_0\cdot 8}{1} + \frac{M\cdot 2^2}{1\cdot 2} + \frac{R_A\cdot 8^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{-q\cdot 6^4 + q\cdot 2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \Rightarrow$$

$$\theta_0 = -\frac{10^3}{8EJ}\cdot\left(\frac{10\cdot 2^2}{2} + \frac{5{,}5\cdot 8^3}{6} + \frac{4\cdot 2^4 - 4\cdot 6^4}{24}\right) \Rightarrow$$

$$\theta_0 = -\frac{1}{8\cdot 981{,}75}\cdot(20 + 469{,}333 - 213{,}333) \Rightarrow \quad \theta_0 = -0{,}03514\ \text{рад}.$$

Знак «минус» говорит о том, что поворот θ_0 направлен по часовой стрелке.

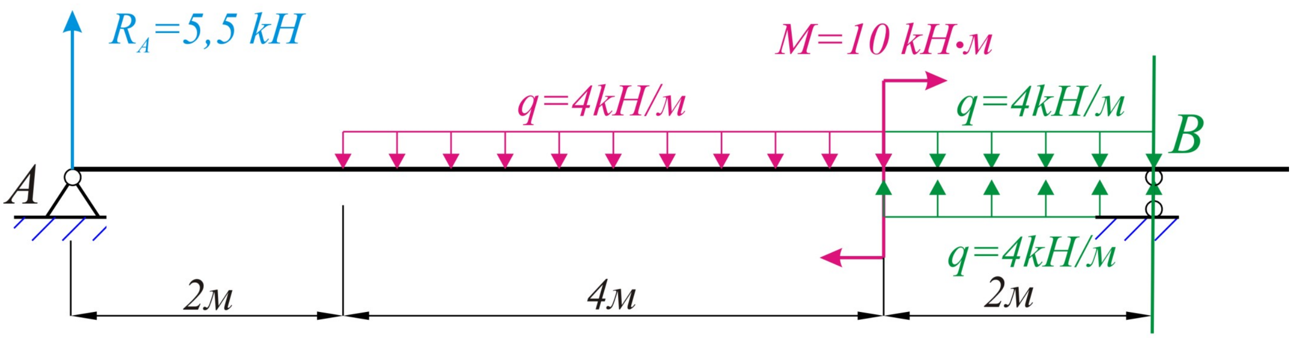


Рис. 3.66. К рассмотрению вспомогательного сечения B (пример 3.15)

Определив начальный параметр θ_0, приступим к непосредственному расчёту перемещений заданного сечения C. Его координата, отсчитанная от крайнего левого сечения, составляет $x_C = 6\ м$, рис. 3.67.

Определим угол поворота заданного поперечного сечения. Для этого подставим в уравнение угловых перемещений известные начальные параметры.

В общем виде уравнение углов поворота:

$$EJ\cdot\theta = EJ\cdot\theta_0 + \sum\frac{M\cdot c}{1!} + \sum\frac{F\cdot c^2}{2!} + \sum\frac{q\cdot c^3}{3!} + \ldots.$$

Применительно к сечению C, расположенному на расстоянии $x_C = 6\ м$ от опоры A:

$$EJ\cdot\theta_C = EJ\cdot\theta_0 + \frac{R_A\cdot 6^2}{1\cdot 2} - \frac{q\cdot 4^3}{1\cdot 2\cdot 3} \Rightarrow$$

$$\theta_C = \frac{1}{981{,}75}\left(981{,}75\cdot(-0{,}03514) + \frac{5{,}5\cdot 6^2}{1\cdot 2} - \frac{4\cdot 4^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right) \Rightarrow \quad \theta_C = 0{,}0222\ \text{рад}.$$

Знак «плюс» говорит о том, что сечение C повернулось против часовой стрелки.

Определим линейное перемещение сечения C. Для этого подставим в общее уравнение прогибов известные нам данные.

Уравнение прогибов в общем виде:

$$EJ\cdot z=EJ\cdot z_0+\frac{EJ\cdot\theta_0\cdot x}{1!}+\sum\frac{M\cdot c^2}{2!}+\sum\frac{P\cdot c^3}{3!}+\sum\frac{q\cdot c^4}{4!}+\ldots$$

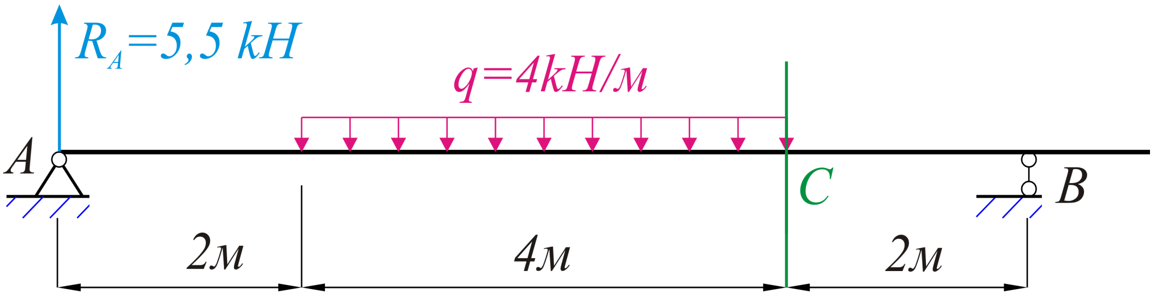


Рис. 3.67. К определению перемещений сечения C (пример 3.15)

Применительно к сечению C, расположенному на расстоянии $x_C=6\,м$ от опоры A:

$$EJ\cdot z_C=EJ\cdot 0+\frac{EJ\cdot\theta_0\cdot 6}{1}+\frac{R_A\cdot 6^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{4\cdot 4^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Rightarrow$$

$$z_C=\frac{1}{EJ}\left(EJ\cdot\theta_0\cdot x+\frac{R_A\cdot 6^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{4\cdot 4^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)=\frac{1}{981{,}75}\left(981{,}75\cdot(-0{,}03514)\cdot 6+\frac{5{,}5\cdot 6^3}{6}-\frac{4\cdot 4^4}{24}\right)\Rightarrow$$

$z_C=-0{,}0526\,м$.

`Знак «минус» говорит о том, что сечение переместилось по вертикали «вниз».

Ответ: $\theta_C=0{,}0222\,рад$; $z_C=-0{,}0526\,м$.

3.6. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Комбинации простейших деформаций определяют случаи сложного сопротивления. Рассмотрим некоторые виды сложного сопротивления.

3.6.1. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ - СЖАТИЯ

Рассмотрим случай совместного действия продольной сжимающей силы P и поперечной нагрузки, рис. 3.68.

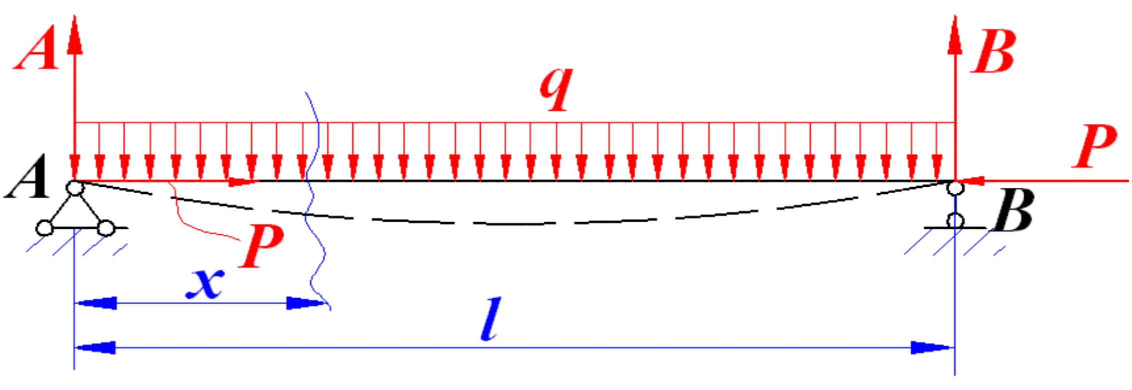


Рис. 3.68. Совместное действие изгиба и сжатия

Очевидно, что от продольной силы P сжимающие (отрицательные) напряжения равномерно распределены по перечному сечению балки и равны: $\sigma_P = -P/A$. Нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости в сечении с абсциссой x, отсчитанной с левого края, равны: $\sigma_q = (M_x z)/J_y$. Таким образом, полное нормальное напряжение в точке с координатой z (отсчет от нейтральной оси) для этого сечения равно:

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_q = -\frac{P}{A} + \frac{M_x z}{J_y}.$$

Как следует из формулы, наибольшие по модулю нормальные напряжения будут в крайних верхних волокнах, где к максимальным отрицательным нормальным напряжениям изгиба добавляются отрицательные сжимающие напряжения от продольной сжимающей силы. Таким образом, эпюра распределения нормальных напряжений по сечению (рис. 3.69) будет выглядеть следующим образом:

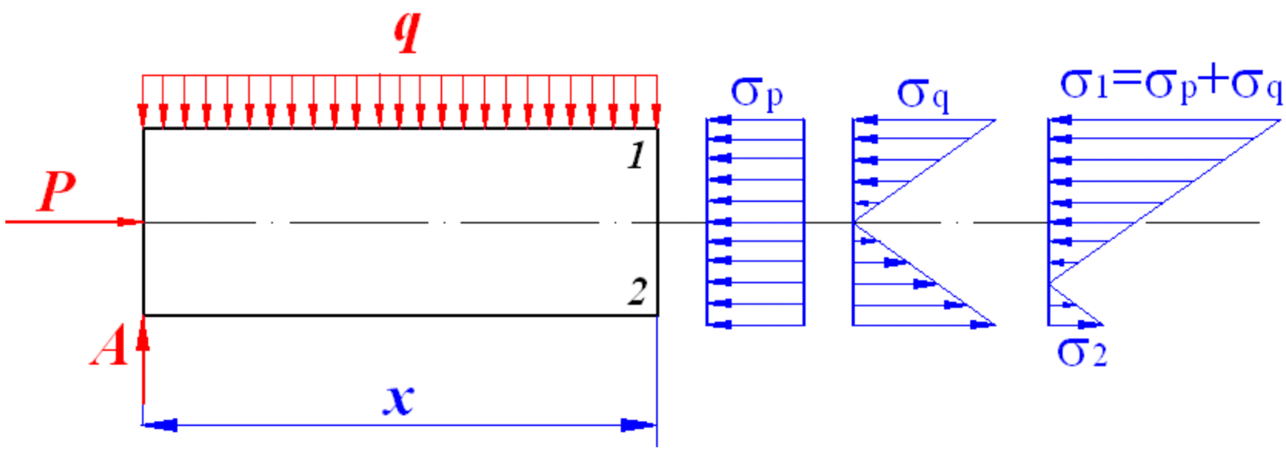


Рис. 3.69. Перераспределение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса

В общем виде формула расчета на прочность будет выглядеть как

$$\sigma_{max} = \pm\left[\frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W}\right] \leqslant [\sigma]. \tag{3.105}$$

В случае растягивающей силы необходимо учитывать соответствующий знак в формуле и положение опасной точки поперечного сечения. Очевидно, что данная формула справедлива для симметричных сечений, а также исходит из того, что материал одинаково сопротивляется растяжению-сжатию.

3.6.2. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

Как правило, валы работают не только на чистое кручение, но и на изгиб одновременно, рис. 3.70.

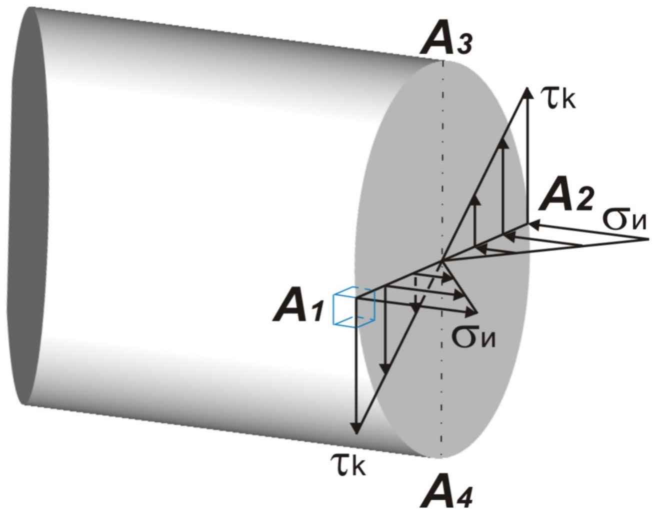


Рис. 3.70. Сочетание касательных и нормальных напряжений при изгибе с кручением

В таких случаях расчет на прочность будет выглядеть следующим образом. Общий вид расчетной формулы:

По теории наибольших касательных напряжений: $\sqrt{\sigma_И^2+4\tau_К^2}\leqslant[\sigma]$.

По энергетической теории: $\sqrt{\sigma_И^2+3\,\tau_К^2}\leqslant[\sigma]$.

Для вала круглого сечения: $\sigma_И=\dfrac{M_И}{W}$, где $W=\dfrac{\pi\cdot r^3}{4}$;

$$\tau_К=\frac{M_К}{W_P}=\frac{M_К}{\dfrac{\pi\cdot r^3}{2}}=\frac{M_К}{2W}.$$

Все эти формулы могут быть представлены в виде $\dfrac{M_P}{W}\leqslant[\sigma]$, где M_P - расчетный момент, величина которого,

по теории наибольших касательных напряжений:

$$M_{P3}=\sqrt{M_И^2+M_К^2}; \tag{3.106}$$

по энергетической теории:

$$M_{P4}=\sqrt{M_И^2+0,75\,M_К^2}; \tag{3.107}$$

Таким образом, расчетную формулу на прочность можно представить:

По третьей теории: $\dfrac{1}{W}\sqrt{M_И^2+M_К^2}\leqslant[\sigma]$.

По четвертой теории прочности: $\dfrac{1}{W}\sqrt{M_И^2+0,75\,M_К^2}\leqslant[\sigma]$.

Если валы работают еще и на осевую (продольную) нагрузку, то влияние этих сил N может быть учтено добавкой к наибольшим напряжениям от изгиба $\sigma_И$ напряжений $\sigma_0=\dfrac{N}{A}$.

Пример 3.16. Трансмиссионный вал круглого сплошного сечения передает энергию от двигателя через шкив *1* диаметра 100 *мм* с усилиями натяжения $T_1 = 12\,kH \cdot м$ и $t_1 = 2\,kH \cdot м$, расположенными в вертикальной плоскости исполняющему механизму через шкив *2* диаметра 200 *мм* с усилиями натяжения T_2 и $t_2 = 2\,kH \cdot м$, расположенными в горизонтальной плоскости (рис. 3.71). Подобрать диаметр вала по третьей теории прочности, если для материала вала $[\sigma] = 100\,МПа$.

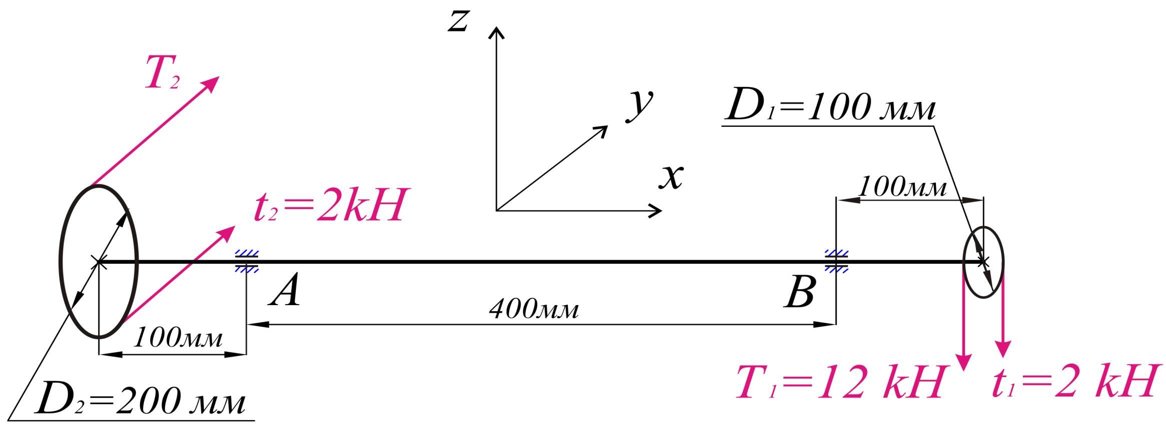


Рис. 3.71. К условию примера 3.16

Решение

Определим усилие натяжения T_2, исходя из того, что рассматриваемый вал совершает равномерное вращение, отсюда:

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{D_1}{2} \cdot (T_1 - t_1) - \frac{D_2}{2} \cdot (T_2 - t_2) = 0 \Rightarrow$$

$$M_1 = \frac{D_1}{2}(T_1 - t_1) = \frac{0{,}1}{2} \cdot (12 - 2) = 0{,}5\,kH \cdot м. \quad M_1 = M_2 = 0{,}5\,kH \cdot м.$$

$$D_1 \cdot (T_1 - t_1) = D_2 \cdot (T_2 - t_2) \Rightarrow \quad T_2 = \frac{D_1}{D_2} \cdot (T_1 - t_1) + t_2 = \frac{0{,}1}{0{,}2} \cdot (12 - 2) + 2 = 7\,kH.$$

Перенесём линии действия усилий натяжений на ось бруса, с добавлением соответствующих моментов, и получим расчётную схему (рис. 3.72).

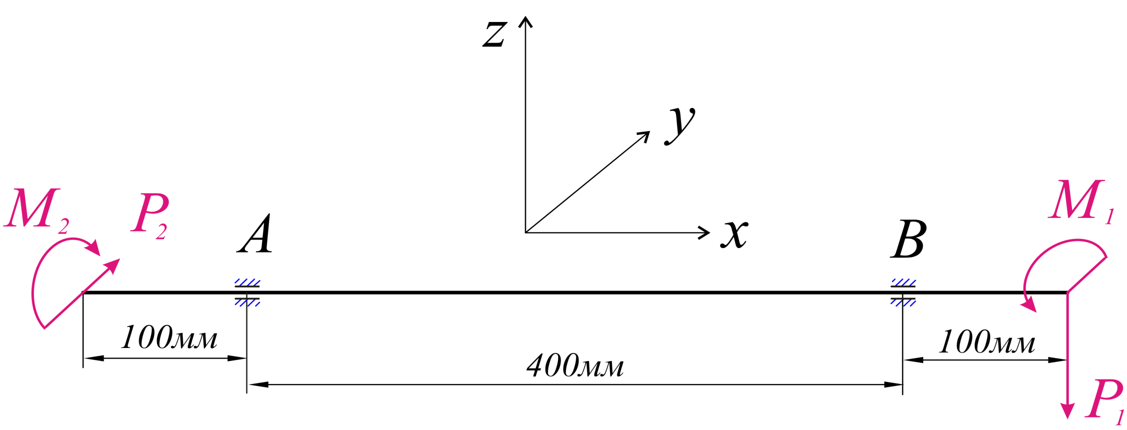


Рис. 3.72. Расчётная схема (пример 3.16)

Определим изгибающий момент в вертикальной плоскости, согласно расчетной схеме (рис. 3.73).

Для этого рассчитаем опорные реакции в этой плоскости.

$$\sum M_A\left(\vec{F}_i\right)=0 \Rightarrow \quad Z_B \cdot 0{,}4 - P_1 \cdot 0{,}5 = 0 \Rightarrow \; Z_B = \frac{P_1 \cdot 0{,}5}{0{,}4} = \frac{14 \cdot 0{,}5}{0{,}4} = 17{,}5\,kH.$$

$$\sum M_B\left(\vec{F}_i\right)=0 \Rightarrow \quad Z_A \cdot 0{,}4 - P_1 \cdot 0{,}1 = 0 \Rightarrow \; Z_A = \frac{P_1 \cdot 0{,}1}{0{,}4} = \frac{14 \cdot 0{,}1}{0{,}4} = 3{,}5\,kH.$$

Разобьём балку на участки и рассмотрим каждый участок в отдельности.

Первый участок

$0 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}1$. Метод сечения слева.

$M_{y1}=0.$

Второй участок

$0{,}1 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}5$. Метод сечения слева.

$M_{y2} = -Z_A \cdot (x_2 - 0{,}1).$

При $x_2 = 0{,}1 \Rightarrow \quad M_{y2} = 0;$

При $x_2 = 0{,}5 \Rightarrow \quad M_{y2} = -3{,}5 \cdot (0{,}5 - 0{,}1) = -1{,}4\,kH \cdot м;$

Третий участок

$0 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}1$. Метод сечения справа.

$M_{y3} = -P_1 \cdot x_3.$

При $x_3 = 0 \Rightarrow \quad M_{y3} = 0;$

При $x_3 = 0{,}1 \Rightarrow \quad M_{y3} = -14 \cdot 0{,}1 = -1{,}4\,kH \cdot м.$

На основании данных расчёта строим соответствующую эпюру, см. рис. 3.73.

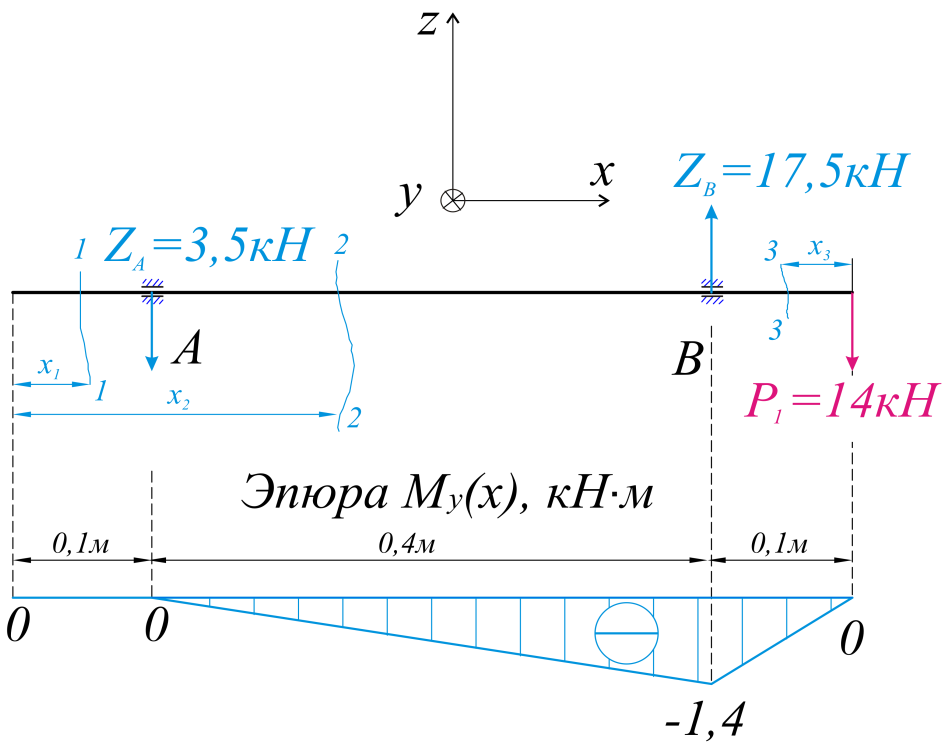


Рис. 3.73. Эпюра изгибающих моментов для вертикальной плоскости (пример 3.16)

Определим изгибающий момент в горизонтальной плоскости (рис. 3.74).

Для этого рассчитаем опорные реакции в этой плоскости.

$$\sum M_A\left(\vec{F}_i\right)=0\Rightarrow$$

$$-P_2\cdot 0{,}1+Y_B\cdot 0{,}4=0\Rightarrow$$

$$Y_B=\frac{P_2\cdot 0{,}1}{0{,}4}=\frac{9\cdot 0{,}1}{0{,}4}=2{,}25\,kH\,.$$

$$\sum M_B\left(\vec{F}_i\right)=0\Rightarrow$$

$$-P_2\cdot 0{,}5+Y_A\cdot 0{,}4=0\Rightarrow$$

$$Y_A=\frac{P_2\cdot 0{,}5}{0{,}4}=\frac{9\cdot 0{,}5}{0{,}4}=11{,}25\,kH\,.$$

Разобьём балку на участки и рассмотрим каждый участок в отдельности.

Первый участок

$0\leqslant x_1\leqslant 0{,}1$. Метод сечения слева.

$M_{z1}=P_2\cdot x_1$.

При $x_1=0\Rightarrow \quad M_{z1}=0$;

При $x_1=0{,}1\Rightarrow \quad M_{z1}=9\cdot 0{,}1=0{,}9\,kH\cdot м$;

Второй участок

$0{,}1\leqslant x_2\leqslant 0{,}5$. Метод сечения справа.

$M_{z2}=Y_B\cdot\left(x_2-0{,}1\right)$.

При $x_2=0{,}1\Rightarrow \quad M_{z2}=0$;

При $x_2=0{,}5\Rightarrow \quad M_{z2}=2{,}25\cdot(0{,}5-0{,}1)=0{,}9\,kH\cdot м$;

Третий участок

$0\leqslant x_3\leqslant 0{,}1$. Метод сечения справа.

$M_{z3}=0$.

На основании данных расчёта строим соответствующую эпюру, см. рис. 3.74.

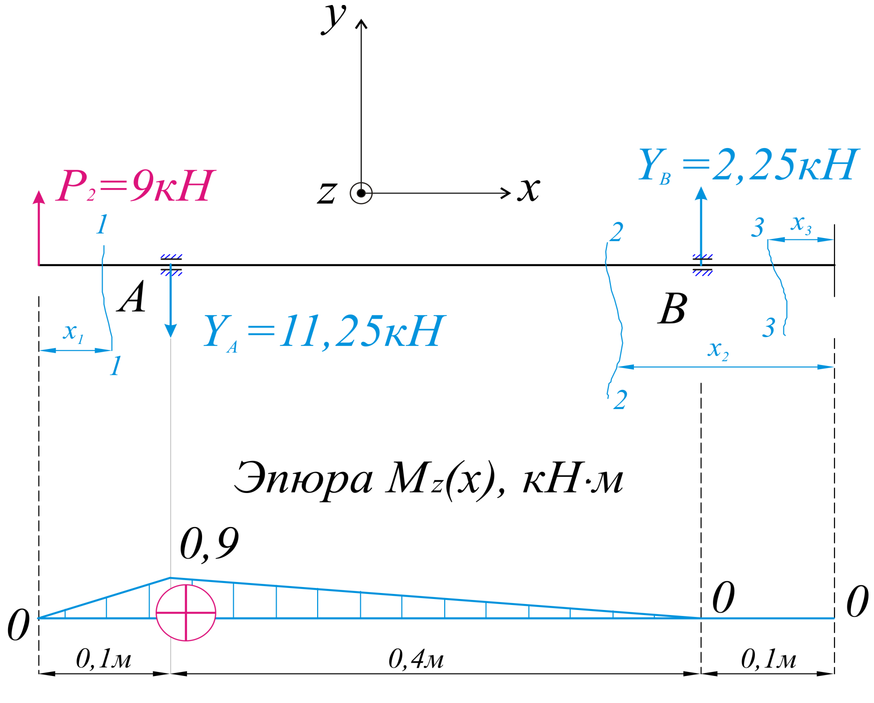


Рис. 3.74. Эпюра изгибающих моментов для горизонтальной плоскости (пример 3.16)

Согласно данным задания, построим также эпюру крутящих моментов (рис. 3.75).

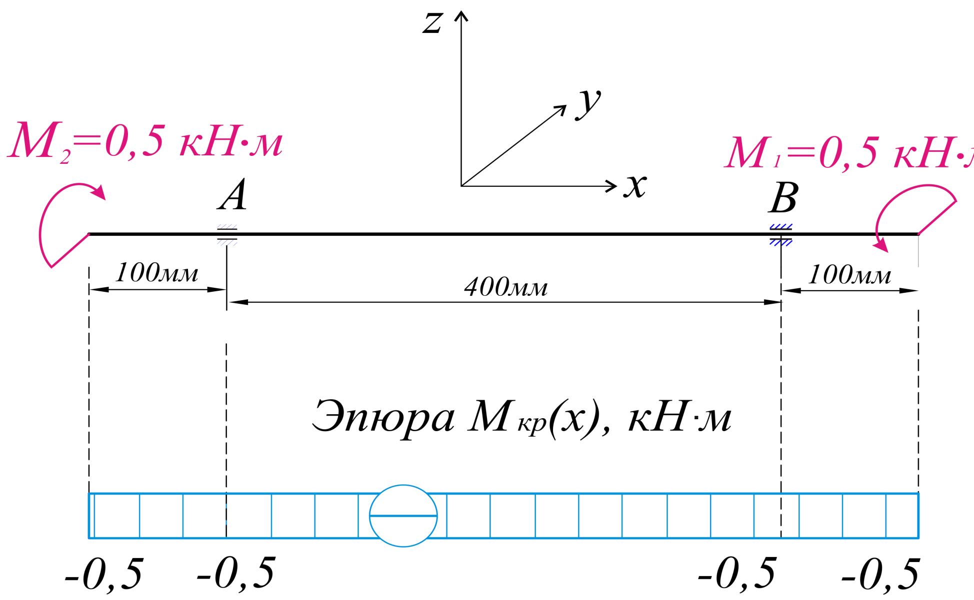


Рис. 3.75. Эпюра крутящих моментов (пример 3.16)

Проанализируем полученные эпюры.

Опасным может быть сечение, расположенное несколько левее опоры B. Здесь $M_И = M_y = -1{,}4\,kH \cdot м$ и $M_{кр} = -0{,}5\,кH \cdot м$.

Согласно третьей теории прочности:

$W^{-1} \cdot \sqrt{M_И^2 + M_{кр}^2} \leqslant [\sigma] \Rightarrow$

Для сплошного круглого сечения: $W = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32} \Rightarrow$

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{M_И^2 + M_{кр}^2}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1{,}4^2 + 0{,}5^2}}{\pi \cdot 100 \cdot 10^6}} \Rightarrow d \geqslant 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{1{,}4^2 + 0{,}5^2}}{\pi \cdot 100}} \Rightarrow$$

$d \geqslant 0{,}0533\,м \approx \varnothing 53{,}3\,мм$.

Для диаметра вала выбираем ближайшее большее целое число (в *мм*) - $\varnothing 54\,мм$.

Ответ: Принимаем диаметр вала равным $\varnothing 54\,мм$.

3.7. УСТОЙЧИВОСТЬ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Для ряда конструкций, обладающих недостаточной жесткостью, актуальным становится вопрос проверки на прочность с учетом устойчивости. Под *устойчивостью* понимается способность элемента сохранять свою первоначальную форму упругого равновесия.

Приведем наиболее типичный пример.

Брус сжат центральной продольной силой P.

Если его конструкция достаточно жесткая, то $\sigma = \dfrac{P}{A} \leqslant [\sigma]$, где $[\sigma] = \dfrac{\sigma_B}{k_B}$.

Однако все меняется в обратном случае. Если подвергнуть тонкий стержень осевому сжатию, то он сломается, предварительно потеряв первоначальную форму. Причем его разрушение произойдет при напряжениях, гораздо ниже расчетных.

Поэтому для надежной работы конструкции мало условия прочности, необходимо, чтобы все ее элементы при действии нагрузки деформировались в таких пределах, чтобы характер их работы оставался неизменным (сохраняли устойчивость). Таким образом, помимо расчетов на прочность, в ряде случаев необходима проверка на устойчивость.

3.7.1. КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА. КРИТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Рассмотрим стержень, загружая его центральной силой P (рис. 3.76). Постепенно увеличивая значение сжимающей силы, можно выявить такое значение P, при котором прямолинейная форма стержня перестает быть устойчивой.

Так вот, такое значение силы P называется критическим, а сама сила, называется *критической силой* P_K. Переход к критическому значению силы P_K осуществляется внезапно. В таких случаях разрушение конструкции происходит при напряжениях, гораздо меньших расчетных $\sigma = \dfrac{P}{A} \leqslant [\sigma]$.

На основании этого можно сделать следующий вывод.

Для обеспечения надежной работы конструкции расчета на прочность недостаточно. Необходимо, чтобы величина сжимающей силы $P < P_K$.

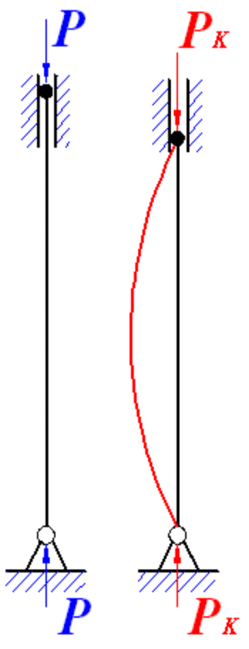


Рис. 3.76. К проверке устойчивости

Критическая сила P_K вызывает в сжатом стержне напряжение, называемое *критическим напряжением*, равным $\sigma_K = \frac{P_K}{A}$.

Таким образом, к условию прочности для сжатого стержня $\sigma = \frac{P}{A} \leqslant [\sigma]$ добавляют еще условие устойчивости: $\sigma = \frac{P}{A} \leqslant [\sigma_y]$, где $[\sigma_y]$ - допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому, деленному на коэффициент запаса на устойчивость $[\sigma_y] = \frac{\sigma_K}{\kappa_y}$.

Задачу нахождения наименьшей осевой сжимающей силы, способной удержать слегка искривленный сжатый стержень, впервые решил академик С.Пб. академии наук Л.П. Эйлер в 1744 г.

Его формула для *минимальной критической силы* (*формула Эйлера*) выглядит следующим образом:

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{3.108}$$

Можем подсчитать значения критических напряжений при этом:

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{3.109}$$

В этой формуле $\lambda = \frac{l}{i}$ - называется *гибкостью стержня*.

3.7.2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ ИХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА. ПРОВЕРКА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Формула Эйлера в своем исходном виде приемлема только для шарнирно закрепленного стержня. В общем случае, формула Эйлера имеет вид:

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu \cdot l)^2}. \tag{3.110}$$

Здесь μ - так называемый коэффициент длины, равный:

1. Для шарнирного закрепления (основной случай): $\mu = 1$.
2. Для одного свободного, другого защемленного крепления: $\mu = 2$.

3. С обоими защемленными концами $\mu=0{,}5$.

4. С одним защемленным, а другим шарнирно опертым концом, $\mu\approx0{,}7$.

Величина $\mu\cdot l$ называется *приведенной* (свободной длиной).

Надо полагать, что наибольшей устойчивостью из приведенных случаев при прочих равных параметрах будут обладать стержни с обоими заделанными концами (с наименьшей приведенной длиной), а наименьшей – стержни с одним заделанным концом (с наибольшей приведенной длиной).

Из формулы Эйлера следует, что значение критической силы прямо пропорционально жесткости EJ поперечного сечения стержня при изгибе и обратно пропорционально квадрату длины стержня.

При потере устойчивости искривление (выпучивание) стержня происходит, как правило, в плоскости, перпендикулярной к главной оси минимум поперечного сечения., т.е. при изгибе сечения поворачиваются вокруг этой оси.

Поэтому критическую силу следует вычислять по значению главного центрального момента инерции J_{min}. В качестве исключений можно привести случаи, когда условия закрепления концов стержня в разных плоскостях, проходящих через его ось, различны.

Формула Эйлера, кроме того, предполагает, что напряжения в стержне в момент потери устойчивости не превосходят предела пропорциональности материала стержня.

Иначе говоря, формула Эйлера приемлема при $\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}\leqslant\sigma_П$.

Выражая из последней гибкость λ, границы применения формулы Эйлера можно определить как $\lambda_П\geqslant\sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_П}}$.

На практике формула Эйлера применяется лишь для расчета тонких и длинных стержней с большой гибкостью.

Допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_y]=\varphi[\sigma]$, здесь φ - коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней.

Имея график зависимости σ_K от λ для данного материала, зная σ_T или σ_B, выбрав коэффициенты запаса на прочность и на устойчивость, составляют таблицы значений коэффициента φ в функции от гибкости.

В практических расчетах условие устойчивости:

$$\sigma_y=\frac{P}{\varphi\cdot A}\leqslant[\sigma]. \qquad (3.111)$$

При расчете подобного рода конструкций решающее значение имеет подбор профиля поперечного сечения.

Надо стремиться к тому, чтобы профиль имел минимальную разницу между наибольшим и наименьшим моментом инерции сечения.

Необходимо также заметить, что применение специальных и высоколегированных сталей в таких конструкциях неоправданно, так как вероятность разрушения вследствие потери устойчивости при критическом напряжении несоизмеримо больше, чем вследствие достижения в материале предельных напряжений $(\sigma_y << \sigma_{ПРЕД})$.

Таблица 3.3

Значения коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения

Гибкость $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Значение φ для				
	стали марок 4, 3, 2, ОС	стали марки 5	стали СПК	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

3.8. ПЕРЕМЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Если вспомнить классификацию нагрузок, то нагрузки можно подразделить на постоянные и переменные. Напряжения можно рассматривать подобным образом, в виде постоянных и переменных, т.е. меняющихся с течением времени. Особую значимость переменные напряжения имеют при рассмотрении динамической нагрузки. Изменение напряжений по времени обычно представляют в виде графика, по оси абсцисс которого откладывают время, по оси ординат - значения нормальных и/или касательных напряжений. Закон изменения напряжений по времени обычно представляют в виде периодической функции (синусоиды, косинусоиды). По данным экспериментов, прочность материала при переменных напряжениях не зависит от вида кривой, а в основном зависит от величин наибольшего и наименьшего напряжений.

3.8.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Рассмотрим основные характеристики переменных напряжений, на примере нормальных переменных напряжений.

Циклом напряжений называется совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения.

Максимальным напряжением цикла σ_{max} называется его наибольшее алгебраическое напряжение.

Минимальным напряжением цикла σ_{min} называется его минимальное алгебраическое напряжение.

Средним напряжением или *статической составляющей* цикла σ_m называется алгебраическая полусумма его максимального и минимального напряжений:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}. \qquad (3.112)$$

Амплитудой или *переменной составляющей* цикла σ_a называется алгебраическая полуразность его максимального и минимального напряжений:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}. \qquad (3.113)$$

Проанализировав данные выражения, приходим к выводу, что среднее напряжение σ_m может быть величиной как отрицательной, так и положительной, а амплитуда σ_a может быть только положительной величиной. Значения σ_{max} и σ_{min} легко выразить через среднее напряжение и амплитуду цикла: $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$ и $\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$.

В зависимости от того, как соотносятся между собой σ_{max} и σ_{min}, циклы напряжений подразделяются на симметричные и ассиметричные.

Симметричному циклу соответствует случай, когда $|\sigma_{max}| = |\sigma_{min}|$.

Асимметричному циклу соответствует случай, когда $|\sigma_{max}| \neq |\sigma_{min}|$. Асимметричные циклы, в свою очередь, подразделяется на знакопеременные и знакопостоянные и отнулевые (пульсирующие).

Знакопеременным называется такой асимметричный цикл, при котором переменные напряжения в течение цикла меняют свой знак.

Знакопостоянным называется такой асимметричный цикл, при котором переменные напряжения в течение цикла сохраняют свой знак.

Отнулёвым (пульсирующим) называется такой асимметричный цикл, при котором напряжение σ_{max} или σ_{min} равно нулю.

Для характеристики асимметричного цикла напряжений используются следующие понятия.

Коэффициентом асимметрии цикла R называют величину, равную отношению напряжений σ_{min} к σ_{max}:

$$R_\sigma(R)=\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \tag{3.114}$$

Характеристикой цикла ρ называют величину, равную отношению переменной составляющей цикла (амплитуды) σ_a к его постоянной составляющей (среднему напряжению) σ_m:

$$\rho=\frac{\sigma_a}{\sigma_m}. \tag{3.115}$$

Коэффициент асимметрии цикла R и его характеристика ρ связаны между собой формулой:

$$\rho=\frac{1-R}{1+R}. \tag{3.116}$$

В связи с характеристиками рассматриваемых циклов находится и условие их подобия.

Подобными являются циклы напряжений, у которых коэффициенты асимметрии (или характеристики) имеют одинаковые значения.

Таким образом, переменные напряжения полностью характеризуются параметрами их цикла: σ_{max}, σ_{min}, σ_a, σ_m, R или ρ.

3.8.2. УСТАЛОСТЬ МЕТАЛЛА

Усталостью называют свойство металла разрушаться после многократного действия переменных напряжений.

При действии переменных напряжений механизм разрушения металла будет отличаться от механизма его разрушения при действии постоянных напряжений. По мере увеличения числа циклов в местах макро- и микроскопических дефектов структуры материала возникают микротрещины.

У концов данных микротрещин происходит концентрация напряжений, приводящая к последующему перерастанию микродефектов в макродефекты и последующему разрушению элемента конструкции. При действии переменной нагрузки дефектные зоны металла, независимо от его пластичности, за счет взаимодействия с друг с другом, подвергаются дополнительному наклепу, в результате которого происходит локальное повышение микротвердости со значительным снижением пластичности. В последующем разрушение наклепанного слоя, под действием продолжающихся переменных напряжений, происходит по сценарию разрушения хрупкого материала. Таким образом, разрушение металла в результате усталости происходит *всегда внезапно* (т.е. по сценарию разрушения хрупкого материала).

3.8.3. ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

Под *выносливостью* понимают способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений. Расчет на прочность при переменных напряжениях в таком случае носит название *расчета на выносливость*. Испытания на выносливость проводят с помощью спецмашины, которая создает в образце симметричные циклы переменных напряжений. Испытание проводят до усталостного разрушения образца.

Результаты испытаний отображают в виде графика, где по оси абсцисс откладывают число циклов до разрушения n, по оси ординат откладывают соответствующее значение напряжения σ. Для создаваемого на испытаниях симметричного цикла $\sigma = \sigma_{max} = |\sigma_{min}|$.

Варьируя значениями напряжений σ (для каждого образца своя величина, вплоть до $\sigma = \sigma_{в}$), на основании данных о числе циклов, соответствующих разрушению каждого из испытанных образцов, можно построить *кривую выносливости* для исследуемого материала. Эта кривая выносливости называется *кривой Вёлера*.

Данная кривая показывает, как с уменьшением максимального напряжения увеличивается число циклов, при котором происходит разрушение материала. Данная кривая для мало – и среднеуглеродистых, а также некоторых легированных сталей имеет горизонтальную асимптоту.

Таким образом, при данном значении коэффициента асимметрии R и максимальном напряжении, меньшем определенной величины, материал не разрушается, при числе циклов $n \to \infty$. В связи с этим водят понятие предела выносливости.

Пределом выносливости (пределом усталости) σ_R называется максимальное напряжение σ_{max}, равное ординате горизонтальной асимптоты кривой Вёлера.

При симметричном цикле $(R = -1)$ $\sigma_R \equiv \sigma_{-1}$.

При испытаниях число циклов ограничивают некоторым пределом, который называют *базовым числом циклов*. Если образец выдерживает базовое число циклов, считается, что напряжения в нем не выше предела выносливости. Для стали и чугуна базовое число циклов принимают равным 10^7.

С практической точки зрения, *пределом выносливости (усталости) является то наибольшее значение максимального напряжения* σ_{max}, *при котором материал выдерживает, не разрушаясь, базовое число циклов.*

Для углеродистой стали $\sigma_{-1} \approx 0{,}43\,\sigma_{в}$.

Для цветных металлов и сплавов, не имеющих горизонтальной асимптоты кривой Вёлера, используют понятие *предела ограниченной выносливости,* под которым подразумевают *наибольшее значение максимального (по абсолютной величине) напряжения, при котором образец ещё не разрушается при базовом числе циклов.* Базовое число циклов для таких материалов берут большим – до $5 \cdot 10^8$.

3.8.4. РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Расчеты на прочность конструкций, работающих при переменных напряжениях, носят в основном проверочный характер. Это связано с тем, что расчёт общего коэффициента снижения выносливости $K_{\sigma Д}\left(K_{\tau Д}\right)$ на стадии проектирования можно выполнить только приближенно.

Проектный расчёт при этом выполняется без учёта переменного характера напряжений, но по пониженным допускаемым напряжениям.

При данном расчёте определяются фактические коэффициенты запаса прочности n (например, для одного или нескольких опасных сечений элемента конструкции), которые сопоставляются с рекомендуемыми для аналогичных элементов в аналогичных условиях эксплуатации.

Коэффициент запаса прочности n представляет собой отношение предела выносливости, определенного для элемента конструкции, к номинальному значению максимального напряжения, возникающего в опасной точке рассматриваемого элемента.

При проверочном расчёте условие прочности будет иметь вид:

$$n \geqslant [n]. \tag{3.117}$$

Основными факторами, оказывающими влияние на значение коэффициента запаса прочности n, являются следующие:

1) степень ответственности элемента;
2) условия работы элемента;
3) точность определения действующих на элемент нагрузок;
4) достоверность сведений о механических свойствах материала;
5) значения коэффициентов концентрации напряжений.

Обычно величина $[n]=1,4...3,0$.

Если фактический коэффициент запаса прочности ниже или значительно выше требуемого, вносят изменения в конструкцию элемента или меняют его материал.

Для симметричных циклов переменных напряжений деформации изгиба:

$$n=\frac{\sigma_{-1\,Д}}{\sigma_{max}}=\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma Д}\cdot\sigma_{max}}. \tag{3.118}$$

Для симметричных циклов переменных напряжений деформации растяжения-сжатия:

$$n=\frac{\sigma_{-1pД}}{\sigma_{max}}=\frac{\sigma_{-1p}}{K_{\sigma Д}\cdot\sigma_{max}}. \tag{3.119}$$

Для симметричных циклов переменных напряжений деформации кручения:

$$n = \frac{\tau_{-1Д}}{\tau_{max}} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau Д} \cdot \tau_{max}}. \qquad (3.120)$$

В случае отсутствия данных экспериментов, величины, входящие в формулы, можно принять приближенно, согласно эмпирическим соотношениям между пределами выносливости при симметричных циклах и пределом прочности при растяжении.

Для углеродистой стали принимают: при изгибе $\sigma_{-1} \approx 0{,}43\sigma_B$; при растяжении-сжатии $\sigma_{-1p} \approx 0{,}35\sigma_B$; при кручении $\tau_{-1} \approx 0{,}25\sigma_B$.

Для легированной стали принимают: при изгибе $\sigma_{-1} \approx 0{,}35\sigma_B + 12\,МПа$; при растяжении-сжатии $\sigma_{-1p} \approx 0{,}28\sigma_B + 9\,МПа$; при кручении $\tau_{-1} \approx 0{,}25\sigma_B$.

РАЗДЕЛ IV. ДЕТАЛИ МАШИН

4.0. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧАХ. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПЕРЕДАЧИ ТРЕНИЕМ

Большинство современных машин состоит из трех частей: двигателя, механической передачи и исполнительного механизма.

Механическая передача – это механическое устройство, служащее для передачи энергии от двигателя к исполнительным органам машины, с одновременным преобразованием вращающего момента или вида движения. Необходимость применения механической передачи диктуется следующими обстоятельствами: источники энергии, как правило, работают в режиме высоких угловых скоростей, обеспечивающих им наибольшую мощность, наивысший КПД и малые габариты, а требуемая угловая скорость вала производственной машины обычно отличается от угловой скорости вала двигателя.

Механические передачи по способу передачи движения классифицируются на:

1. передачи трением (фрикционные; ременные);
2. передачи зацеплением (зубчатые; червячные; винтовые; цепные).

Основными параметрами механической передачи являются следующие параметры:

1. передаваемая мощность – $P, кВт$;
2. угловая скорость ведущего звена – ω_1, c^{-1};
3. передаточное число i, равное отношению угловых скоростей ведущего и ведомого звеньев (или отношение частот вращения ведущего и ведомого звеньев):

$$i=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}; \tag{4.1}$$

4. механический КПД η, равный отношению полезной мощности передачи к затраченной мощности

$$\eta=\frac{P_{полезн}}{P_{затрач}}=\frac{T_2\cdot\omega_2}{T_1\cdot\omega_1}=\frac{T_2}{T_1 i}, \tag{4.2}$$

или

$$T_2=i\cdot T_1\cdot\eta, \tag{4.3}$$

где T_1 и T_2 – вращающие моменты, для ведущего и ведомого звена.

На основе формулы (4.3) можно сделать важный вывод о том, что применение механической передачи позволяет получить значительный выигрыш в силе. Простейшей механической передачей является фрикционная передача.

4.1.ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Фрикционная передача - это передача, в которой движение от одного вала к другому передаётся за счет трения, возникающего в месте контакта вращающихся катков. Для возбуждения достаточной силы трения, обеспечивающей передачу заданного момента от ведущего вала к ведомому, фрикционные катки должны быть прижаты друг к другу силой S. Для этих целей применяются различные нажимные устройства: основанные на использовании силы тяжести, с применением пружин, с использованием системы рычагов, с применением гидроцилиндров и др.

Достоинства фрикционных передач:

1. простота конструкции и обслуживания;
2. плавность передачи движения и бесшумность работы;
3. возможность бесступенчатого регулирования скорости без остановки машины;
4. за счет возможностей пробуксовки катков при перегрузках передача предохраняет механизм привода от поломок.

Недостатки:

1. непостоянство передаточного числа из-за проскальзывания катков;
2. сравнительно большие нагрузки на валы и их опоры;
3. сравнительно низкий КПД - $\eta=0{,}7\ldots0{,}95$;
4. необходимость применения нажимных устройств.

Фрикционные передачи применяются в кузнечно-прессовом оборудовании (фрикционные прессы), в подъемно-транспортных машинах (приводные рольганги), в бесцентрово-шлифовальных станках, в буровой технике (фрикционные лебедки), в приборах и аппаратах, в приводах текстильных и транспортных машин и т.д.

Простейшая фрикционная передача между параллельными валами состоит из двух цилиндрических катков, прижатых один к другому с заданной силой (рис. 4.1). Нормальная работа (без буксования) фрикционной передачи будет обеспечена, если сила трения F, возникающая между катками, будет больше передаваемого окружного усилия F_t, т.е. условием работоспособности передачи является следующее:

$$F \geqslant F_t. \tag{4.4}$$

Для большей надежности против буксования вводят коэффициент запаса сцепления $K_{сц}$, принимаемый для силовых передач в пределах $K_{сц}=1{,}25\ldots2{,}0$, и требуемое нормальное усилие Q в месте касания катков, определяют по формуле:

$$Q=\frac{K_{сц}}{f}\cdot F_t, \tag{4.5}$$

где f - коэффициент трения.

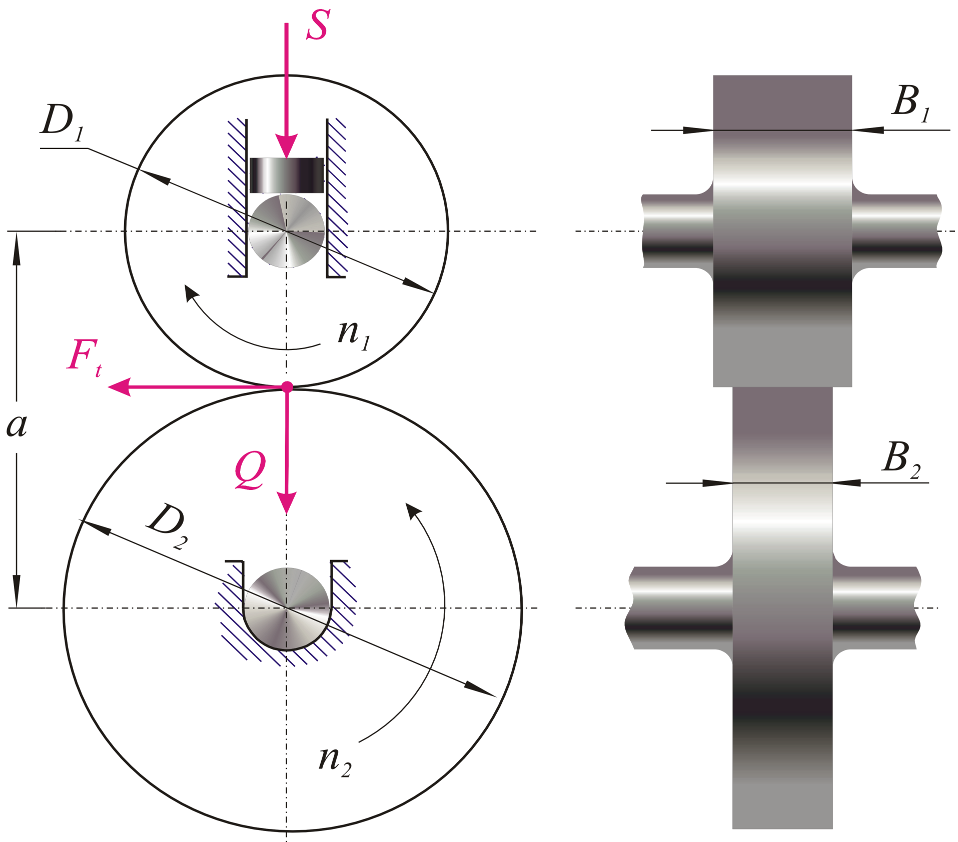


Рис. 4.1.Схема простейшей фрикционной передачи

В целях уменьшения нажимного усилия, которое вызывает значительные потери на трение в подшипниках и ограничивает величину передаваемых мощностей, материалы для катков целесообразно брать с возможно большим коэффициентом трения. При выборе коэффициента трения f можно руководствоваться данными, приведенными в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Значение коэффициента трения в зависимости от материалов катков

Материал катков	f
Сталь по стали или по чугуну со смазкой	0,04…0,05
Чугун по: стали или по чугуну всухую текстолиту всухую	0,1...0,18 0,15…0,25
коже всухую	0,20…0,50
прессованной бумаге всухую	0,40…0,05
резине всухую	0,35…0,70
ферродо	0,30…0,35

4.2. МАТЕРИАЛЫ КАТКОВ

К материалам трущихся поверхностей катков предъявляют следующие требования: высокое значение коэффициента трения, высокое значение модуля упругости, высокая контактная прочность и износостойкость. Катки фрикционных передач изготовляют из однородных или разнородных материалов. При этом целесообразно выполнять ведомый каток из более износостойкого материала. Применяют следующие сочетания материалов:

1. Закаленная сталь по закаленной стали (стали марок ШХ15, 40ХН, 18ХГТ и др.) для быстроходных силовых передач. Такое сочетание обеспечивает наибольшую компактность передачи, но требует наиболее точного изготовления и более высокой чистоты рабочих поверхностей.
2. Чугун по чугуну (СЧ 15; СЧ 18; СЧ 21 и др.) или чугун по стали для открытых тихоходных силовых передач. Чаще применяют чугун по стали, что
обеспечивает меньший шум при работе передачи.
3. Текстолит, гетинакс или фибра по стали или по чугуну для малонагруженных открытых передач, не требующих большой долговечности. Такое сочетание материалов позволяет уменьшить требования к качеству обработки контактирующих поверхностей, так как они хорошо прирабатываются.
4. Кожа, резина, прорезиненная ткань, ферродо, пластмассы по стали или по чугуну для передачи незначительных моментов. Один из катков изготовляют из стали или чугуна (чаще ведомый), а второй покрывают одним из перечисленных неметаллических материалов.

4.3. СКОЛЬЖЕНИЕ В ФРИКЦИОННЫХ ПЕРЕДАЧАХ

В фрикционных передачах различают геометрическое и упругое скольжение. Геометрическое скольжение возникает на площадке контакта вдоль образующих катков и зависит от формы последних. Этот вид скольжения имеет место, например, в лобовой передаче (рис. 4.2.).

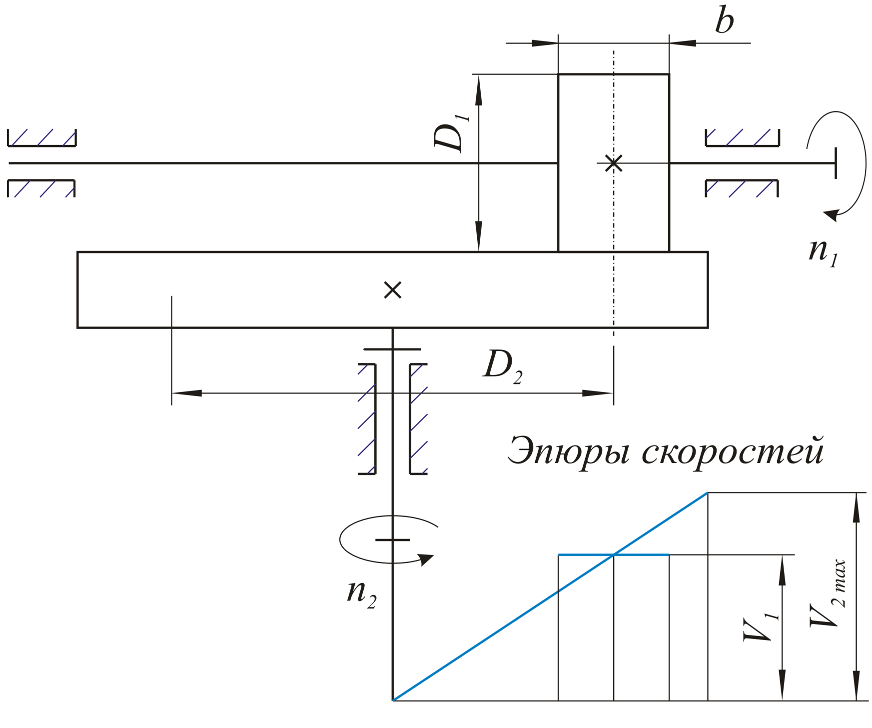


Рис. 4.2. Лобовая передача и её эпюра скоростей

При отсутствии нагрузки скорости ведущего и ведомого звеньев в точке, соответствующей $b/2$, т.е. середине ширины ведущего катка *1*, равны и составляют

$$V=\frac{\pi\cdot D_1\cdot n_1}{60}=\frac{\pi\cdot D_2\cdot n_2}{60}, \tag{4.6}$$

где D_1, - диаметр ведущего катка *1*,

D_2 - диаметр ведомого диска *2*,

n_1 -число оборотов ведущего катка,

n_2 число оборотов ведомого диска.

Скорости на ведомом диске зависят от расстояния до оси вращения и в местах, соответствующих кромкам ведущего катка, будут

$$V_2^{/}=\frac{\pi\cdot\left(D_2+в\right)}{60}=V+\frac{\pi\cdot в\cdot n_2}{60}, \tag{4.7}$$

$$V_2^{//}=\frac{\pi\cdot\left(D_2-в\right)}{60}=V-\frac{\pi\cdot в\cdot n_2}{60}. \tag{4.8}$$

Разность скоростей $V_2^{/}-V_2^{//}=\frac{\pi\cdot b\cdot n_2}{30}$ тем больше, чем больше ширина b ведущего катка, т.е. чем длиннее линия контакта. Положение точки, в которой нет скольжения, изменяется с изменением величины передаваемой нагрузки. Поэтому в передачах, работающих с геометрическим скольжением, передаточное число непостоянно. Для того, чтобы не происходило геометрического скольжения, в передачах с параллельными валами линия контакта должна быть параллельна валам, а в передачах с пересекающимися валами она должна быть направлена в точку пересечения осей валов (рис. 4.3).

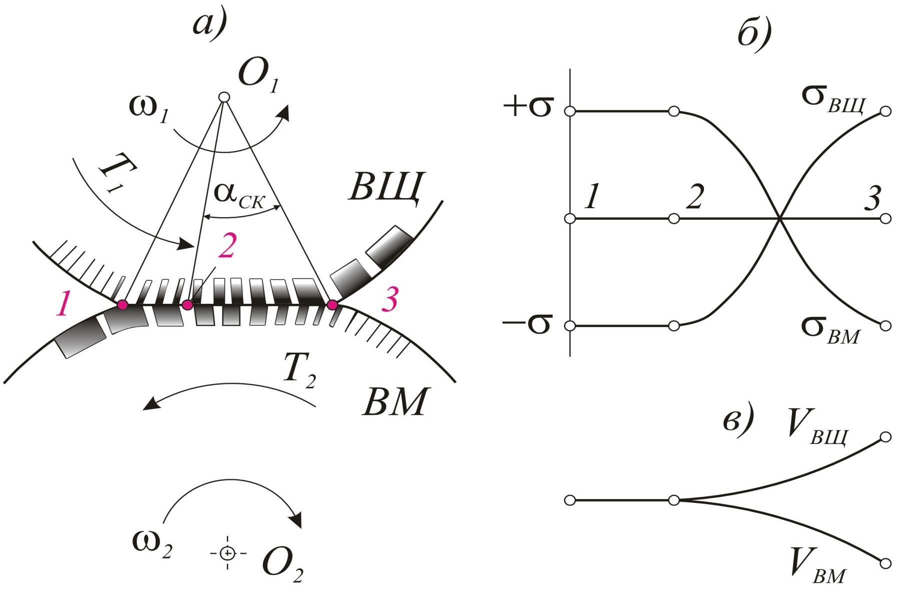


Рис. 4.3. Распределение контактных напряжений и скоростей по линии контакта

Упругое скольжение сопутствует работе фрикционной передачи с катками любой формы. При передаче момента фрикционной парой элементы поверхности ведущего *ВЩ* катка подходят к точке *1* контакта сжатыми и уходят от точки *3* растянутыми. Элементы поверхности ведомого *ВМ* катка, наоборот, подходят к точке *1* контакта растянутыми и уходят от точки *3* сжатыми.

Изменение напряжений в элементах поверхностей сопряженных катков начинается не сразу после встречи, а от точки *2*, когда сила трения на оставшейся площадке, соответствующей углу скольжения $\alpha_{ск}$, становится меньше приложенного окружного усилия.

На рис. 4.3, *б* представлен характер изменения напряжения на опорных элементах ведущего и ведомого катков. Растяжение элементов поверхности на одном катке и сжатие их на другом приводит к упругому скольжению.

В результате упругого скольжения происходит отставание ведомого катка от ведущего и уменьшается КПД. Величина скольжения оценивается коэффициентом скольжения $\varepsilon = 0{,}02\ldots0{,}03$.

$$\varepsilon = \frac{n_2^T - n_2}{n_2^T}, \qquad (4.9)$$

где n_2^T - теоретическое число оборотов ведомого катка,

n_2 - фактическое число оборотов ведомого катка.

С учетом относительного скольжения ε *передаточное число* i определяется по формуле:

$$i = \frac{D_2}{D_1 \cdot (1 - \varepsilon)}. \qquad (4.10)$$

4.4. СИЛА НАЖАТИЯ КАТКОВ

1. Передачи с параллельными валами

Для определения силы нажатия S можно исходить из мощности P_1 $(Вт)$ на ведущем валу. Тогда для катков с гладким цилиндрическим ободом сила нажатия, равная нормальному к опорной поверхности давлению, будет

$$S = Q = \frac{K_{сц}}{f} \cdot F_t = \frac{K_{сц}}{f} \cdot \frac{2\,T_1}{D_1}, \qquad (4.11)$$

где T_1 - момент крутящий ведущего катка, $Н \cdot м$.

Учитывая выражение $D_1 = \dfrac{2a}{(i \pm 1)}$ и подставив его в формулу для S, получим

$$S = Q = \frac{K_{сц} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{f \cdot a}. \qquad (4.12)$$

В последних формулах знак плюс - для внешнего, знак минус - для внутреннего касания катков. В катках с клинчатым ободом сила нажатия S вызывает нормальное давление Q (рис. 4.4), величина которого в общем случае при Z выступов будет:

$$Q = \frac{K_{сц} \cdot F_t}{2 \cdot Z \cdot f}. \qquad (4.13)$$

Аналогично предыдущему и при тех же обозначениях получим в этом случае

$$Q = \frac{K_{сц} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{f \cdot a}. \qquad (4.14)$$

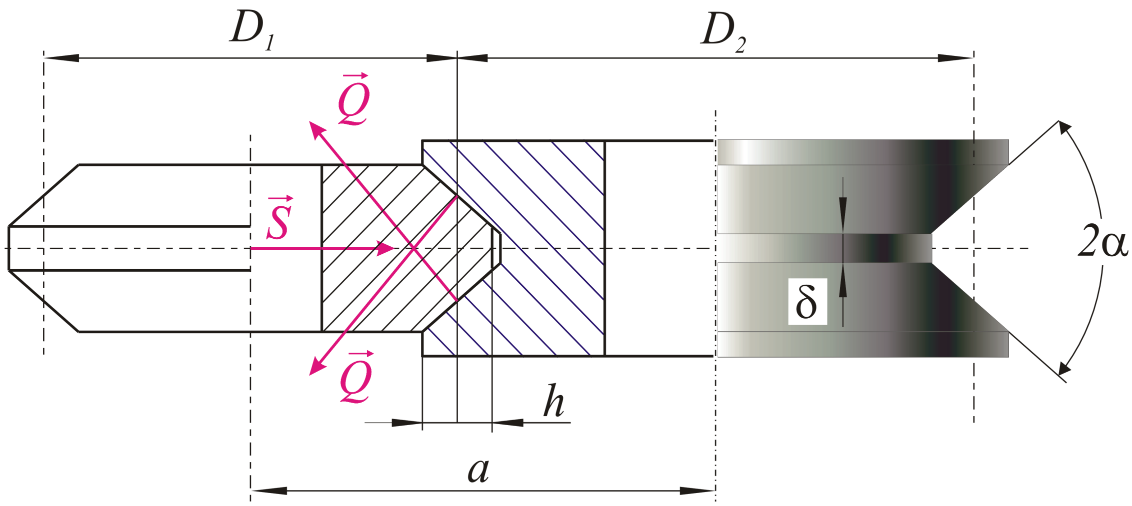


Рис. 4.4. К определению силы давления в катках с клинчатым ободом

На основе условия равновесия одного из катков можно найти необходимую силу нажатия

$$S = \frac{K_{сц} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{Z \cdot f \cdot a} \cdot \sin \alpha, \qquad (4.15)$$

где α - половина угла клина в диаметральном сечении.

Из уравнений (4.12) и (4.15) следует, что необходимая сила нажатия в передачах клинчатыми катками меньше, при одинаковых прочих условиях, чем в передачах катками с гладким ободом.

Давление S уменьшается с уменьшением угла α, однако для устранения опасности заклинивания клинчатых катков принимают $\alpha \geqslant 15^{\circ}$.

2. Передачи с пересекающимися валами

Для конических катков (рис. 4.5), обычно имеющих $\alpha_1+\alpha_2=90^\circ$, величина нормального давления для передачи окружного усилия составляет

$$Q=\frac{K_{сц}}{f}\cdot F_t=\frac{K_{сц}}{f}\cdot\frac{2T_1}{D_1}. \tag{4.16}$$

Из рис. 4.5 следует

$$L-\frac{в}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{D_1^2+D_2^2}=\frac{D_1}{2}\cdot\sqrt{i^2+1}, \tag{4.17}$$

отсюда

$$D_1=\frac{2L-b}{\sqrt{i^2+1}}. \tag{4.18}$$

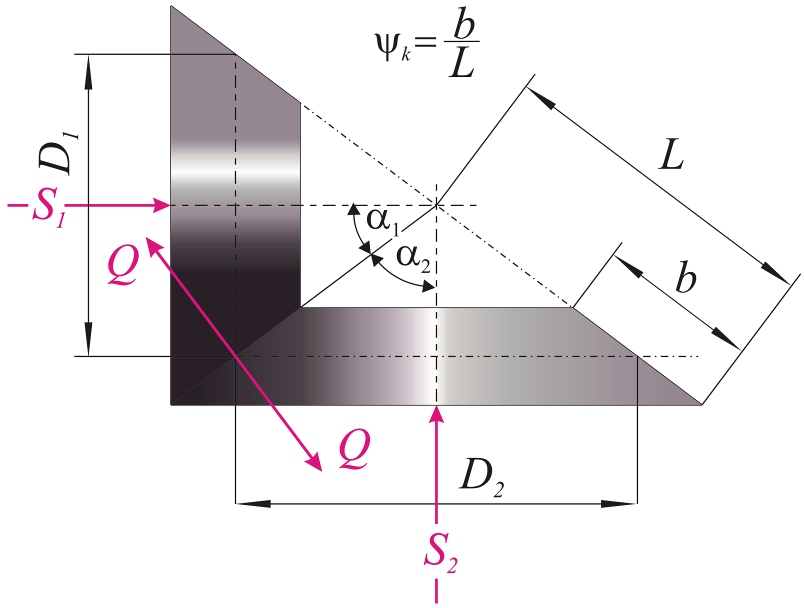


Рис. 4.5. Передача с валами, имеющими пересекающиеся оси

Подставляя это выражение для D_1 в уравнение (4.16), получим

$$Q=\frac{K_{сц}}{f}\cdot\frac{2T_1\cdot\sqrt{i^2+1}}{(2L-b)}. \tag{4.19}$$

Из условий равновесия катков следует:
для ведущего

$$S_1=2Q\sin\alpha_1; \tag{4.20}$$

для ведомого

$$S_2=2Q\sin\alpha_2; \tag{4.21}$$

При $\alpha_1 < \alpha_2$ имеем $S_1 < S_2$, т.е. необходимое давление нажатия меньше, когда оно производится со стороны малого катка. После подстановки в уравнение (4.20) значения Q из уравнения (4.19) получим величину усилия нажатия в конической передаче

$$S = \frac{K_{сц} \cdot 2T_1 \cdot \sqrt{i^1 + 1}}{f \cdot (2L - b)}, \tag{4.22}$$

где L - конусное расстояние, b - длина образующей катка.

Для катков лобовой передачи (рис. 4.2) сила нажатия равна нормальному давлению

$$S = Q \cdot \frac{K_{сц}}{f} \cdot F_t = \frac{K_{сц}}{f} \cdot \frac{P_1}{V} = \frac{K_{сц} \cdot P_1 \cdot 60}{f \cdot \pi \cdot D_1 \cdot n_1}, \tag{4.23}$$

или

$$S = Q = \frac{K_{сц}}{f} \cdot \frac{2T_1}{D_1}. \tag{4.24}$$

4.5. РАСЧЕТ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КАТКОВ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Сила нажатия катков S, необходимая для обеспечения работоспособного состояния фрикционной передачи, вызывает на опорной поверхности катков значительные *контактные напряжения* σ_H, (рис. 4.6).

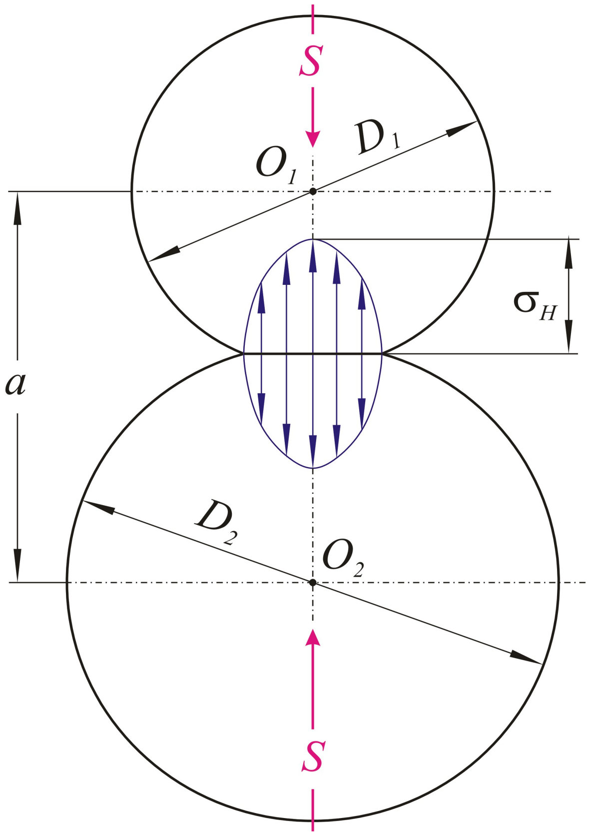


Рис. 4.6. Эпюра контактных напряжений

Эти напряжения носят циклический характер, так как при обкатывании место контакта перемещается по катку. Циклическое действие контактных напряжений способствует развитию усталостных микротрещин на рабочих поверхностях катков. В закрытых передачах, работающих при обильной смазке, микротрещины расклиниваются смазкой, и от рабочей поверхности катка выкрашиваются частицы металла. Такой вид разрушения катка называют *усталостным выкрашиванием*.

Основным критерием работоспособности фрикционных передач с металлическими катками является *усталостная прочность*, которая оценивается величиной контактных напряжений. При нажатии силой S в месте контакта металл катков деформируется; в результате упругой деформации получается прямоугольная площадка контакта, имеющая весьма малую ширину. По ширине контактной площадки напряжения распределены по эллиптическому закону, достигая максимума в точках средней линии контактной площадки. Для материалов, подчиняющихся закону Гука, величину наибольших контактных напряжений определяют по *формуле Герца*

$$\sigma_H = 0{,}418 \cdot \sqrt{\frac{q \cdot E}{\rho}}, \qquad (4.25)$$

где q - удельная контактная нагрузка; $E = \frac{2E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}$ приведенный модуль упругости; $\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ - приведенный радиус кривизны.

Расчет на прочность катков силовых фрикционных передач сводится к определению размеров катков из условия ограничения величины контактных напряжений смятия. Условие для предотвращения усталостного выкрашивания, т.е. условие контактной прочности, имеет вид

$$\sigma_H \leqslant [\sigma_H], \qquad (4.26)$$

где $[\sigma_H]$ - допускаемое контактное напряжение для материала катков.

1. Цилиндрические катки с гладким ободом

Для цилиндрических катков с гладким ободом удельная контактная нагрузка определяется следующим образом:

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{K_{сц} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1)}{b \cdot f \cdot a}. \qquad (4.27)$$

Приведенный радиус кривизны

$$\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{i \cdot D_1}{2(i+1)} = \frac{a \cdot i}{(i+1)^2}. \qquad (4.28)$$

Подставив указанные значения q, p, b, E в условие контактной прочности и обозначив $\frac{b}{a}=\psi$, получим формулу проектного расчета

$$a \geqslant (i+1)\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{0{,}418}{[\sigma_H]}\right)^2\cdot\frac{K_{сц}\cdot T_1\cdot E}{f\cdot i\cdot\psi}}. \qquad (4.29)$$

Коэффициент ширины катков ψ обычно принимают $\psi=0{,}2\ldots0{,}4$.

2. Цилиндрические катки с клинчатым ободом

Межцентровое расстояние a из условия контактной прочности клинчатых катков определяется по формуле

$$a=(i\pm1)\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{0{,}265}{[\sigma_H]}\right)^2\cdot\frac{K_{сц}\cdot T_1\cdot E\cdot(i\pm1)}{Z\cdot f\cdot i}}. \qquad (4.30)$$

С целью уменьшения вредного геометрического скольжения высоту клинового выступа h делают небольшой и принимают

$$h=0{,}04\cdot D_1=\frac{0{,}08\,a}{(i\pm1)\cdot\cos\alpha}. \qquad (4.31)$$

Длина линии контакта, воспринимающая нормальное давление,

$$b=\frac{h}{\cos\alpha}=\frac{0{,}08\,a}{(i\pm1)\cdot\cos\alpha}. \qquad (4.32)$$

Число клиновых канавок Z обычно принимают $Z\leqslant5$ вследствие невозможности обеспечить равномерную нагрузку на все выступы при большом их количестве. Ширина B клинчатых колес

$$B=2Z\cdot(h\cdot tg\,\alpha+\delta). \qquad (4.33)$$

Для колес из чугуна $\delta=0{,}5\,см$; для колес из стали $\delta=0{,}3\,см$.

Приведенный радиус кривизны

$$\rho=\frac{a\cdot i}{(i\pm1)^2\cdot\sin\alpha}. \qquad (4.34)$$

Расчет на прочность конической и лобовой фрикционных передач аналогичен расчету цилиндрической передачи. Следует отметить, что формулы (4.29), (4.30) применимы для фрикционных передач со стальными, чугунными и текстолитовыми катками. Чугун и текстолит при деформации незначительно отклоняются от закона Гука, и поэтому расчет фрикционных передач с катками из чугуна и текстолита выполняют по контактным напряжениям.

4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННОГО РАДИУСА КРИВИЗНЫ

При расчетах фрикционных передач на контактную прочность с использованием формулы Герца (4.25) необходимо знать приведенный радиус кривизны ρ. Радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 контактирующих тел находят следующим образом. При касании цилиндра с плоскостью (рис. 4.7, *в*), при внешнем и внутреннем касании цилиндров (рис. 4.7, *а*), при внешнем касании конусов и торов (рис. 4.7, *б, г, д, е*) радиусы кривизны измеряют по нормали к линии контакта.

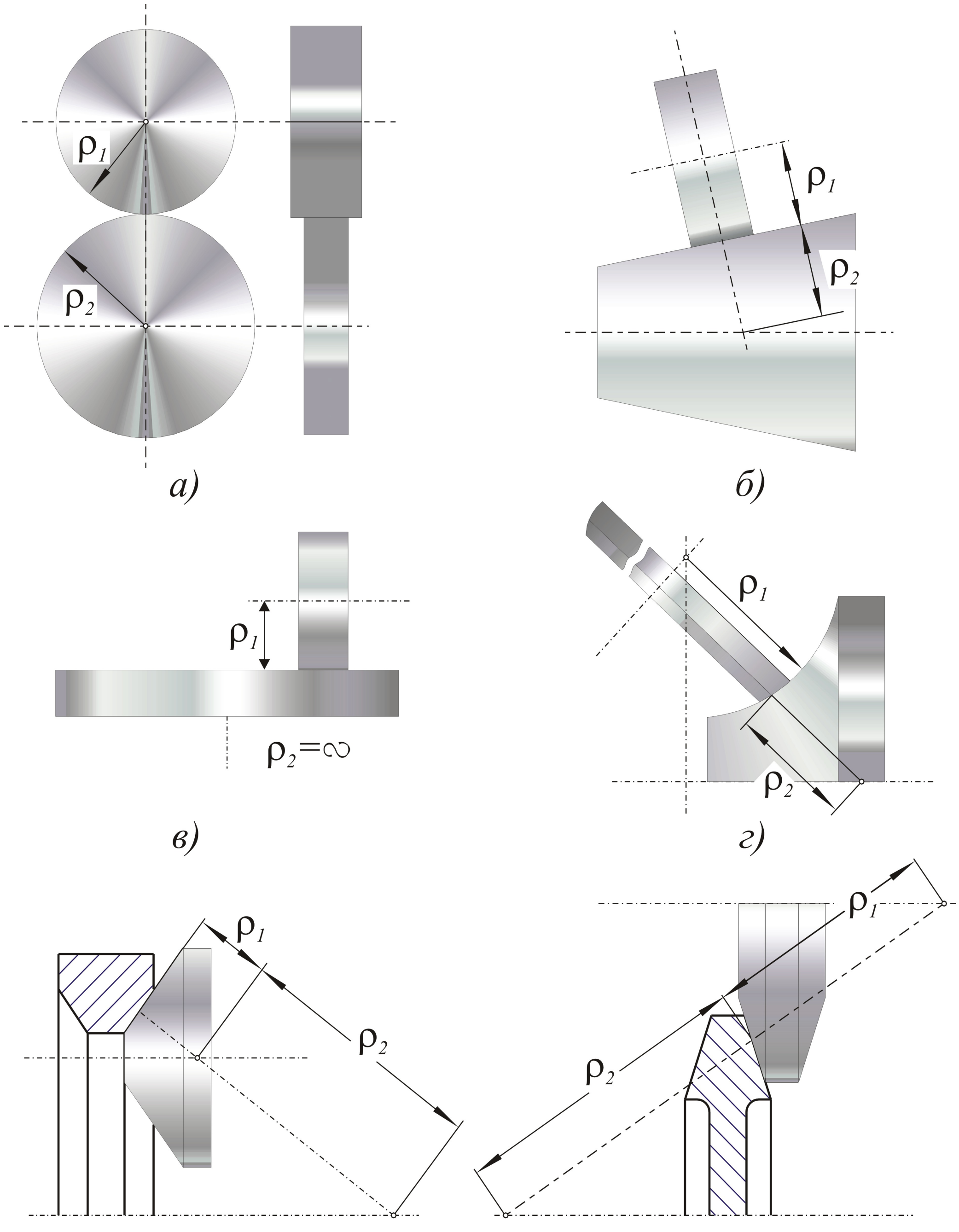


Рис. 4.7. К определению приведённого радиуса кривизны

4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСКАЕМОГО КОНТАКТНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

На основе экспериментов установлена связь между длительным пределом контактной выносливости материала σ_H (и, соответственно, допускаемым контактным напряжением $[\sigma_H]$) и твердостью поверхности - характеристикой, наиболее активно влияющей на усталостную прочность материалов фрикционных катков:

$$[\sigma_H]=C_B\cdot HB; \quad [\sigma_H]=C_R\cdot HRC, \tag{4.35}$$

где C_B и C_R - коэффициенты, зависящие от материала и термообработки; HB и HRC - числа твердости, соответственно, по Бриннелю и по Роквеллу.

При расчетах катков на контактную прочность допускаемое напряжение $[\sigma_H]$ определяют с помощью зависимостей, приведенных в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Значение допускаемого напряжения

Материал катков	$[\sigma_H],\ Н/мм^2$	$E,\ Н/мм^2$
Сталь среднеуглеродистая (HB= 180-350)	$(2{,}5\ldots3{,}0)HB$	$2{,}15\cdot10^5$
Сталь углеродистая и легированная (HRC-40-63)	$(22{,}0\ldots31{,}0)HRC$	$2{,}15\cdot10^3$
Чугун серый и модифицированный (HB= 170-270)	$(1{,}5\ldots1{,}8)HB$ или $1{,}5\sigma_{BH}$	$1{,}1\cdot10^5$
Текстолит	$50{,}0\ldots90{,}0$	$(5\ldots6)\cdot10^3$

4.8. РАСЧЕТ КАТКОВ ИЗ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Для фрикционных катков с рабочей поверхностью из неметаллических материалов (кожа, резина, фибра, дерево), не подчиняющихся закону Гука, параметры передачи определяют из расчета на износостойкость по допускаемой нагрузке $[q]$ на единицу длины контактной линии

$$q=\frac{Q}{в}\leqslant[q]. \tag{4.36}$$

Подставив в условие (4.36) значение Q из выражения (4.12) и $\beta=\psi\cdot\alpha$, после преобразования получим формулу проектного расчета для определения межосевого расстояния цилиндрических катков с гладким ободом

$$a=\sqrt{\frac{K_{сц}\cdot T_1\cdot(i+1)}{f\cdot\psi\cdot[q]}}. \tag{4.37}$$

Значения допускаемой нагрузки на единицу длины контактной линии приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Допускаемая нагрузка на единицу контактной линии

Материал катков	$[q]$, $Н/мм$
Кожа по чугуну	15…25
Резина по чугуну или по стали	10…30
Фибра по стали или чугуну	35…40
Дерево по чугуну	2,5…5,0

4.9. ФРИКЦИОННЫЕ ВАРИАТОРЫ

Вариаторы предназначены для плавного, бесступенчатого изменения на ходу угловой скорости ведомого вала при постоянной угловой скорости ведущего вала. В современном машиностроении применяется большое число вариаторов, выполненных по различным принципиальным схемам (в станках, в конвейерах, в прессах и т.п.). Кинематической характеристикой вариатора является диапазон регулирования $Д$, равный отношению максимальной угловой скорости ведомого катка к его минимальной угловой скорости:

$$Д=\frac{\omega_2 \cdot \max}{\omega_2 \cdot \min}=\frac{i \cdot \max}{i \cdot \min}. \tag{4.38}$$

Для одноступенчатых вариаторов $Д=3…8$.

В зависимости от формы тел качения различают вариаторы *лобовые* (рис.4.8, *а*), *конусные* (см. рис. 4.8, *б, в, г*), *торовые* (см. рис. 4.8, *д*), *шаровые* (см. рис. 4.8, *е*) и др. В лобовых вариаторах (см. рис. 4.8, *а*) бесступенчатое изменение угловой скорости ведомого вала достигается передвижением ведущего катка вдоль вала, т.е. изменением рабочего радиуса R_2 одного рабочего тела.

В конусном многодисковом вариаторе (рис. 4.8, *г*) регулирование скорости осуществляется изменением радиуса качения R_1 на конусных дисках путем сближения или раздвигания валов. Наиболее распространены вариаторы, в которых регулирование передаточного числа достигается одновременным изменением рабочих радиусов обоих тел. К этой группе относятся вариаторы, выполненные согласно схемам: *б, в, д, е*, приведенным на рис. 4.8.

Вариаторы с раздвижными конусами и жестким промежуточным кольцом (рис. 4.8, *в*) применяют для быстроходных машин небольшой мощности.

Регулирование угловой скорости производится раздвиганием и сближением конических дисков; при этом меняются радиусы R_1 и R_2 поясков контакта конусов с кольцом. Эти вариаторы имеют простую конструкцию, но значительные габариты.

На рис. 4.8, *б* показана схема вариатора с коническими катками и промежуточным цилиндрическим диском, свободно вращающимся на оси. При перемещении промежуточного диска с помощью винтового механизма изменяются радиусы R_1 и R_2.

Эти вариаторы наиболее компактны и совершенны, но имеют сложную конструкцию и требуют высокой точности изготовления. Шаровой вариатор (см. рис. 4.8, *е*) имеет тела качения в виде двух соосно расположенных конусных чашек и четырех шаров. Регулирование скорости достигается изменением наклона геометрических осей вращения шаров. Этот вариатор дает кинематически неограниченный диапазон регулирования.

Однако из-за потерь на трение и износ рабочих поверхностей обычно ограничиваются диапазоном $Д \leqslant 10 \ldots 12$.

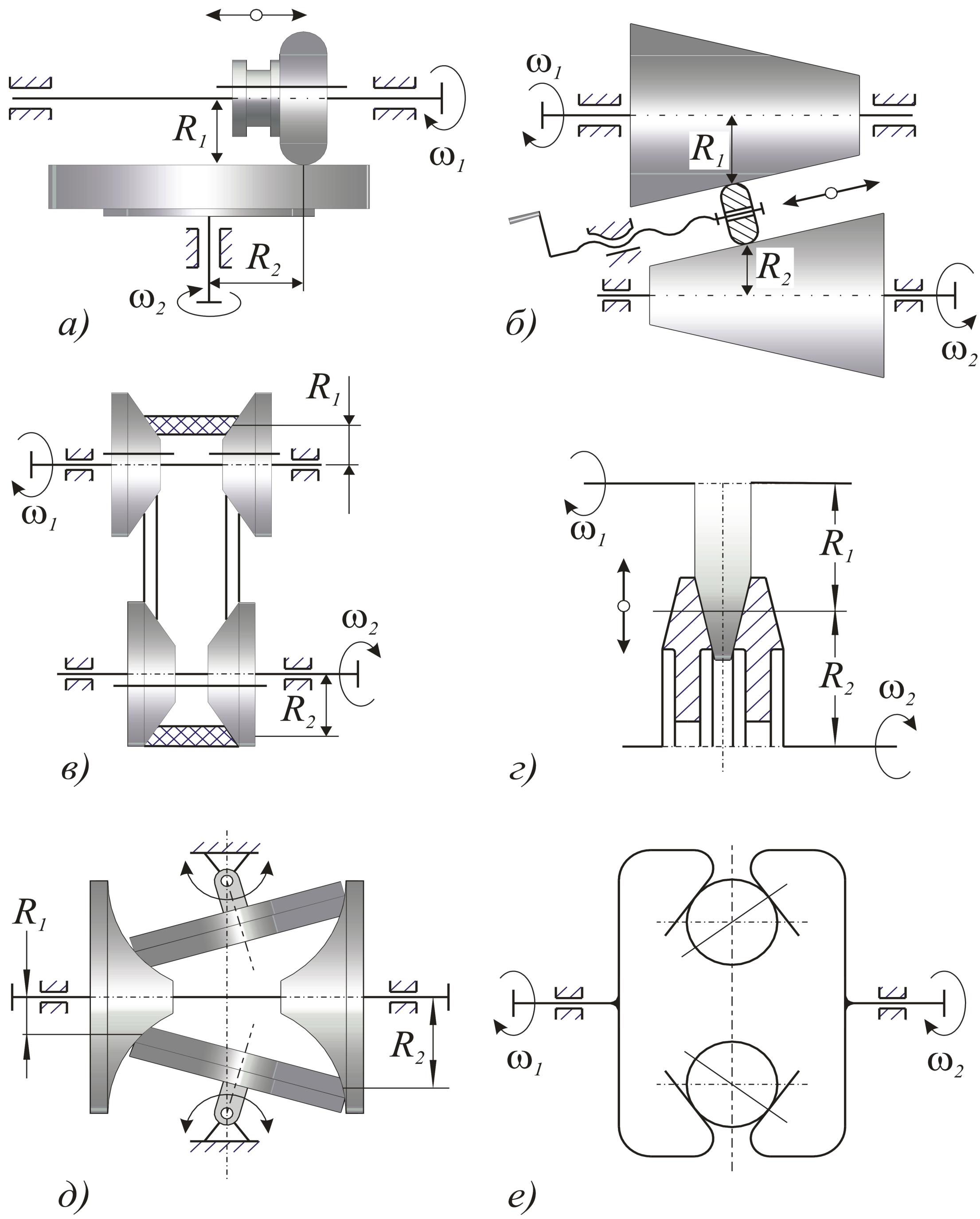


Рис 4.8. Схемы конструкций вариаторов

4.10. ПОТЕРИ НА ТРЕНИЕ, КПД И РАСЧЕТ ФРИКЦИОННОЙ ПЕРЕДАЧИ НА НАГРЕВ

В фрикционных передачах, не имеющих геометрического скольжения, общая потерянная мощность $П$ $(Вт)$ равна:

$$П = П_г + П_с + П_п, \qquad (4.39)$$

где $П_г$ - потери на гистерезис при перекатывании катков;

$П_с$ - потери на упругое скольжение;

$П_п$ - потери в подшипниках.

Из курса теории механизмов и машин $П_г$ определяются:

$$П_г = Q \cdot k \cdot \frac{\pi}{300} \cdot (n_1 + n_2), \qquad (4.40)$$

где $к$ - коэффициент трения качения, $мм$.

После подстановки сюда значения Q из уравнения (4.12) получим

$$П_г = \frac{K_{сц} \cdot T_1 \cdot (i \pm 1) \cdot k \cdot \pi}{f \cdot a \cdot 300} \cdot (n_1 + n_2). \qquad (4.41)$$

Потери на упругое скольжение находят по формуле

$$П_с = F_t \cdot \varepsilon \cdot V, \qquad (4.42)$$

где $\varepsilon = \frac{V_{ск}}{V}$ - относительная величина упругого скольжения, обычно принимают $\varepsilon = 0{,}02 \dots 0{,}03$.

Потери на трение в подшипниках качения определяют по формуле:

$$П_п = \frac{F_r \cdot f \cdot \pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60}, \qquad (4.43)$$

где f - «приведенный» к валу коэффициент трения.

Для приближенных расчетов можно принимать для подшипников всех типов $f = 0{,}005 - 0{,}01$.

d - диаметр вала, $мм$;

n - частота вращения, $об/мин$;

F_r - действующая на подшипник нагрузка, $Н$.

КПД передачи определяется по формуле

$$\eta = \frac{P_1 - П}{P_1} = 1 - \frac{П}{P_1}. \qquad (4.44)$$

Для нормального функционирования фрикционной передачи важным является обеспечение определенного температурного режима работы, т.к. последний часто ограничивает ее работоспособность, диктует конструкцию и размеры, а также выбор материалов и требования, предъявляемые к смазке.

Тепловой расчет передачи сводится к составлению условия теплового баланса, с помощью которого устанавливается соответствие между количеством выделяемого и количеством отводимого тепла в процессе работы.

Полагаем, что вся потерянная в передаче мощность Π полностью превращается в тепло, количество которого составляет

$$\varPhi = P_1 \cdot (1-\eta). \tag{4.45}$$

В закрытых передачах, работающих в масле, необходимая для отвода тепла при установившемся тепловом режиме поверхность охлаждения

$$A = \frac{P_1 \cdot (1-\eta)}{K_T \cdot (t_1 - t_0)},\ м^2, \tag{4.46}$$

где K_T - коэффициент теплоотдачи; t_1 -температура масла, $^\circ C$; t_0 -температура окружающего воздуха.

Если поверхность спроектированного корпуса передачи меньше поверхности А, найденной из этой формулы, необходимо увеличить охлаждающую поверхность, например, посредством оребрения корпуса.

4.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК НА ВАЛЫ

Схема сил, действующих в передачах гладкими или клинчатыми фрикционными катками с параллельными валами, показана на рис. 4.9, *а*.

Радиальные давления на валы ведущего и ведомого катков

$$F_{R_1} = F_{R_2} = \sqrt{F_t^2 + S^2}. \tag{4.47}$$

Для колес с гладким ободом усилие нажатия равно нормальному давлению, т.е. $S = Q = \frac{K_{сц}}{f} \cdot F_t$, следовательно,

$$F_{R_1} = F_{R_2} = F_t \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{K_{сц}}{f}\right)^2}. \tag{4.48}$$

Для клинчатых катков $S = \frac{K_{сц}}{f} \cdot F_t \cdot \sin\alpha$ и

$$F_{R_1}=F_{R_2}=F_t\cdot\sqrt{1+\left(\frac{K_{сц}}{f}\cdot\sin\alpha\right)^2}. \qquad (4.49)$$

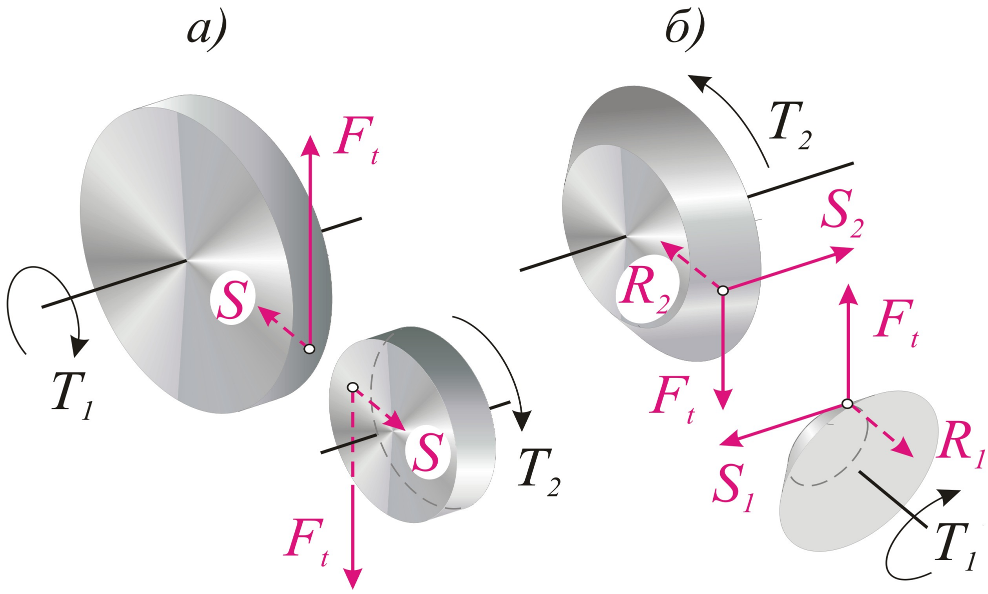


Рис. 4.9. Схема усилий для передач: *а*) с гладкими и клинчатыми фрикционными катками; *б*) с коническими фрикционными катками

В конических фрикционных передачах (см. рис. 4.9, *б*) на вал ведущего катка действует осевое давление, равное усилию S_1 нажатия, и в плоскости, перпендикулярной к осям, усилия F_t и $R_1=Q\cdot\cos\alpha$. В совокупности F_t и R_1 дают радиальную нагрузку

$$F_{R_1}=\sqrt{F_t^2+R_1^2}=\sqrt{F_t^2+\left(Q\cdot\cos\alpha_1\right)^2}. \qquad (4.50)$$

Так как $Q=\frac{K_{сц}}{f}\cdot F_t$, то после подстановки получим

$$F_{R_1}=F_t\cdot\sqrt{1+\left(\frac{K_{сц}}{f}\cdot\cos\alpha_1\right)^2}. \qquad (4.51)$$

Вал ведомого конического катка будет испытывать осевое давление S_2 и суммарную радиальную нагрузку

$$F_{R_2}=F_t\cdot\sqrt{1+\left(\frac{K_{сц}}{f}\cdot\cos\alpha_2\right)^2}. \qquad (4.52)$$

Из формул (4.47), (4.49) и (4.51) следует, что радиальные давления на валы ведущего и ведомого катков одинаковы только в передачах с параллельными валами. В передачах с пересекающимися валами $F_{R_1}\neq F_{R_2}$.

4.12. РАСЧЁТ ВАЛОВ

Катки фрикционной передачи устанавливаются на валах, которые предназначены для поддержки катков и передачи вращающих моментов.

Валы фрикционной передачи, под действием вращающего момента T и радиальной силы F_R, испытывают деформации кручения и изгиба.

При проектном расчете валов отсутствуют полные данные для определения изгибающего момента в рассматриваемом сечении вала.

Так, например, неизвестно расположение опор и места приложения нагрузок на вал. Поэтому диаметр вала приближенно оценивают из расчета только на кручение.

При этом расчете влияние изгиба на прочность вала компенсируется понижением допускаемых напряжений на кручение $[\tau_к]$.

Условие прочности вала на кручение:

$$\tau_к = \frac{T}{W_p} \leqslant [\tau_к], \tag{4.53}$$

где $\tau_к$ - расчетное напряжение кручения, $МПа$;

T – передаваемый крутящий момент, $Н \cdot мм$;

$W_p \approx 0,2 d^3$ - полярный момент сопротивления поперечного сечения вала, $мм^3$;

$[\tau_к]$; - допускаемое напряжение на кручение, $МПа$;

$[\tau_к] = 10 \ldots 25$ $МПа$ – для валов из сталей Ст.5, Ст.6, 35, 40, 45.

Из условия прочности (4.53) получаем следующую формулу:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau_к]}}. \tag{4.54}$$

Полученные значения d округляют до ближайшего стандартного значения по ГОСТ 6636-69.

4.13. ВЫБОР ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Опорами для валов фрикционной передачи обычно служат подшипники качения, которые воспринимают приложенные к валу радиальные (и осевые) нагрузки и сохраняют заданное положение оси вращения вала.

Подшипник качения (рис. 4.10) состоит из наружного *1* и внутреннего *4* кольца с дорожками качения A; шариков и роликов (тел качения) *3*, которые катятся по дорожкам качения колец; сепаратора *2*, разделяющего и направляющего шарики или ролики, что обеспечивает их правильную работу.

Основные достоинства подшипников качения: малое трение и простота обслуживания. Эти преимущества подшипников качения обеспечивают им широкое распространение в различных областях машиностроения и приборостроения. Подшипники качения стандартизованы.

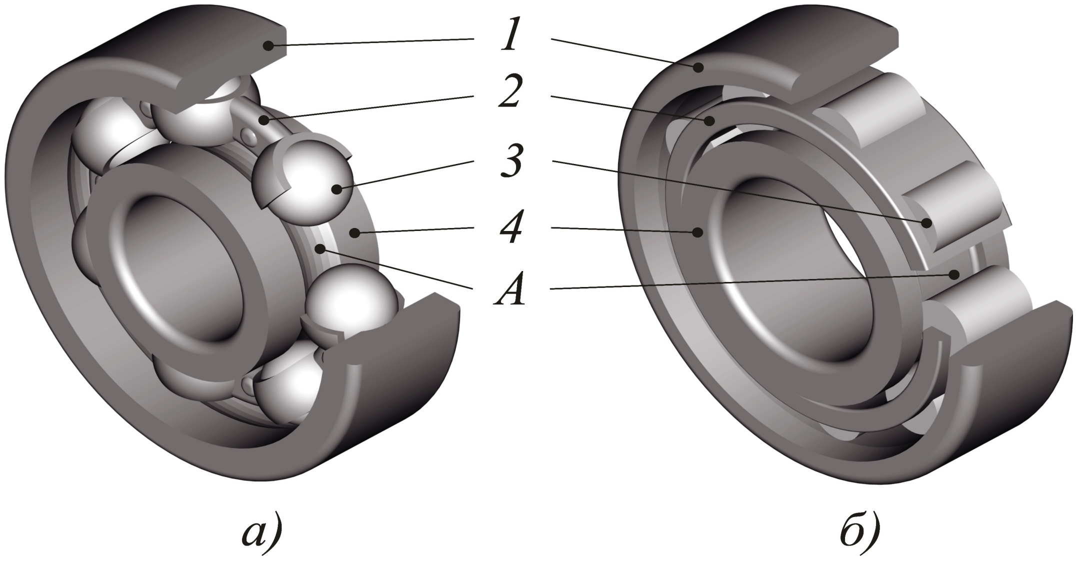


Рис. 4.10. Подшипники качения: *а*) шарикоподшипник; *б*) роликоподшипник

Под действием радиальной силы F_R, возникающей при работе фрикционной передачи, на подшипник качения действует радиальная опорная реакция, рис. 4.11.

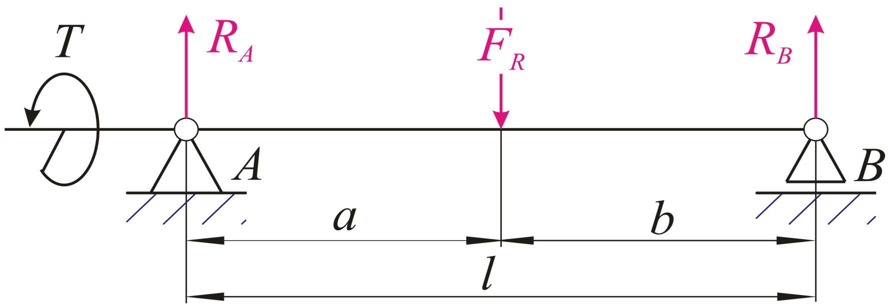


Рис 4.11. Расчётная схема для определения усилий в подшипниках

Силы R_A и R_B могут быть найдены из условий равновесия:

$$\sum M_A = 0; \ \sum M_B = 0.$$

Выбор подшипников качения по динамической грузоподъемности C.

Динамическая грузоподъемность C – это такая постоянная нагрузка, которую подшипник может выдержать в течение 1 млн. оборотов без появления признаков усталости материала подшипника. Значения C приведены в каталогах на подшипники качения.

Динамическая грузоподъемность C и ресурс подшипника L связаны следующей зависимостью:

$$L=\left(\frac{C}{P_Э}\right)^p, \qquad (4.55)$$

где L – долговечность подшипника, *млн. оборотов*;
C – динамическая грузоподъемность, $кН$;
$P_Э$ – эквивалентная нагрузка, $кН$;
$p=3$ – для шарикоподшипников, и $p=10/3$ – для роликоподшипников.

Эквивалентную нагрузку определяют таким образом:

$$P_Э=R_{A,B}\cdot V\cdot K_Б\cdot K_T, \qquad (4.56)$$

где $R_{A,B}$ – наибольшая радиальная нагрузка на подшипник;
V – коэффициент кольца, учитывающий, какое кольцо подшипника вращается (внутреннее или внешнее);
$K_Б$ – коэффициент безопасности, учитывающий характер нагрузки на подшипник;
K_T – температурный коэффициент.
Указанные коэффициенты находятся по справочнику.
Долговечность подшипника L_h в часах определяется по формуле:

$$L_h=\frac{10^6\cdot L}{60\cdot n}=\frac{10^6}{60\cdot n}\left(\frac{C}{P_Э}\right)^p, \qquad (4.57)$$

где n – частота вращения вала, $мин^{-1}$.

Зная диаметр вала $d_П$ в месте посадки подшипника, по каталогу выбирают стандартный подшипник соответствующего типа, внутренний диаметр d равен размеру вала $d_П$.

Расчетную долговечность L_h выбранного подшипника определяют по формуле (4.57). Затем производят сравнение расчетной долговечности подшипника с рекомендуемым значением L_h для конкретного типа машины, которое приводится в таблицах [26, 27, 30]; должно выполнятся условие:

$$L_{h\ расч}\geqslant L_{h\ табл}. \qquad (4.58)$$

Если условие (4.58) не выполняется, то производят замену подшипника на подшипник другой серии с большей динамической грузоподъемностью C.

4.14. РАСЧЕТ ШПОНОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ

Для передачи вращающего момента валы с фрикционными катками соединяются призматическими шпонками со скругленными торцами. Шпоночное соединение показано на рис. 4.12.

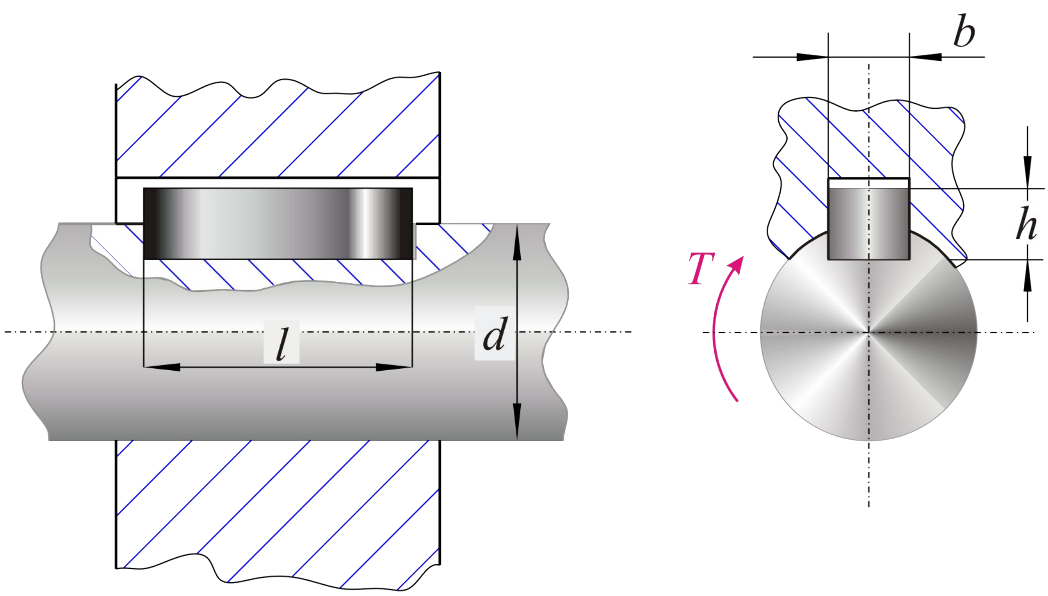


Рис 4.12. Пример шпоночного соединения

Шпонки выполняются из стали, имеющей предел прочности $\sigma_в \geqslant 500\ Н/мм^2$, в частности из стали марки 45 нормализованной.

Призматические шпонки стандартизированы (ГОСТ 23360-78) и выбираются по диаметру вала в месте посадки деталей (катков, зубчатых колес, звездочек и др.).

Длину шпонки l принимают конструктивно, согласуя ее с шириной детали, сидящей на валу (в частности, с шириной катка).

Шпонки подлежат проверке на прочность.

Вращающий момент с вала на каток передается боковыми гранями шпонки, которые испытывают деформацию смятия.

Условие прочности шпонки на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leqslant [\sigma_{см}], \tag{4.59}$$

где $\sigma_{см}$ - расчетное напряжение смятия, $МПа$;

F – окружная сила, действующая на шпонку, $Н$;

$A_{см}$ – площадь смятия шпонки, $МПа$;

$[\sigma_{см}]$ – допустимое напряжение смятия;

$[\sigma_{см}] = 100 \ldots 120\, Н/мм^2$.

Таким образом, условие прочности шпонки на смятие примет вид:

$$\sigma_{см} = \frac{T}{0{,}25 \cdot d \cdot h \cdot (l - в)} \leqslant [\sigma_{см}]. \tag{4.60}$$

Пример 4.1

Рассчитать фрикционный редуктор привода толкателя, предназначенного для подачи стальных заготовок в нагревательную печь (рис. 4.13), по следующим данным:

$P_2=6{,}75\,кВт$ – мощность на ведомом валу редуктора;

$\omega_1=51\ c^{-1}$ - угловая скорость ведущего вала редуктора;

$i=3$ – передаточное число редуктора;

$\eta=0{,}9$ - механический КПД редуктора.

Материал катков – сталь 40Х (улучшенная); твердость после термообработки НВ=285.

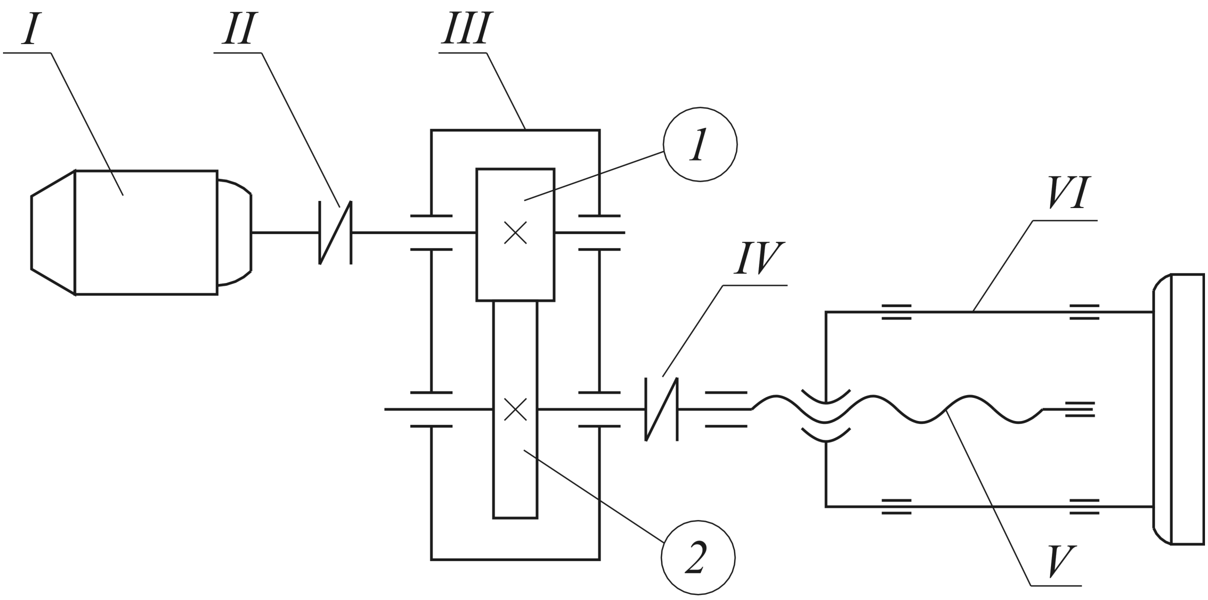


Рис. 4.13. Схема привода: *I* – электродвигатель; *II, IV* – муфты; *III* – редуктор; *V* – винт толкателя; *VI* – толкатель

Расчёт катков

Решение

1. Принимаем коэффициент трения $f=0{,}05$ (стальные катки, работающие в масле).

2. Принимаем коэффициент ширины катков $\psi=b/a=0{,}3$ (a – межосевое расстояние).

3. Определение допускаемого контактного напряжения

$$[\sigma_н]=2\cdot HB+70,\ МПа;$$
$$[\sigma_н]=2\cdot 285+70=640,\ МПа.$$

4. Определение вращающих моментов на валах

$$\omega_2=\frac{\omega_1}{i}=\frac{51}{3}=17\ c^{-1};$$
$$T_2=\frac{P_2\cdot 10^3}{\omega_2}=\frac{6{,}75\cdot 10^3}{17}4{,}0\cdot 10^2\ Н\cdot м;$$

$$T_1=\frac{T_2}{i\cdot\eta}=\frac{4,0\cdot10^2}{3,0\cdot0,9}=140\ H\cdot м.$$

5. Определение межосевого расстояния

$$a=(i+1)\sqrt[3]{\left(\frac{0,418}{[\sigma_н]}\right)^2\frac{T_1\cdot K_{сц}\cdot E}{\psi\cdot i\cdot f}}.$$

Принимаем $K_{сц}=1,5$; $E=210\cdot10^9\ H/мм^2$ – для стали.

$$a=(3,0+1)\sqrt[3]{\left(\frac{0,418}{640\cdot10^6}\right)^2\frac{140,0\cdot1,5\cdot210\cdot10^9}{0,3\cdot3,0\cdot0,05}}=0,303\,м.$$

6. Определение диаметров катков

$$D_1=\frac{2a}{i+1}=\frac{2\cdot303}{3,0+1}=151\,мм.$$

Принимаем $D_1=160\,мм$.

$$D_2=D_1\cdot i(1-\varepsilon)=160\cdot3,0(1-0,01)=475,2\,мм.$$

$\varepsilon=0,01$ - коэффициент скольжения.

Принимаем $D_2=480\,мм$.

7. Определение фактического межосевого расстояния

$$a=\frac{D_1+D_2}{2}=\frac{160+480}{2}=320\,мм.$$

8. Отклонение от заданного значения i составляет 0,7%, что вполне допустимо.

Определение окружной скорости катков

$$V=0,5\cdot\omega_1\cdot D_1=0,5\cdot51\cdot0,160=4,1\ м/с.$$

Допустимая скорость

$V_{\max}=15\ldots20\ м/с$ – при работе катков в масле.

9. Определение ширины катков

$$b_2=\psi\cdot a=0,3\cdot320=96\,мм;$$

$$b_1=b_2+(4\ldots5)\,мм;$$

$$b_1=96,0+4,0=100\ мм.$$

10. Определение окружной силы

$$F_t = \frac{2T_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 140}{0{,}16} = 1850\ H.$$

11. Определение силы натяжения

$$S = K_{сц} \cdot \frac{F_t}{f} = 1{,}5 \frac{1850}{0{,}05} = 55500\ H.$$

12. Определение радиальной нагрузки на вал

$$F_R = \sqrt{F_t^2 + S^2} = \sqrt{(1{,}85 \cdot 10^3)^2 + (55{,}5 \cdot 10^3)^2} = 55530\ H.$$

Расчет валов

13. Принимаем материал валов сталь 45, для которой $[\tau_к] = 15 \ldots\ 20\, H/мм^2$.

Ведущий вал

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1}{0{,}2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{140 \cdot 10^3}{0{,}2 \cdot 20{,}0}} = 15{,}2\ мм.$$

Принимаем $d_1 = 18\, мм$. (ГОСТ6636-69).

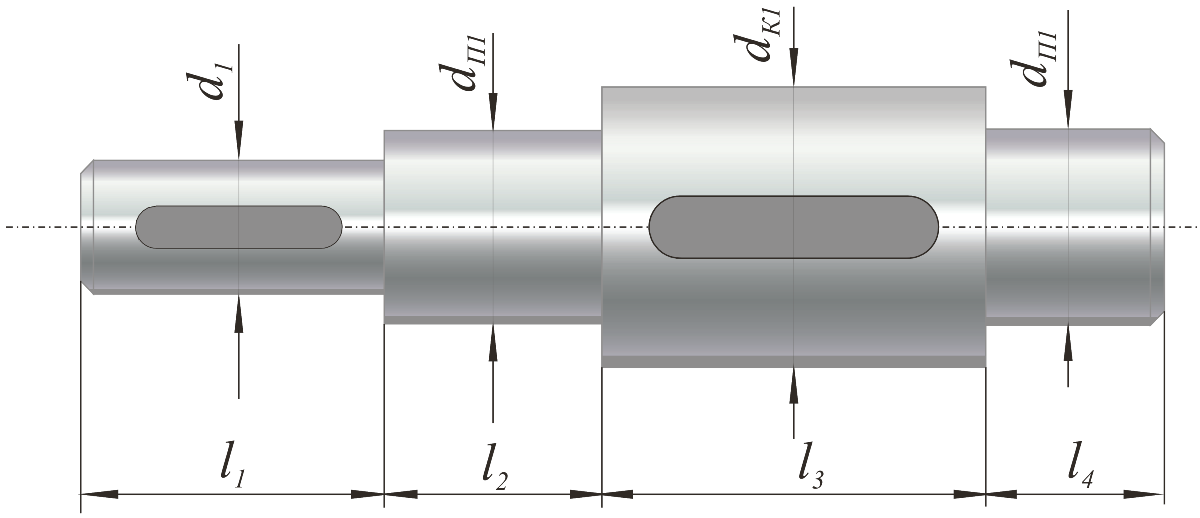


Рис. 4.14. Конструкция ведущего вала

Конструктивно принимаем:

$d_{П1} = 25\, мм$ – диаметр вала в месте посадки подшипников;

$d_{К1} = 30\, мм$ – диаметр вала в месте посадки ведущего катка.

Принимаем шарикоподшипники радиальные однорядные средней серии № 305 $(d = 25\, мм;\ D = 62\, мм;\ B = 17\, мм)$.

$l_1 = 1{,}8 d_1 = 1{,}8 \cdot 18 = 32\, мм;$

$l_2 = l_4 = B = 17\, мм;$

$l_3 = b_1 + 10\, мм = 100 + 10 = 110\, мм.$

Ведомый вал

$$d_2=\sqrt[3]{\frac{T_2}{0,2[\tau_к]}}=\sqrt[3]{\frac{4\cdot10^2\cdot10^3}{0,2\cdot20}}=45\,мм.$$

Принимаем $d_2=45\,мм$ (ГОСТ6636=69).

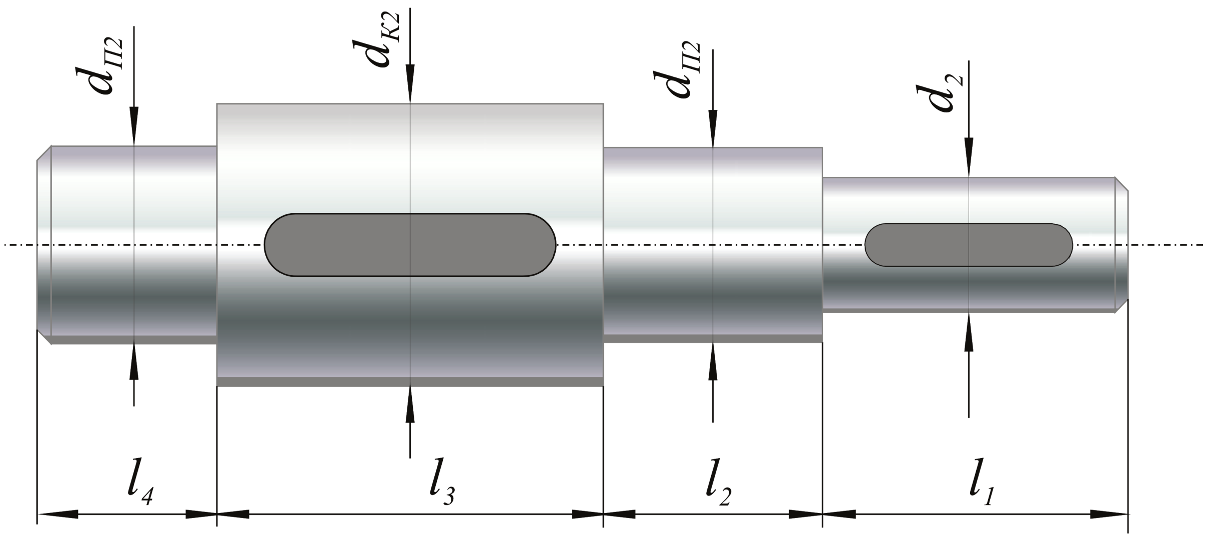


Рис. 4.15. Конструкция ведомого вала

Конструктивно принимаем:

$d_{П2}=50\,мм$ – диаметр вала в месте посадки подшипников;

$d_{К2}=55\,мм$ – диаметр вала в месте посадки ведомого катка.

Принимаем шарикоподшипники радиальные однорядные средней серии №310 $(d=50\,мм;\ D=110\,мм;\ B=27\,мм)$.

$l_1=1,8d\cdot1,8\cdot45=80\,мм;$

$l_2=l_4=B=27\,мм;$

$l_3=b_1+10\,мм=100+10=110\,мм.$

14. Расчет шпоночных соединений

Принимаем шпонки призматические со скругленным торцами (ГОСТ 23360 -78)

Ведущий вал

$d_1=18\,мм;$ шпонка $в\times h=6\times6\ мм;$

Длина шпонки $l=l_1-5\,мм=32-5=27\,мм.$

$d_{К1}=30\,мм;$ шпонка $b\times h=8\times7\,мм;$

Длина шпонки $l=b_1-5\,мм=100-5=95\,мм.$

Материал шпонки – сталь 45 нормализованная $[\sigma_{см}]=100\dots120\,МПа.$

Из двух шпонок – под муфтой и под катком – более нагружена первая шпонка, которую проверяем на прочность

$$\sigma_{см}=\frac{T_1}{0,25d_1\cdot h(l-в)}=\frac{140\cdot10^3}{0,25\cdot18\cdot6(27-6)}=215\ \frac{Н}{мм^2}>[\sigma_{см}].$$

Условие прочности не выполнено, поэтому применим две шпонки, диаметрально расположенные по валу. При этом площадь смятия увеличится в два раза и, соответственно, расчетное напряжение уменьшится в два раза.

Ведомый вал

$d_2 = 45\,мм$; шпонка $b \times h = 12 \times 8\,мм$;

Длина шпонки $l = l_1 - 5\,мм = 80 - 5 = 75\,мм$;

$d_{K2} = 55\,мм$; шпонка $b \times h = 16 \times 10\,мм$;

Длина шпонки $l = b_2 - 5\,мм = 95 - 5 = 90\,мм$.

Из двух шпонок ведомого вала – под муфтой и под катком – более нагружена первая шпонка, которую проверяем на прочность

$$\sigma_{см} = \frac{T_2}{0,25\,d_2 \cdot h(l-b)} = \frac{4 \cdot 10^2 \cdot 10^3}{0,25 \cdot 45 \cdot 8 \cdot (75-5)} = 60\ \frac{Н}{мм^2} < [\sigma_{см}].$$

Условие прочности выполнено.

4.15. ОПОРЫ ВАЛОВ И ОСЕЙ

Опорами валов и осей являются подшипники. В зависимости от рода трения в подшипнике различают подшипники скольжения и подшипники качения. Подшипники скольжения используют в тех случаях, когда применение подшипников качения затруднено или невозможно по ряду причин: высокие вибрационные нагрузки; высокая частота вращения; работа в воде, агрессивных средах и др.

Основным элементом подшипника скольжения является вкладыш, который устанавливают в корпусе подшипника (рис. 4.16).

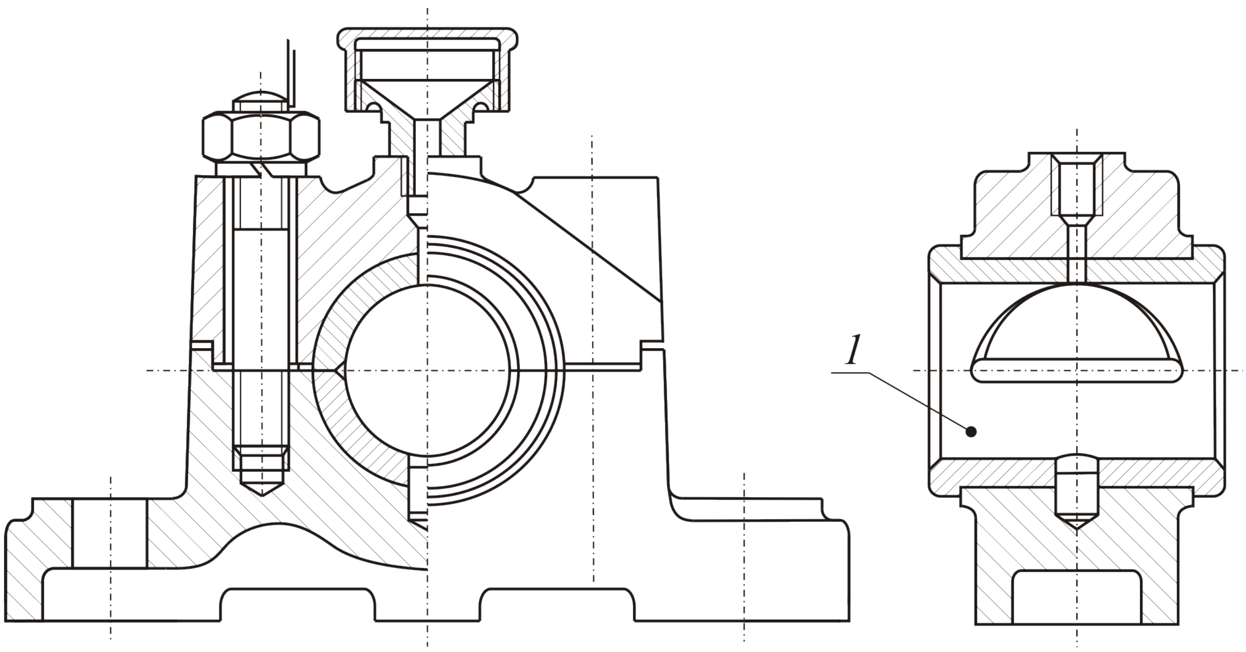


Рис. 4.16. Подшипник с разъёмным корпусом и вкладышем (*1*- вкладыш)

Материал вкладыша должен иметь:

1. достаточную износостойкость;
2. низкий коэффициент трения и высокую теплопроводность.

В качестве материалов для вкладышей применяют: бронзы, баббит, чугун, металлокерамику, неметаллические материалы.

Основным критерием работоспособности опор скольжения является износостойкость – сопротивляемость изнашиванию и заеданию.

Для уменьшения трения и износа подшипники смазывают. Смазка должна быть маслянистой и вязкой. Смазочные материалы могут быть жидкие, консистентные и газообразные. Основным смазочным материалом являются жидкие смазки (органические и минеральные): касторовое масло, индустриальное масло, автотракторные масла и др.

Смазка подаётся в подшипник самотёком с помощью смазочных устройств или под давлением от насоса.

Наиболее распространённым видом опор валов и вращающихся осей являются подшипники качения. В отличие от подшипников скольжения в них реализуется трение качения.

Подшипники качения имеют ряд преимуществ перед подшипниками скольжения: малые осевые габариты, меньшее сопротивление пуску и вращению, простое техническое обслуживание, низкую себестоимость, взаимозаменяемость. Подшипники качения стандартизированы.

Типовая опора на подшипниках качения показана на рис. 4.17.

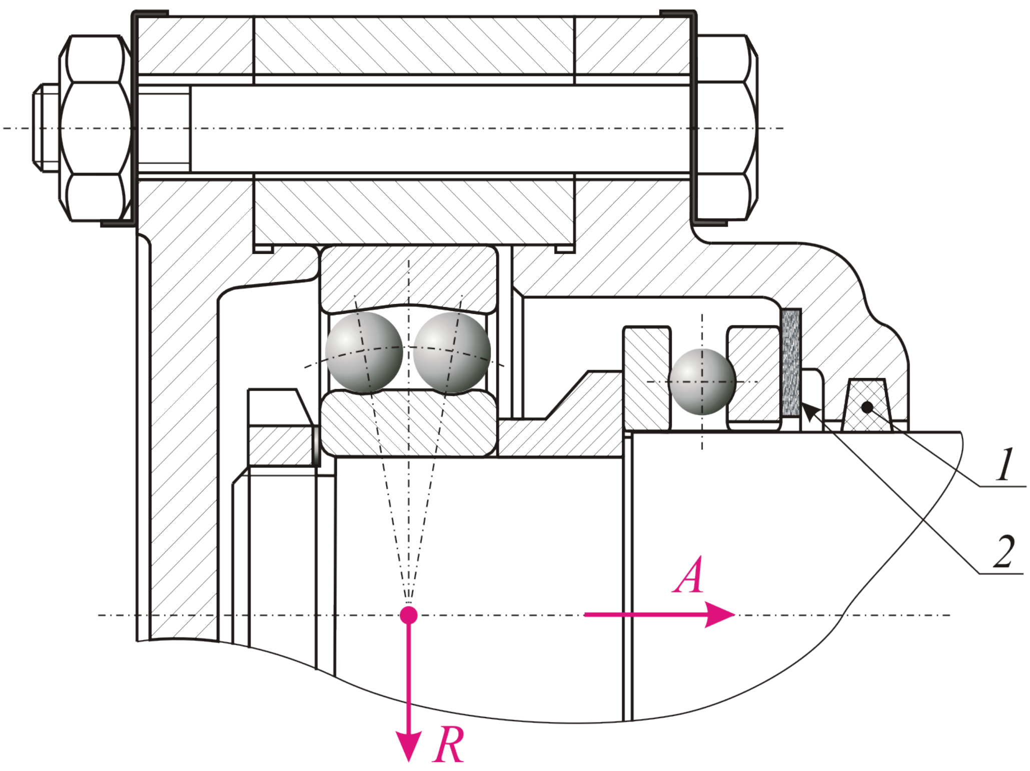


Рис. 4.17. Пример установки вала на шариковых подшипниках:
1-войлочное уплотнение; *2*- свинцовое кольцо

Основными критериями работоспособности подшипников качения являются долговечность по усталостному выкрашиванию и статическая грузоподъёмность по пластическим деформациям.

Выбор типа подшипника и его размеров зависит от его назначения, направления и величины нагрузки, угловой скорости вращения вала (или оси), режима работы и особенностей монтажа.

Основной характеристикой подшипника качения является динамическая грузоподъёмность - $C, кН$. Условием подбора подшипника является следующее:

$C(\text{потребная}) \leqslant C(\text{паспортная})$.

$C(\text{потребная})$ определяется следующей зависимостью:

$$C = P \cdot \sqrt[p]{\frac{60 \cdot n \cdot L_h}{10^6}}, \tag{4.61}$$

где P - эквивалентная нагрузка, $кН$;

n - частота вращения вала (или оси), $об/мин$;

L_h - требуемый ресурс работы подшипника, $час$;

p - показатель степени ($p=3{,}0$ – для шариковых подшипников, $p=3{,}3$ для роликовых подшипников.)

Долговечность подшипника качения зависит от от смазки, которая уменьшает трение между телами качения, кольцами и сепаратором, предохраняет их от коррозии и способствует охлаждению подшипника. Для смазки подшипников качения применяют консистентные мази и жидкие минеральные масла.

4.16. МУФТЫ

Муфтами называют устройства, которые служат для соединения концов валов. Потребность в соединении валов связана с тем, что большинство машин компонуют из ряда отдельных частей с входными и выходными валами, которые соединяют с помощью муфт (рис. 4.18).

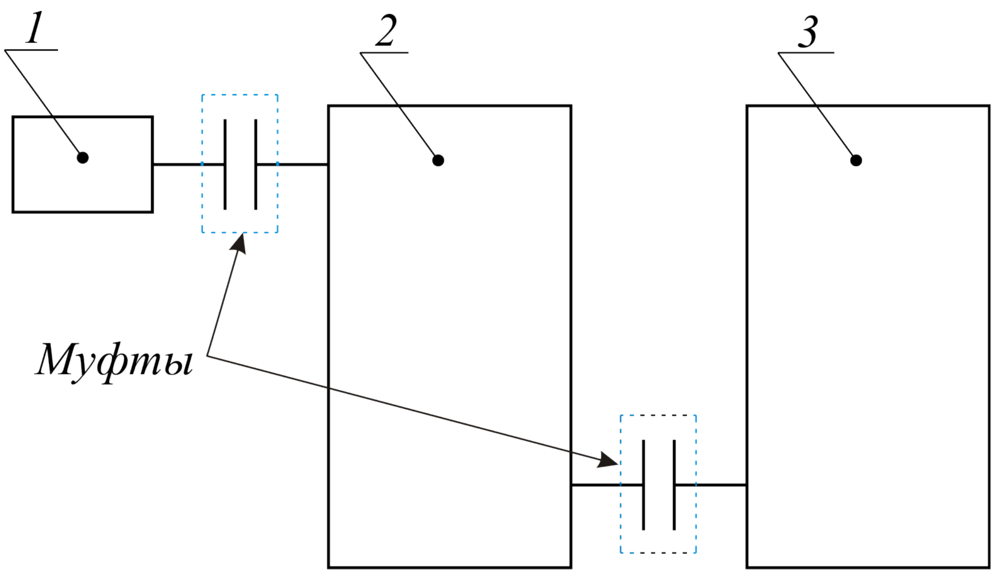


Рис. 4.18. Схема механического привода:
1-двигатель; *2*- редуктор; *3*-исполнительный механизм

В современном машиностроении применяют большое количество муфт, различающихся по принципу действия и управления, назначению и конструкции.

Классификация муфт по этим признакам представлена на рис. 4.19.

Широко применяемые муфты стандартизированы.

Основной паспортной характеристикой муфты является значение передаваемого вращающего момента. Муфты подбирают по ГОСТу по расчетному моменту $M_{расч}$

$$M_{расч} = k \cdot M\,, \tag{4.62}$$

где k - коэффициент работы муфты $(k = 1{,}15 \ldots 4{,}0)$;

M - передаваемый вращающий момент.

На рис. 4.19 - 4.23 представлены часто применяемые в машиностроении муфты.

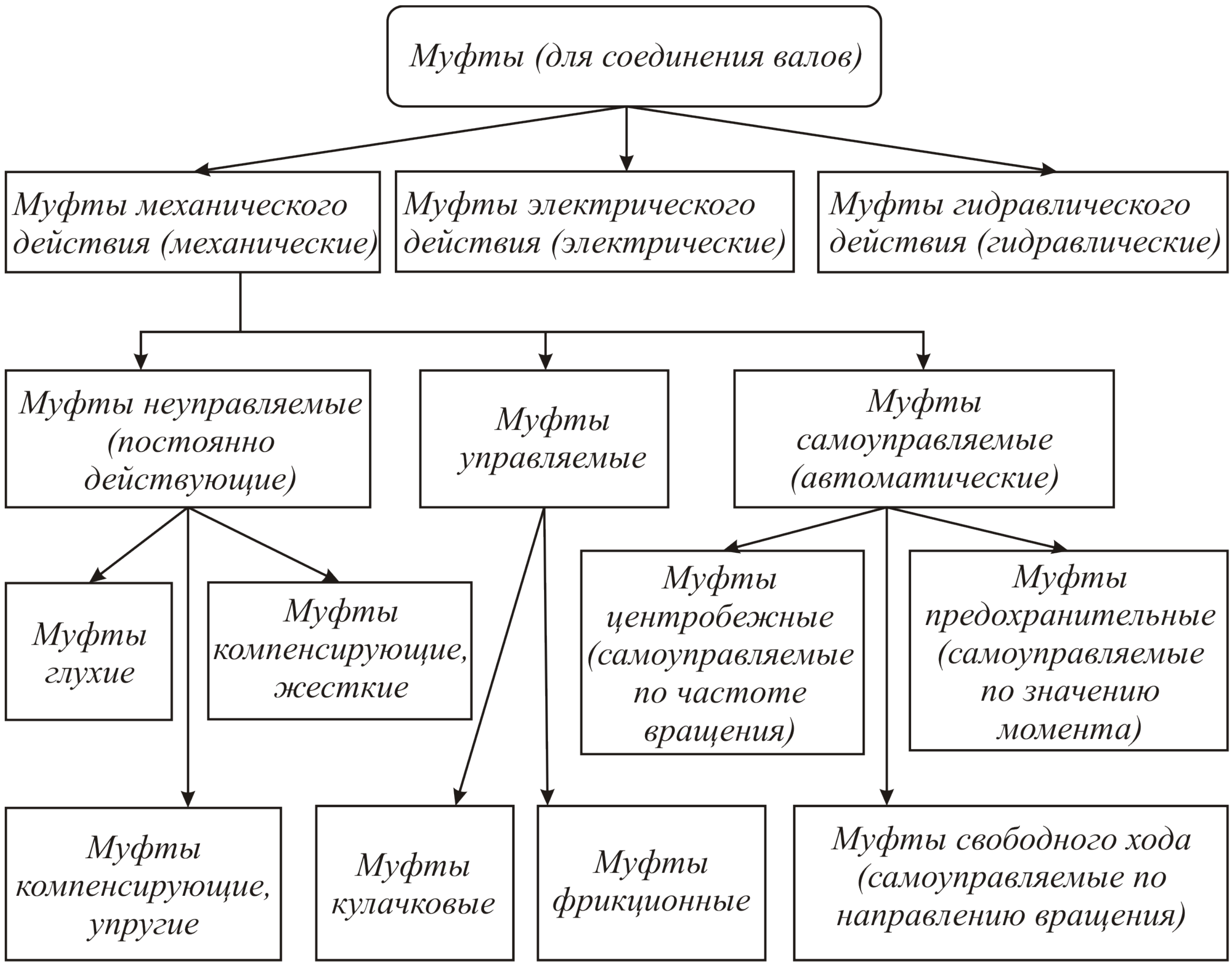


Рис. 4.19. Классификация муфт по принципу действия и управления, назначению и конструкции

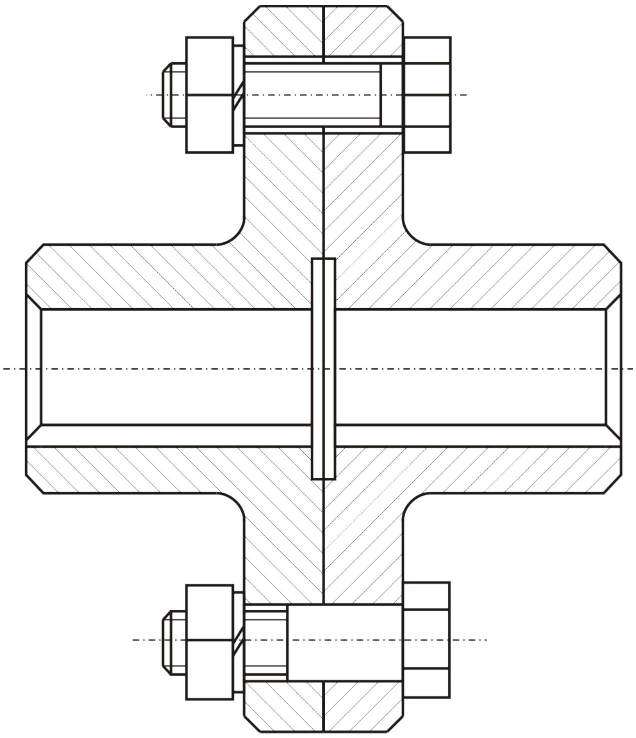


Рис. 4.20. Муфта фланцевая

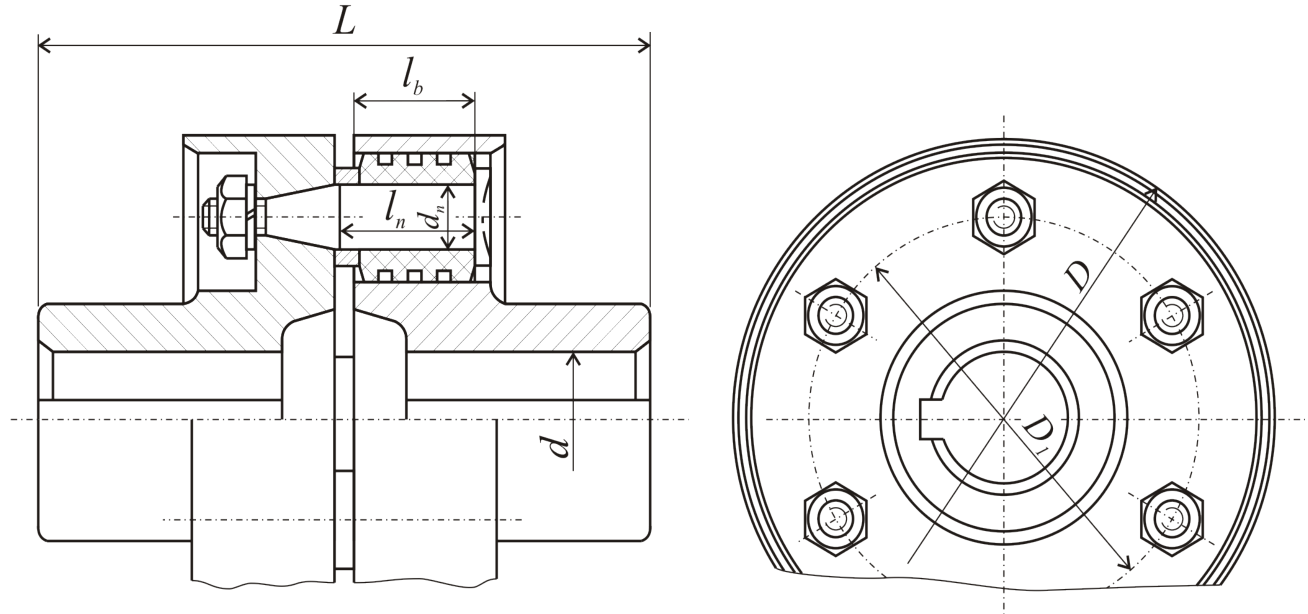


Рис. 4.21. Муфта упругая
втулочно-пальцевая (МУВП)

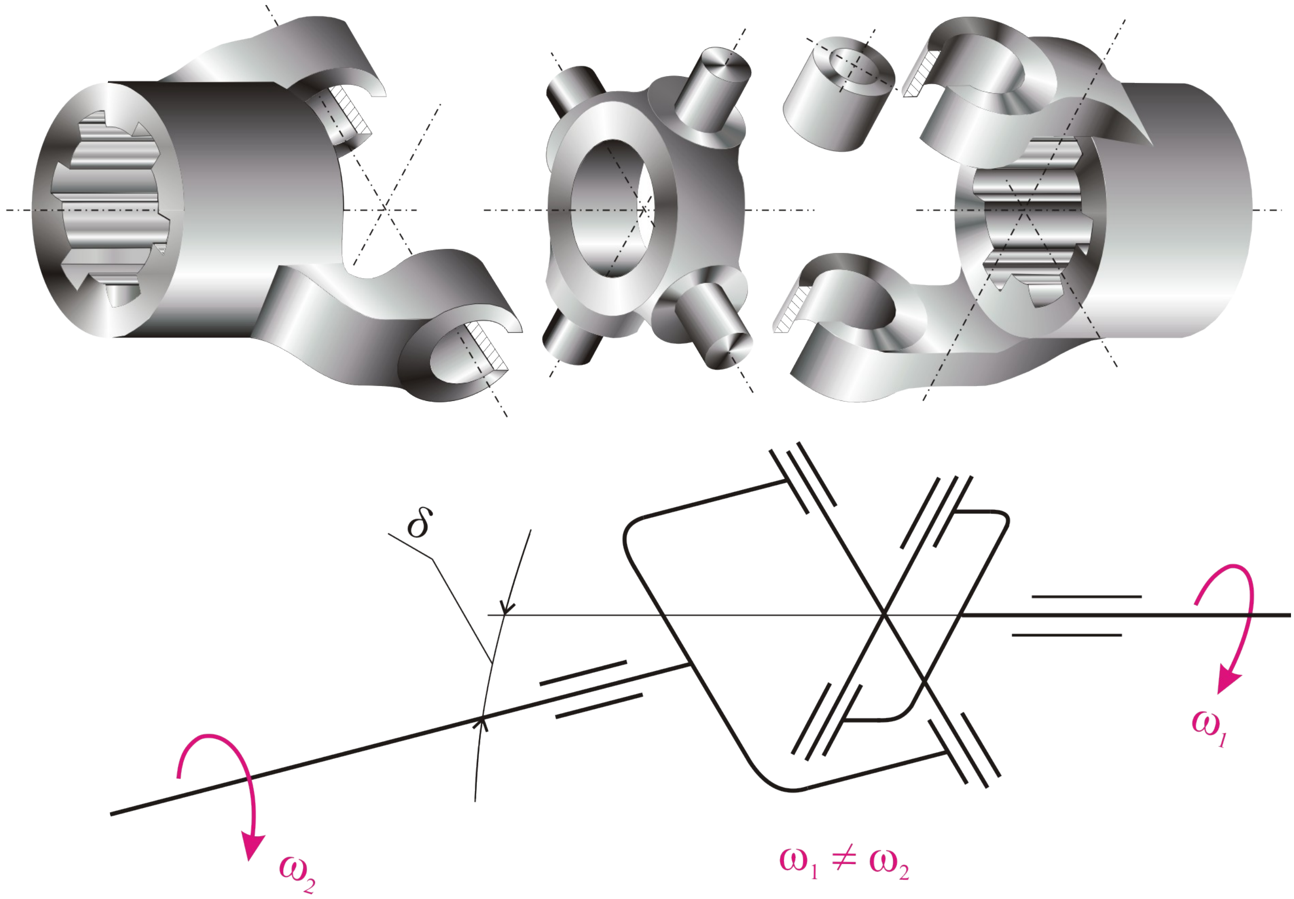


Рис. 4.22. Шарнирная ординарная муфта

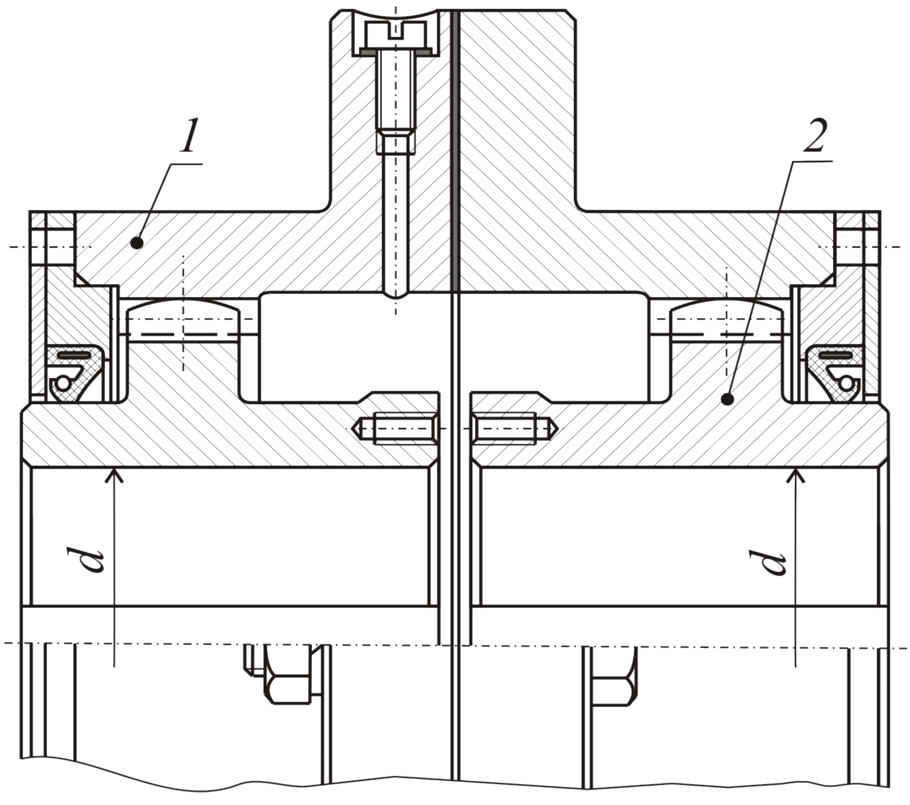


Рис. 4.22. Зубчатая муфта: *1*- обойма; *2*- втулка

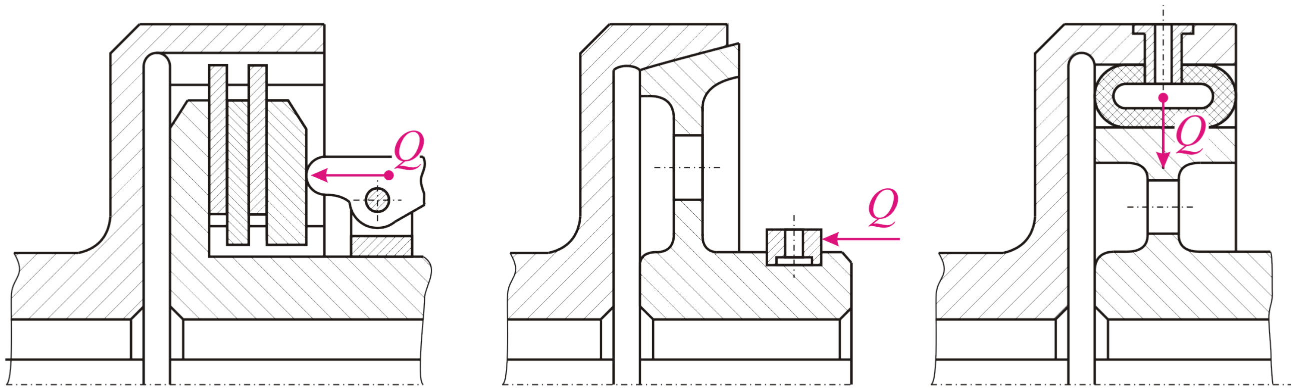


Рис. 4.23. Схемы фрикционных муфт

4.17. УПЛОТНИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

Уплотнительные устройства применяют для предохранения от вытекания смазки из корпуса механизма, а также для защиты подшипниковых узлов от попадания извне пыли и влаги.

В машиностроении наиболее распространены следующие виды уплотнений.

Манжетные уплотнения (рис. 24).

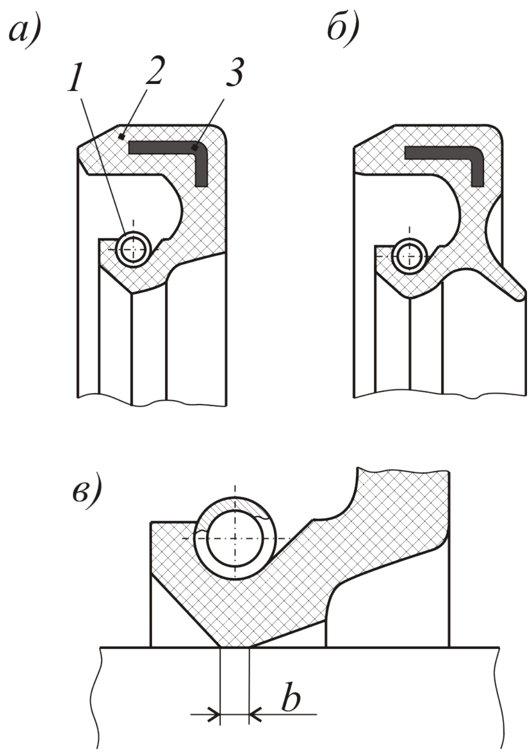


Рис. 4.24. Манжетные уплотнения: *1* - браслетная пружина; *2* - бензомаслостойкая резина; *3* - стальное кольцо

Манжета состоит из корпуса, изготовленного из бензомаслостойкой резины, каркаса, представляющего собой стальное кольцо Г- образного сечения, и браслетной пружины.

Щелевые уплотнения (рис. 4.25).

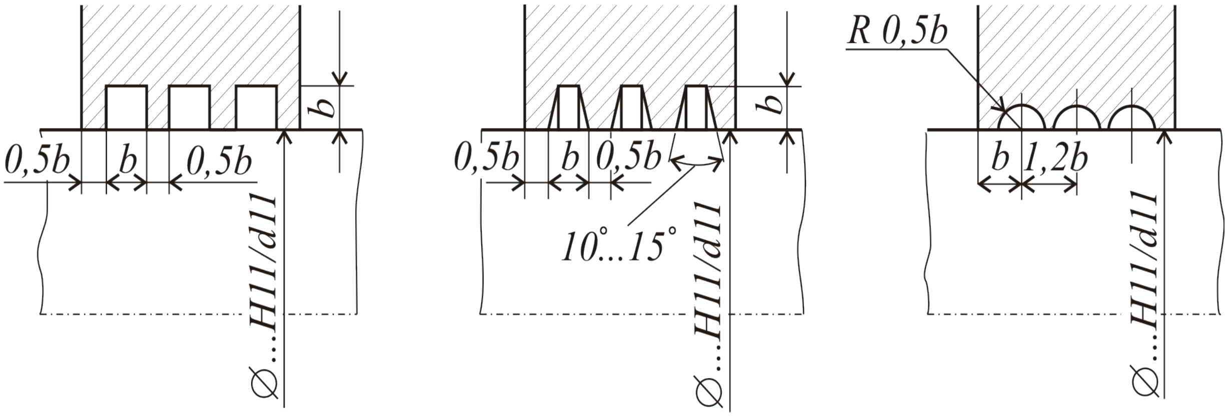


Рис. 4.25. Щелевые уплотнения

В лабиринтных уплотнениях (рис. 4.26) уплотняющий эффект создаётся чередованием радиальных и осевых зазоров.

Центробежные и комбинированные уплотнения (рис. 4.27).

Эти уплотнения основаны на действии центробежной силы.

Эффективное уплотнение создаёт винтовая канавка, нарезанная на внешней поверхности специального кольца, по которой смазка направляется внутрь корпуса (направление нарезки винтовой канавки противоположно направлению вращения вала).

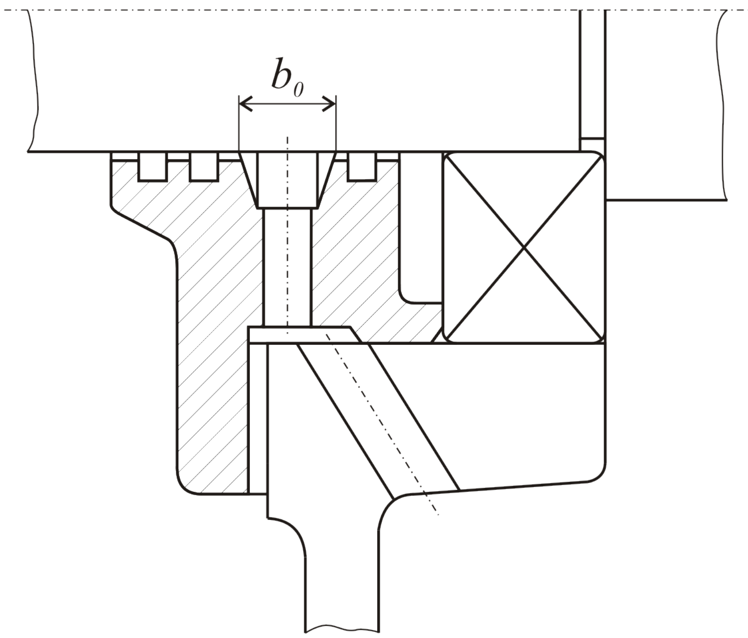


Рис.4.26. Лабиринтные уплотнения

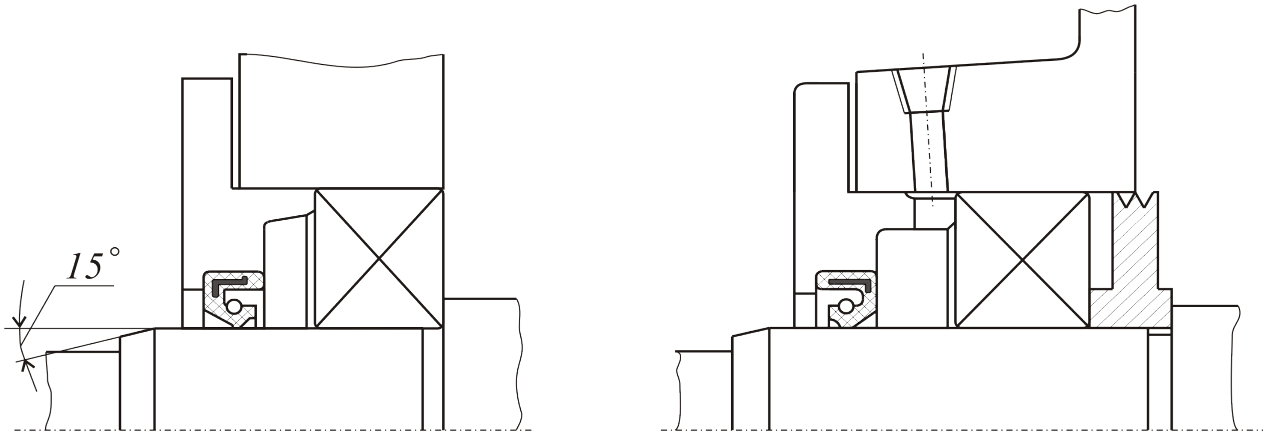


Рис. 4.27. Центробежные и комбинированные уплотнения

4.18. УПРУГИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Упругие элементы – пружины и рессоры – широко распространены в машиностроении. Их применяют:

1. Для создания заданных постоянных сил (например, в кулачковых механизмах).
2. Для силового замыкания механизмов (например, в кулачковых механизмах).
3. Для выполнения функций двигателя (например, часовые пружины).
4. Для виброизоляции в транспортных машинах (например, рессорная подвеска кузова автомобиля).
5. Для восприятия энергии удара (например, буферные пружины, применяемые в подвижном железнодорожном составе).
6. Для измерения сил (например, в измерительных приборах).

Основные типы пружин приведены на рис. 4.28.

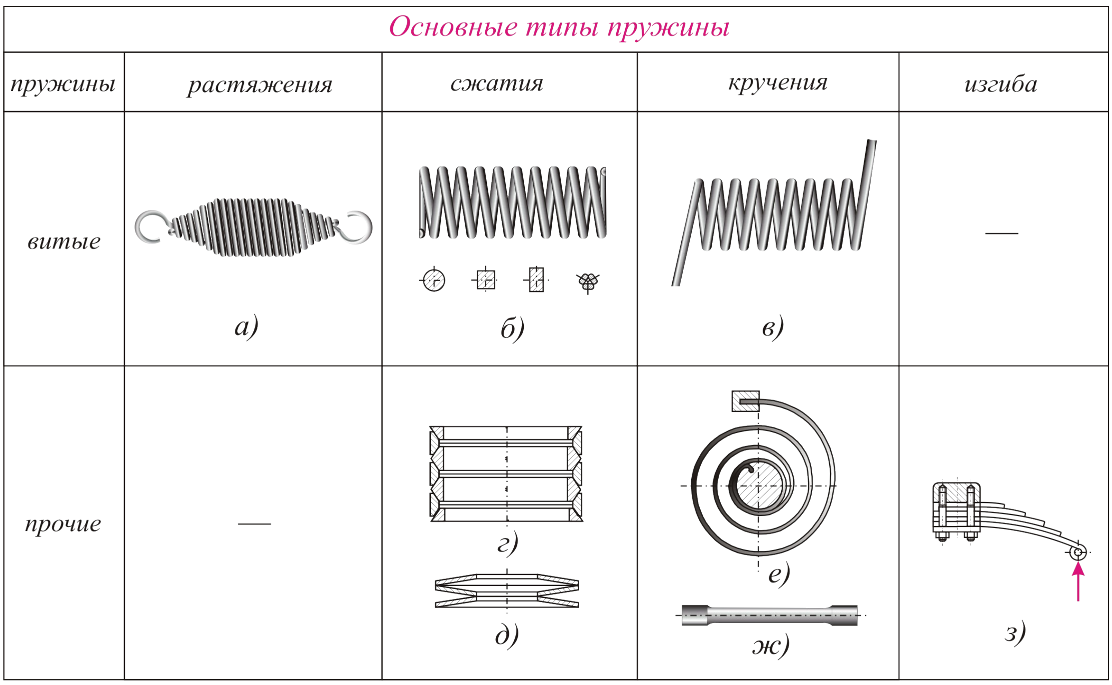


Рис. 4.28. Основные типы пружин

Работа упругих элементов в машинах заключается в накоплении энергии и её последующей отдаче или в осуществлении требуемого постоянного нажатия.

Основное распространение в машиностроении имеют упругие элементы растяжения или сжатия.

Материалы для пружин должны иметь высокие и стабильные во времени упругие свойства. Основными материалами для пружин являются: высокоуглеродистые стали 65, 70, марганцовистые стали 65Г, кремнистые стали 60С2А, хромванадиевая сталь 50ХФА и др.

Цилиндрические пружины характеризуются следующими основными геометрическими параметрами (рис.4.29):

1) диаметром проволоки d;
2) средним диаметром пружины D;
3) шагом витков h;
4) углом подъёма витков α;
5) длиной рабочей части пружины H_p;
6) длиной H;
7) числом рабочих витков s.

Упругие элементы относят к деталям машин, требующим достаточно точных расчётов. При работе витки цилиндрических пружин подвергаются напряжению кручения. Упругие элементы рессор работают на изгиб. Кроме этого упругие элементы рассчитываются на жёсткость.

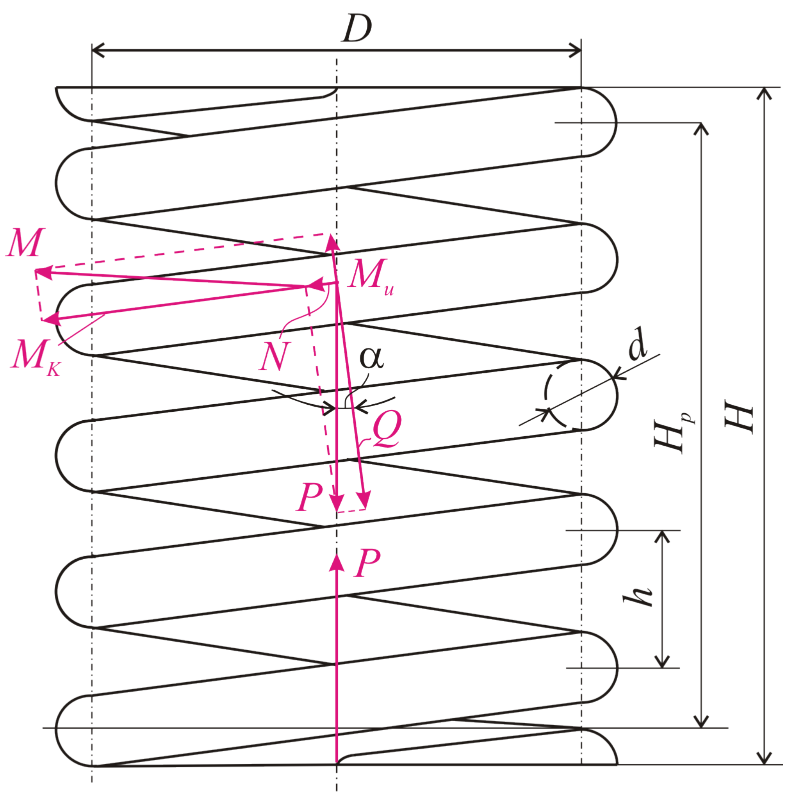


Рис. 4.29. Параметры цилиндрической пружины и силы, действующие на упругий элемент

4.19. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Ременная передача состоит из ведущего и ведомого шкивов и ремня, надетого на шкивы с предварительным натяжением F_0. Энергия передается за счет трения, возникающего между ремнем и шкивами (рис. 4.30).

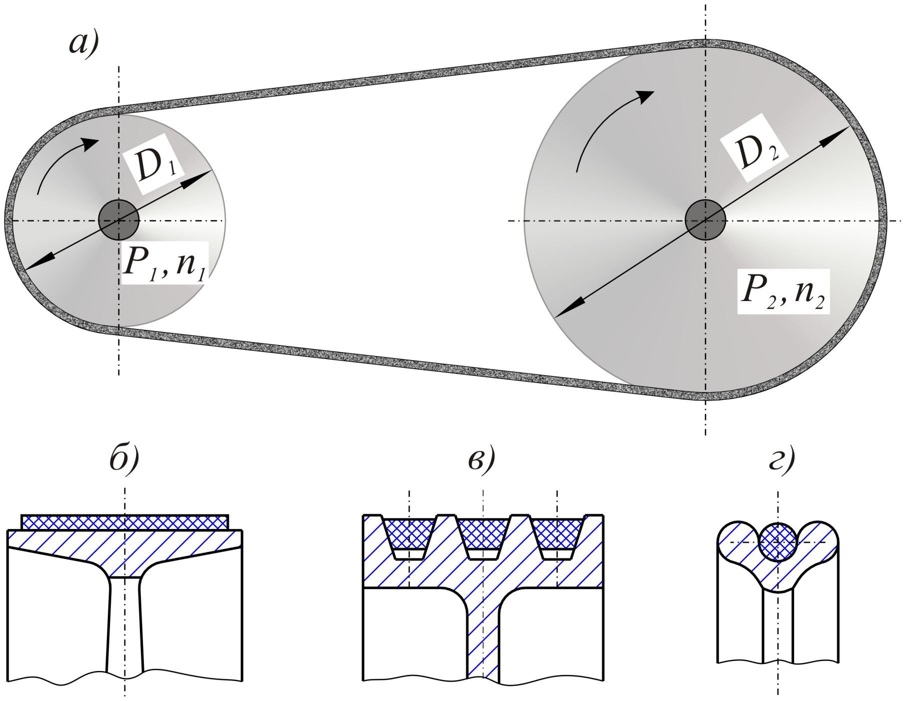


Рис. 4.130. Ременная передача: *а*) общий вид;
б) плоскоремённая; *в*) клиноремённая; *г*) круглоремённая

Ремни выполняют с сечением в виде узкого прямоугольника - плоские ремни; трапециевидного сечения - клиновые ремни и поликлиновые ремни; круглого сечения - круглые ремни и зубчатые ремни. Наиболее широкое распространение в машинах имеют клиновые и плоские ремни.

Достоинствами ременных передач являются:

1. возможность передачи движения на значительные расстояния;
2. плавность и бесшумность работы;
3. возможность работы с высокими частотами вращения;
4. малая стоимость.

Недостатки ременных передач:

1. значительные габариты;
2. упругое скольжение ремня при работе;
3. повышенные силы на валы и опоры;
4. необходимость применения натяжных устройств.

Натяжение ремня обеспечивают одним из следующих способов:

1. перемещением одного из шкивов (рис. 4.31);
2. натяжным роликом;
3. автоматическим устройством, обеспечивающим регулирование натяжения в зависимости от нагрузки.

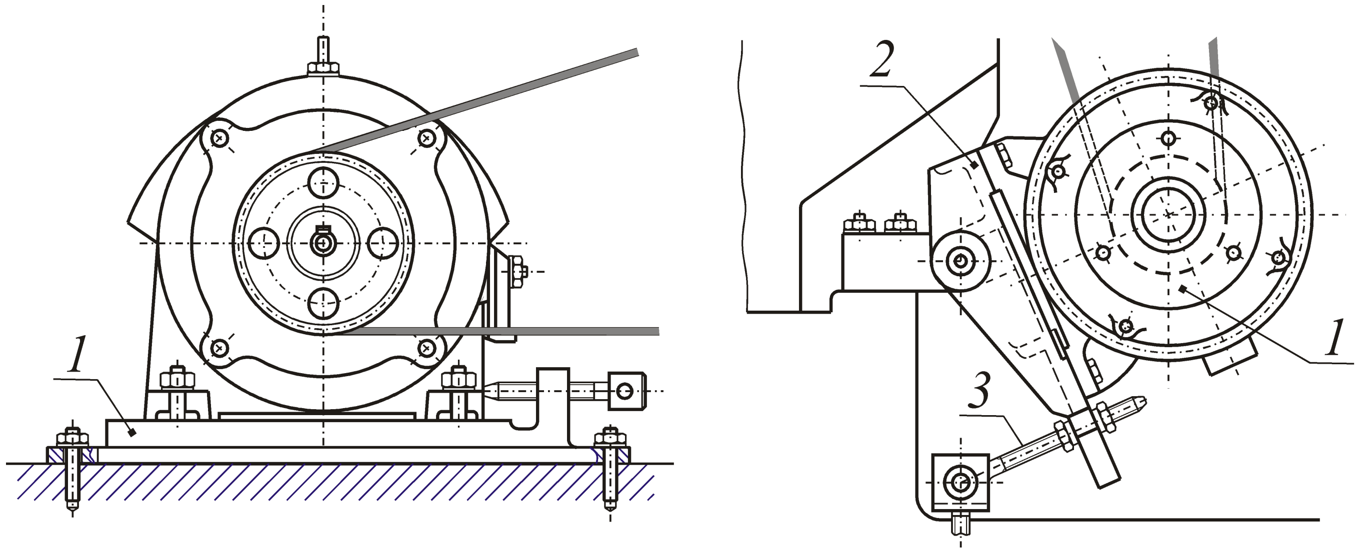


Рис. 4.31. Элементы конструкции для натяжения ремней

4.20. МАТЕРИАЛЫ РЕМНЕЙ

К материалам ремней предъявляются следующие требования:

1. прочность и износостойкость;
2. достаточный коэффициент трения со шкивами;
3. невысокая изгибная жесткость.

Для плоских ремней применяются синтетические тканевые материалы, прорезиненные кордшнуровые с лавсановым шнуром, резинотканевые, кожаные и хлопчатобумажные.

Клиновой ремень состоит из следующих частей:

1. корда, представляющего собой основной несущий слой, расположенный примерно по центру тяжести сечения ремня;
2. резиновых слоев, расположенных над и под несущим слоем (кордом);
3. обертки ремня в виде нескольких слоев прорезиненной ткани, намотанной диагонально.

Корд выполняют из химических волокон: вискозы, капрона, лавсана. Применяются кордтканевые и кордшнуровые ремни.

4.21. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РЕМЕННЫХ ПЕРЕДАЧ

В основе теории ременной передачи лежит установленная Эйлером аналитическая зависимость между натяжениями гибкой нити, огибающей цилиндр.

Рассмотрим неподвижный цилиндр, охватываемый гибкой, невесомой и нерастяжимой нитью в пределах угла α (рис. 4.32).

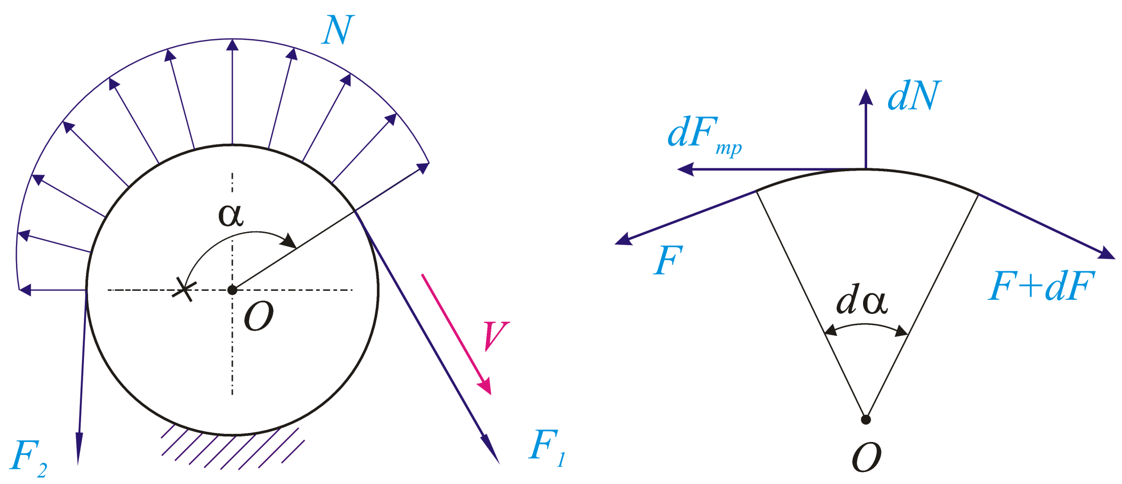


Рис. 4.32. К выводу формулы Эйлера

Выделим элементарно малый участок нити, соответствующий углу $d\,\alpha$, и покажем все действующие силы:
F и $(F+d\,F)$ - силы, приложенные к концам нити; $d\,N$ - сила нормального давления; $d\,F_{тр}$ - окружная сила трения.

Запишем условие равновесия нити $\left(\sum Y=0\right)$:

$$dN-F\cdot\sin\frac{d\,\alpha}{2}-(F+d\,F)\cdot\sin\frac{d\,\alpha}{2}=0. \qquad (4.63)$$

или

$$d\,N-2\,F\sin\frac{d\,\alpha}{2}-d\,F\sin\frac{d\,\alpha}{2}=0. \qquad (4.64)$$

Отбрасывая выражение $dF\sin\frac{d\,\alpha}{2}$, как величину высшего порядка малости, и полагая, что $\sin d\,\alpha\approx d\,\alpha$, получим

$$dN=F\,d\,\alpha. \qquad (4.65)$$

Сила трения

$$dF_{тр}=f\,dN. \qquad (4.66)$$

Запишем условие равномерного движения нити

$$dF_{тр}=dF, \qquad (4.67)$$

где dF - движущая сила.
Используя выражения (4.65), (4.66) и (4.67), получим следующее:

$$f \cdot F \cdot da = d\,F\,; \tag{4.68}$$

$$f \cdot d\,\alpha = \frac{dF}{F} \tag{4.69}$$

Разделяя переменные и интегрируя по всему углу обхвата, найдем

$$\int_0^{\alpha} f \cdot d\,\alpha = \int_{F_2}^{F_1} \frac{dF}{F}. \tag{4.70}$$

Формула Эйлера окончательно примет следующий вид:

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{f\alpha}, \tag{4.71}$$

где $e = 2{,}718\ldots$ - основание натуральных логарифмов.

В отличие от нити, рассматриваемой при выводе формулы (4.71), ремень обладает упругостью и массой, что необходимо учитывать при расчетах ременных передач.

4.22. УПРУГОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ

Очевидно, что массы ремня, проходящие в единицу времени через данные сечения как с ведущей, так и с ведомой стороны замкнутого ремня, остаются постоянными.

Для установившегося движения можно записать соотношение

$$q \cdot V = const\,, \tag{4.72}$$

где q - вес единицы длины ремня, $Н/м$;

V - скорость ремня в данном сечении, $м/с$.

При изменении натяжения ремня изменяется его длина и, соответственно, вес единицы этой длины. Величина q может быть выражена через q_0 единицу длины нерастянутого ремня и относительное удлинение λ.

$$q = \frac{q_0}{1+\lambda}, \tag{4.73}$$

следовательно,

$$\frac{V}{1+\lambda} = const. \tag{4.74}$$

Формула (4.74) показывает, что скорость ремня больше в тех его точках, в которых он больше растянут. На ведущий шкив ремень набегает с натяжением F_1 (удлинением λ_1), а сходит с него с натяжением F_2 (при этом $F_2 \neq F_1$ *и* $\lambda_2 \neq \lambda_1$), соответствующие скорости ремня согласно выражению (4.74) также будут различными $V_2 \neq V_1$). Но так как скорость на ободе шкива постоянна, то в тех местах, где скорости соприкасающихся поверхностей ремня и шкива неодинаковы, неизбежно скольжение. Это скольжение носит название упругого скольжения ремня по шкиву. С учетом упругого скольжения ремня передаточное число i ременной передачи определяется:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1(1-\varepsilon)}, \tag{4.75}$$

где n_1, n_2 - частоты вращения шкивов, $об/мин$;

D_1, D_2 - диаметры шкивов, $мм$;

$\varepsilon = \dfrac{n_2 - n_2'}{n_2}$ - коэффициент скольжения;

n_2' - фактическая частота вращения ведомого шкива.

4.23. ДЕЙСТВИЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

В движущемся ремне возникает натяжение F_v от действия центробежных сил. Для определения этих натяжений выделим элемент ремня, соответствующий углу $d\alpha$ (рис. 4.33). На массу dm этого элемента действует центробежная сила dC, уравновешиваемая натяжениями F_V.

Условие равновесия:

$$-dC + 2F_V \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} = 0. \tag{4.76}$$

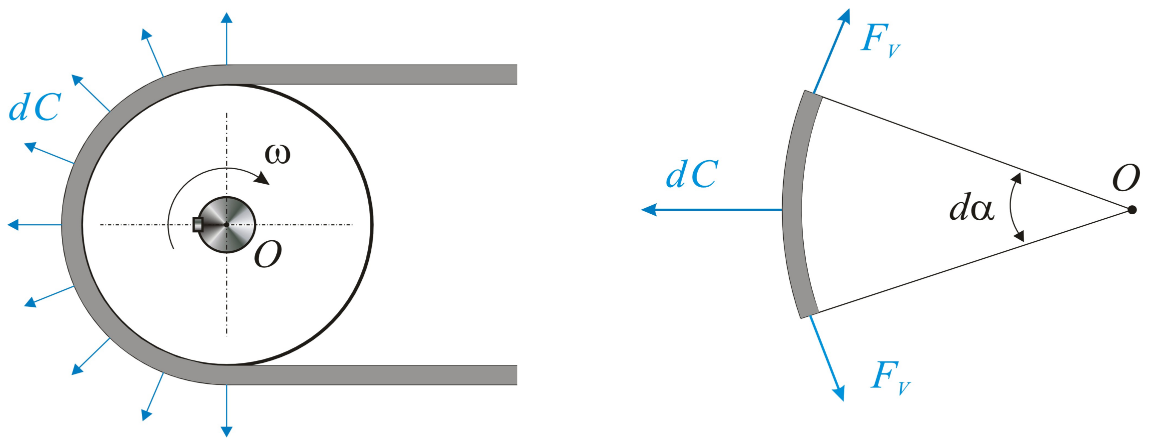


Рис. 4.33. К определению центробежных сил

Центробежная сила инерции может быть выражена формулой

$$d\,C=\frac{V^2}{\rho}dm=\frac{V^2}{\rho}\cdot\frac{\rho\cdot d\,\alpha}{g}=q\cdot\frac{V^2}{g}d\,\alpha. \qquad (4.77)$$

Полагая, что $\sin\frac{d\,\alpha}{2}\approx\frac{d\,\alpha}{2}$, получим

$$F_V=\frac{q\cdot V^2}{g}. \qquad (4.78)$$

4.24. ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

При огибании шкивов ремнем в нем возникают изгибные напряжения. Воспользуемся уравнением упругой линии применительно к изогнутому ремню

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_И}{EJ}, \qquad (4.79)$$

где ρ - радиус кривизны нейтрального слоя, $мм$;
$M_И$ - момент изгибающий, $Н\cdot мм$.
E - модуль упругости материала ремня, $Н/мм^2$;
J - осевой момент инерции сечения ремня, $мм^4$.

Известно, что $J=W\cdot y$, где W - момент сопротивления сечения изгибу $мм^3$; y - расстояние от нейтрального слоя до наиболее удаленного волокна, $мм$ $(y=\delta/2)$.

Из рисунка 4.34 видно, что $\rho=\frac{D+\delta}{2}$, где D -диаметр шкива, $мм$;
δ - толщина ремня, $мм$.

Используя уравнение (4.79), можно получить следующую формулу:

$$\sigma_И=E\cdot\frac{\delta}{(D+\delta)}\approx E\cdot\frac{\delta}{D}. \qquad (4.80)$$

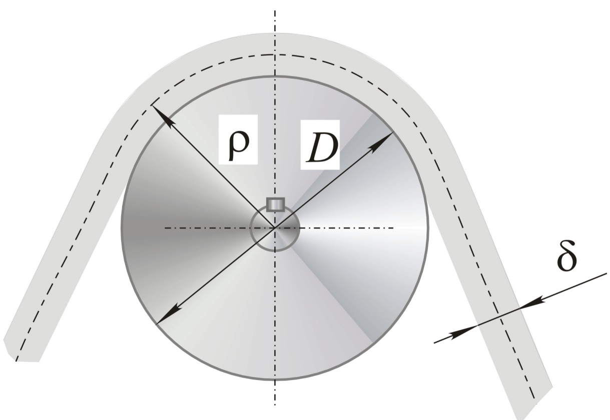


Рис. 4.34. К расчёту изгибных напряжений

4.25. НАПРЯЖЕНИЯ В РЕМНЕ

В различных частях ремня возникают различные напряжения. Составляющими этих напряжений являются: растягивающие напряжения σ_0 от начального натяжения; от передаваемого окружного усилия F_t, от действия центробежных сил; изгибные напряжения. Для плоского ремня с площадью поперечного сечения $A=\delta\cdot в$ ($в$ - ширина ремня, δ - толщина ремня) эти напряжения определяются следующим образом:

- напряжение от начального натяжения

$$\sigma_0=\frac{F_0}{A}, \qquad (4.81)$$

- напряжение от передаваемого окружного усилия

$$\sigma_F=\frac{F_t}{A}, \qquad (4.82)$$

- напряжение от действия центробежных сил

$$\sigma_V=\frac{\gamma\cdot V^2}{A}, \qquad (4.83)$$

- напряжение от изгиба

$$\sigma_И=E\cdot\frac{\delta}{D}. \qquad (4.84)$$

Примерная картина распределения напряжений в передаче приведена на рис. 4.35.

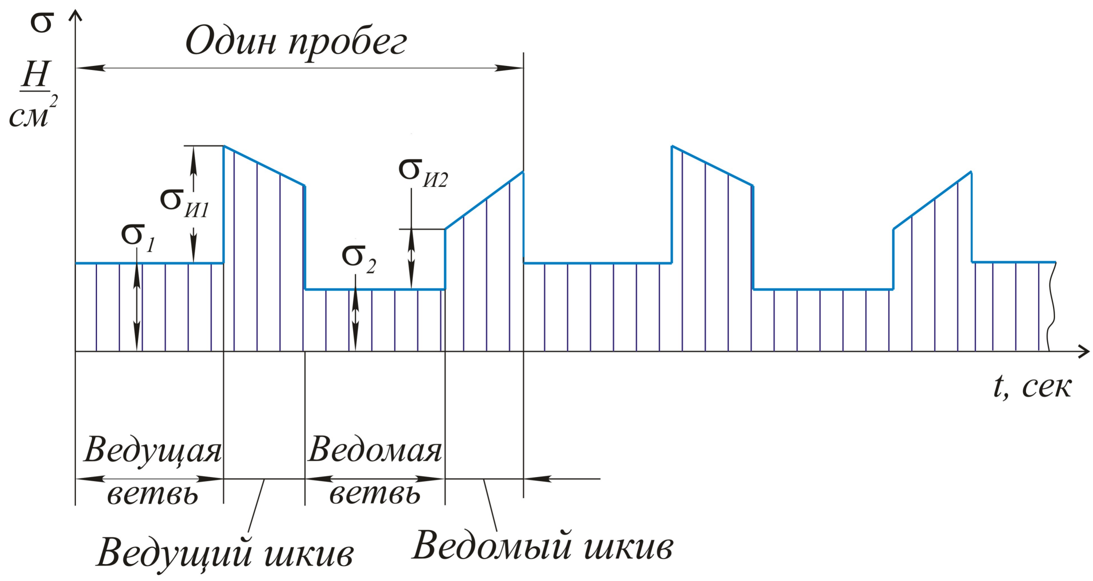


Рис. 4.35. Распределение механических напряжений в ременной передаче

Наибольшее напряжение соответствует точке A (точка набегания ремня на ведущий шкив диаметром D_1):

$$\sigma_{max}=\sigma_0+\frac{\sigma_F}{2}+\sigma_V+\sigma_{И1}, \tag{4.85}$$

или

$$\sigma_{max}=\frac{F_0}{A}+\frac{F_t}{2A}+\frac{\gamma\cdot V^2}{g}+E\cdot\frac{\delta}{D_1}. \tag{4.86}$$

4.26. ПОТЕРИ В ПЕРЕДАЧЕ

В ременной передаче имеют место следующие потери:

1) от скольжения ремня на шкивах;
2) от упругого гистерезиса (внутреннего трения между частицами ремня);
3) от трения в опорах шкивов и роликов.

Общие потери мощности составляют:

$$П=П_С+П_{ГР}+П_{ГИ}+П_П, \tag{4.87}$$

где $П_С$ - потери от скольжения ремня;
$П_{ГР}$ - потери от гистерезиса при растяжении ремня;
$П_Г$ - потери от гистерезиса при изгибе ремня;
$П_П$ - потери в подшипниках.

Потери мощности приводят к образованию тепла, за счет которого прежде всего нагревается ремень.

Материалы ремней - естественные или искусственные волокна, резина и различные пропиточные составы, весьма чувствительны к нагреванию.

С повышением температуры прочность и долговечность ремней резко снижаются. Поэтому величина потерь может служить одним из показателей работоспособности передачи.

Механический КПД ременной передачи определяется

$$\eta=\frac{P_1-П}{P_1}=1-\frac{П}{P_1}. \tag{4.88}$$

Среднее значение КПД для ременных передач:

- с плоским ремнем - $\eta=0{,}95\ldots0{,}98$;
- с клиновым ремнем - $\eta=0{,}96$.

4.27. РАСЧЕТ ПЛОСКОРЕМЕННЫХ ПЕРЕДАЧ ПО ТЯГОВОЙ СПОСОБНОСТИ

Расчет основан на кривых скольжения (рис. 4.36), которые строят на основе экспериментов в координатах φ_T (коэффициент тяги) и ε (коэффициент скольжения).

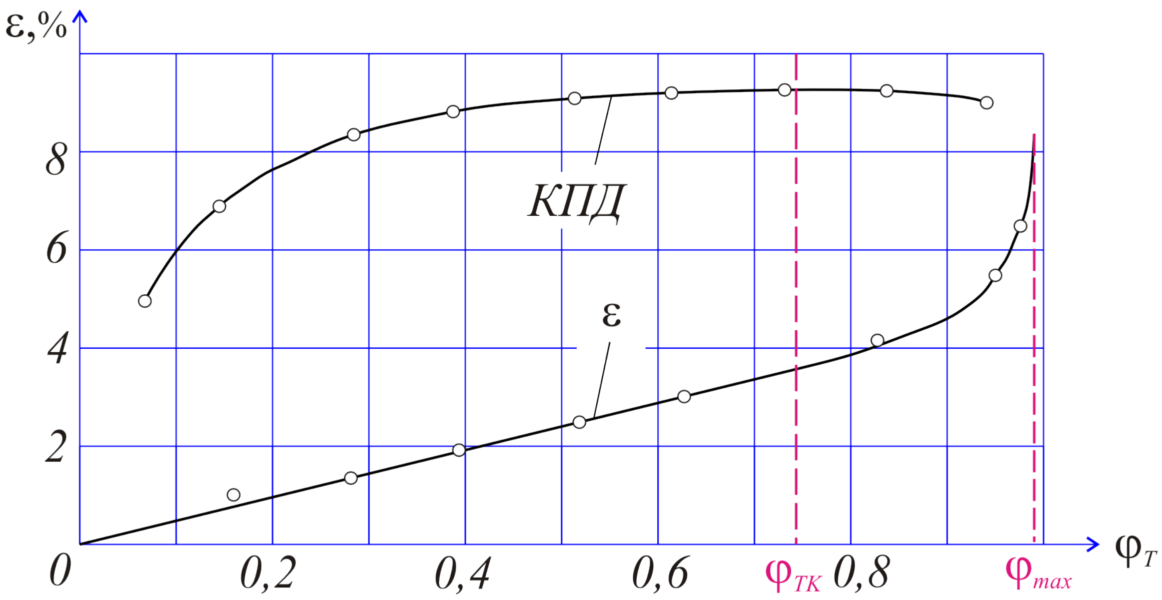


Рис. 4.36. К расчёту плоскоременных передач

Коэффициент тяги

$$\varphi_T = \frac{F_t}{2F_0} = \frac{\sigma_F}{2\sigma_0}. \qquad (4.89)$$

Коэффициент φ_T характеризует уровень нагрузки передачи. На кривой φ_{TK} ·- критическое значение коэффициента тяги, в случае превышения которого нарушается пропорциональность между упругой деформацией ремня и скольжением ремня. Переход за критическое значение коэффициента тяги недопустим, так как работа передачи в этом случае сопровождается повышенным износом ремня и потерей скорости.

По экспериментальным данным, средние критические значения

- коэффициента тяги составляют:
- для прорезиненных ремней $\sim 0{,}6$,
- для хлопчатобумажных $\sim 0{,}5$,
- для синтетических $0{,}45 \ldots 0{,}5$.

Расчет плоского ремня на тяговую способность производится по напряжению

$$\sigma_F = \frac{F_t}{в \cdot \delta}. \qquad (4.90)$$

Используют условие работоспособности передачи в форме:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{A} \leqslant [\sigma_F], \tag{4.91}$$

где $[\sigma_F]$ - допустимое полезное напряжение.

Допустимое полезное напряжение находят следующим образом:

$$[\sigma_F] = [\sigma_{F_0}] \cdot C_V \cdot C_\alpha \cdot C_P, \tag{4.92}$$

где C_V - скоростной коэффициент;

C_α - коэффициент, учитывающий влияние угла обхвата меньшего шкива;

C_P - коэффициент нагрузки и режима работы;

$[\sigma_{F_0}]$ - приведенное полезное напряжение.

$$[\sigma_{F_0}] = 2\sigma_0 \cdot \varphi_{TK}, \tag{4.93}$$

где σ_0 - начальное напряжение (для плоских ремней $\sigma_0 = 1{,}8\, МПа$).

Определив значение $[\sigma_{F_0}]$, по формуле (4.91) находим ширину плоского ремня:

$$в = \frac{F_t}{\delta \cdot [\sigma_F]}. \tag{4.94}$$

Значение *в* округляют до ближайшего стандартного.

4.28. РАСЧЕТ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

За время одного полного цикла (одного пробега ремня) напряжения изменяются пропорционально числу шкивов и роликов в передаче (см. рис. 4.35).

По результатам испытаний ремней на долговечность строят кривую усталости в координатах $\sigma - N$ (σ - напряжение, N - число циклов нагружения) (рис. 4.37), уравнение которой имеет вид:

$$\sigma^m \cdot N = const. \tag{4.95}$$

На рис. 4.37 обозначены следующие величины:

σ_y - временный предел выносливости, $МПа$;

N_0 - базовое число циклов нагружения $(N_0 = 10^7)$.

На основе кривой усталости можно записать уравнение долговечности:

$$\sigma_{max}^m \cdot (3600 \cdot x \cdot u \cdot t)\, \sigma_y^m \cdot N_0, \tag{4.96}$$

где σ_{max} - наибольшее напряжение в ремне;

x - число шкивов в передаче;

$u = \dfrac{V}{L}$ - число пробегов ремня в секунду;

L - длина ремня, $м$;

V - скорость ремня, $м/с$.

Тогда долговечность ремня, *час,*

$$t = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{max}}\right)^m \cdot \frac{N_0}{3600 \cdot x \cdot u} \ . \tag{4.97}$$

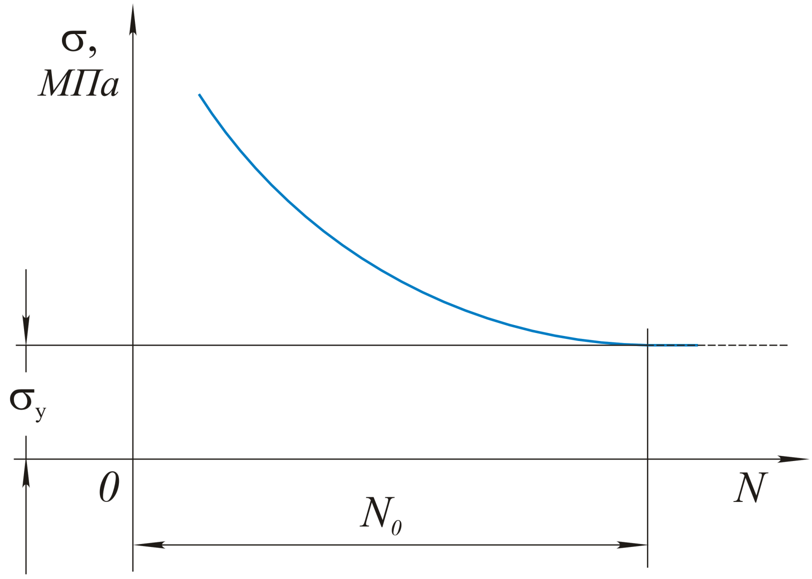


Рис. 4.37. Кривая усталости (Кривая Вёлера)

4.29. РАСЧЕТ КЛИНОРЕМЕННЫХ ПЕРЕДАЧ

В этих передачах ремень имеет трапецеидальную (клиновую) форму поперечного сечения и располагается в соответствующих канавках шкива.

Применение клинового ремня позволяет увеличить тяговую способность передачи за счет повышения трения. Величина коэффициента трения клинового ремня определяется зависимостью

$$f^/ = \frac{f}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} \ . \tag{4.98}$$

Для стандартных ремней, во избежание самозаклинивания в канавке, угол клина φ принят равным 40°; при этом $f^/ = \dfrac{f}{\sin 20^\circ} \approx 3f$.

Таким образом, клиновая форма ремня увеличивает его сцепление со шкивом примерно в три раза. Размеры поперечного сечения клинового ремня обозначаются буквами *0, А, Б, В, Г, Д, Е* (по мере увеличения площади) и регламентированы по ГОСТ 1284-80. Ограниченное число типоразмеров стандартных клиновых ремней позволило определить допускаемую нагрузку для каждого типоразмера ремня, а расчет передачи свести к подбору типа и числа ремней по таблицам или графикам. По ГОСТ 1284.3-80 сечение ремней следует выбирать по номограмме (рис. 4.38).

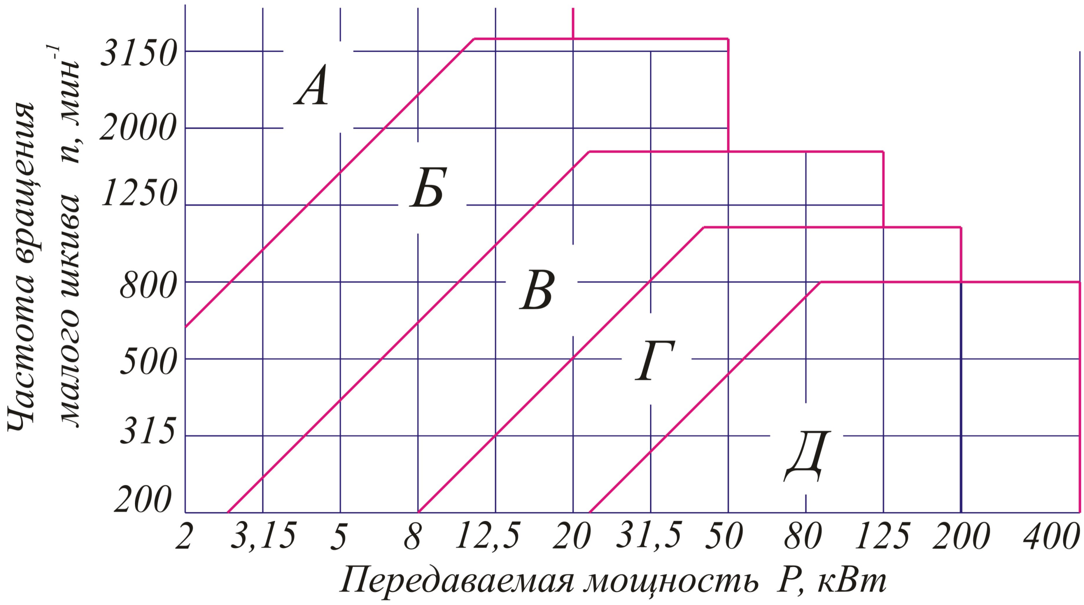


Рис. 4.38. Номограмма для подбора типа профиля клиновых ремней по мощности

Расчет клиновых ремней по тяговой способности рекомендуется производить по допускаемой мощности P_0 на один ремень (рис. 4.39).

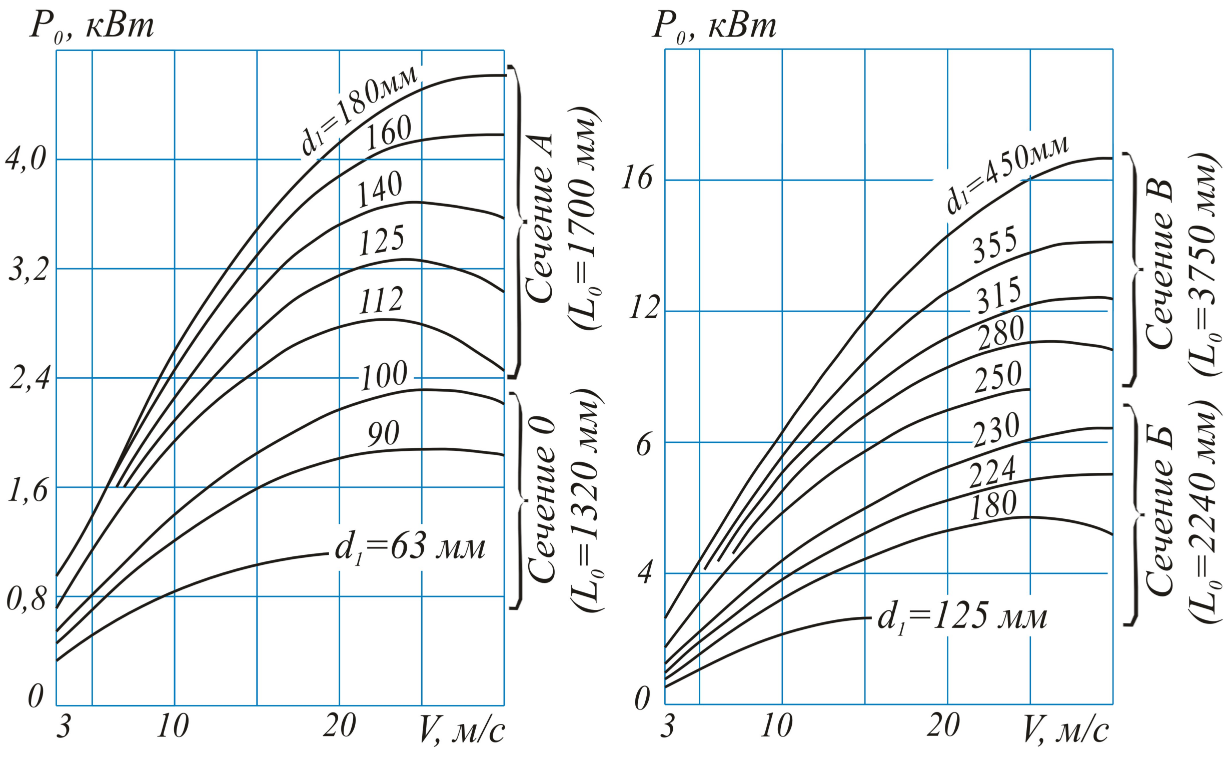


Рис. 4.39. Номограмма для подбора числа клиновых ремней

Для учета действительных условий работы передачи в расчетную формулу для клиновых ремней вводят соответствующие корректирующие коэффициенты:

K_0 - коэффициент динамической нагрузки и режима работы передачи;

K_α - коэффициент, учитывающий влияние угла обхвата ремнем меньшего шкива;

K_1 - коэффициент, учитывающий длину ремня;

K_z - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по ремням; значения K_z в зависимости от числа ремней z:

$z\ldots$	2…4	4…5	6
$K_z\ldots$	0,95	0,9	0,85

Расчет клиновых ремней по тяговой способности заключается в определении требуемого для рассматриваемой передачи количества ремней:

$$z=\frac{K_\partial \cdot P_1}{P_0 \cdot K_\alpha \cdot K_1 \cdot K_z}. \tag{4.99}$$

Расчет ремней на долговечность обычно ограничивают проверкой частоты пробегов ремня на шкивах.

$$U=\frac{V}{L}\leqslant[U], \tag{4.100}$$

где $[U]$ - допустимая частота пробегов, c^{-1} (для клиновых ремней $[U]\leqslant 10\,c^{-1}$).

4.30. НАГРУЗКИ НА ВАЛЫ

Силы натяжения ветвей ремня нагружают валы и подшипники (рис. 4.40).

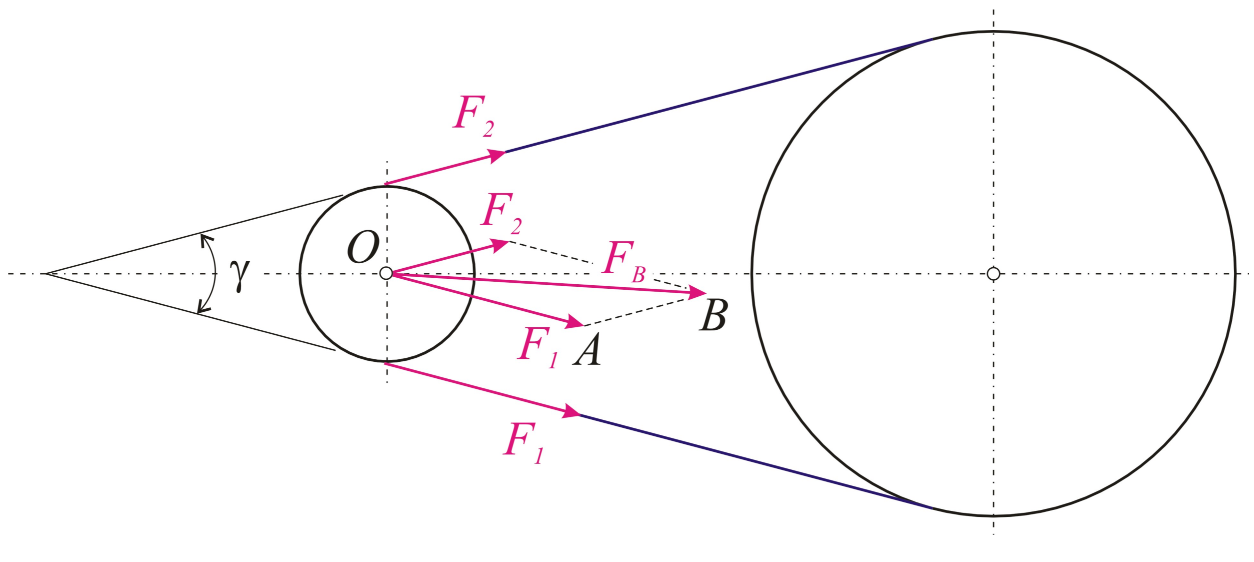


Рис. 4.40. К расчёту нагрузки на вал

Равнодействующую нагрузку F_B на вал определяют по треугольнику OAB:

$$F_B=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_l\cdot F_2\cdot\cos\gamma}=2F_0\cdot\cos\frac{\gamma}{2}, \tag{4.101}$$

где γ - угол между ветвями ремня.

Если ветви ремня параллельны (передаточное число близко или равно единице), силу F_B находят следующим образом:

$$F_B=2F_0=2\sigma_0\cdot A, \tag{4.102}$$

где σ_0 - начальное напряжение, $МПа$;
A - площадь сечения ремня, $мм^2$. Угол γ и угол обхвата α (меньшего шкива) связаны зависимостью:

$$\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}, \tag{4.103}$$

Тогда выражение (4.101) примет вид:

$$F_B=2F_0\cdot\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{4.104}$$

или

$$F_B=2\sigma_0\cdot A\cdot\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{4.105}$$

С учётом числа клиновых ремней окончательно:

$$F_B=2\sigma_0\cdot A\cdot z\cdot\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{4.106}$$

4.31. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Зубчатые передачи представляют собой трехзвенный механизм, в котором два подвижных звена являются зубчатыми колёсами, образующими с неподвижным звеном вращательную пару.

Зубчатая передача служит для передачи вращательного движения. Зубчатые передачи - наиболее распространённый тип передач в современном машиностроении и приборостроении; их применяют в широком диапазоне скоростей, мощностей и передаточных чисел.

Основные достоинства зубчатых передач по сравнению с другими видами передач:

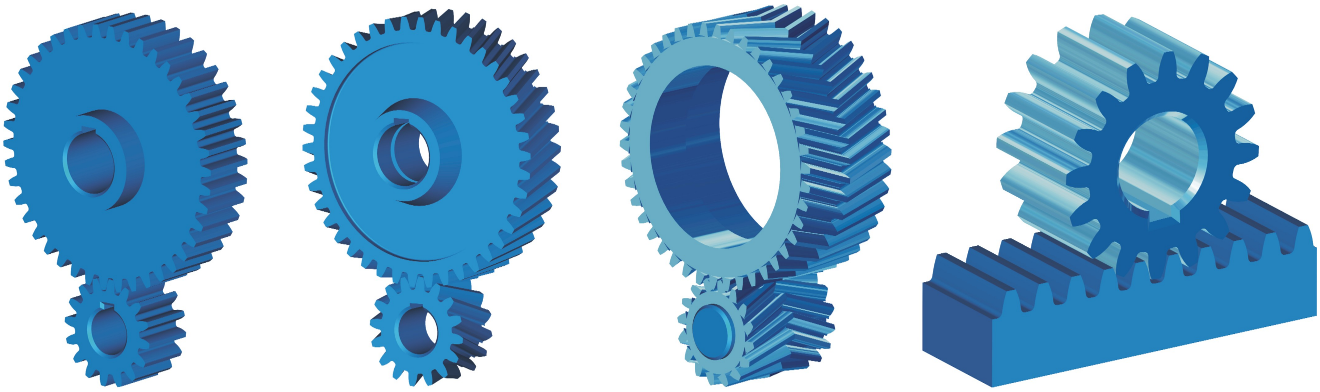
1. постоянство передаточного числа;
2. высокая нагрузочная способность;
3. высокий КПД (0,97...0,99);
4. малые габаритные размеры по сравнению с другими видами передач при равных мощностях;
5. большая долговечность и надёжность в работе;
6. простота обслуживания.

К недостаткам зубчатых передач следует отнести:

1. высокие требования к точности изготовления и монтажа;
2. шум при больших скоростях;
3. громоздкость при больших расстояниях между осями колёс;
4. потребность в специальном оборудовании и инструменте для нарезания колес.

По взаимному расположению осей колёс простейшими являются цилиндрические колёса с параллельными осями; по расположению зубьев на колесе различают *прямозубые* и *косозубые* колёса.

Наиболее распространённой формой профиля зуба являются *эвольвентные* зубья (рис. 4.41).



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 4.41. Разновидности колес с эвольвентным зубом:
а,г) прямозубые; *б)* косозубые; *в)* шевронные

4.32. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ

Зубчатое зацепление характеризуется следующими основными параметрами:

d_a - диаметр вершин зубьев;
d_f - диаметр впадин зубьев;
d - делительный диаметр;
p_t - окружной шаг;
p_n - нормальный шаг (для прямозубых колёс $p_t = p_n$);
h - высота зуба;

h_a - высота головки зуба;
h_f - высота ножки зуба;
S - толщина зуба и ширина впадин;
b - ширина венца;
a_W - межосевое расстояние;
z - число зубьев;
m_t - окружной модуль $\left(m_t = \dfrac{p_t}{\pi}\right)$;
m_n - нормальный модуль $\left(m_n = \dfrac{p_n}{\pi}\right)$;
m_n согласовывается с ГОСТ 9563-80;
α_W - угол зацепления $(\alpha_W = 20^\circ)$, (рис. 4.42).

Для цилиндрических прямозубых колёс

$$d = m_n \cdot z. \tag{4.107}$$

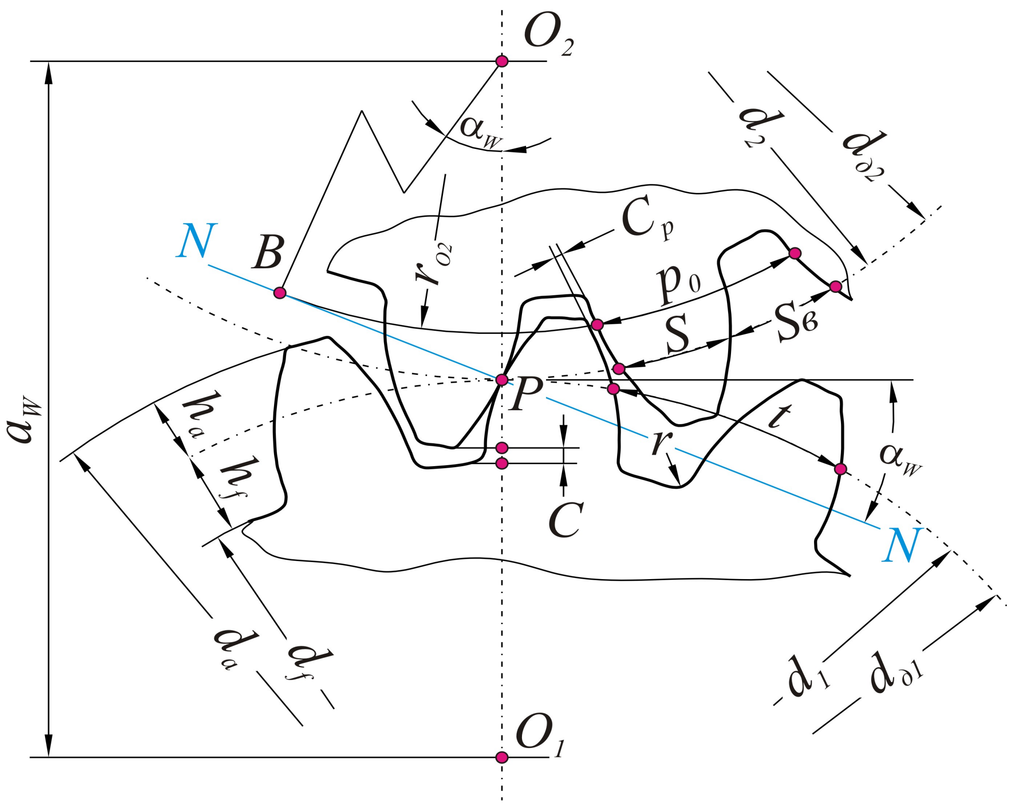


Рис. 4.42. Основные геометрические параметры эвольвентного зацепления

4.33. ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ ЗУБЬЕВ

При эксплуатации зубчатых передач наблюдаются следующие виды разрушения зубьев: поломка зубьев, выкрашивание рабочих поверхностей зубьев, износ зубьев, заедание зубьев.

Поломка зубьев наблюдается у основания зуба вследствие периодического действия переменных изгибных напряжений, рис. 4.43, *а*.

Выкрашивание рабочих поверхностей зубьев наблюдается в закрытых передачах, работающих при обильной смазке. Выкрашивание возникает на ножках зубьев вблизи полюсной линии, см. рис. 4.43, *б*.

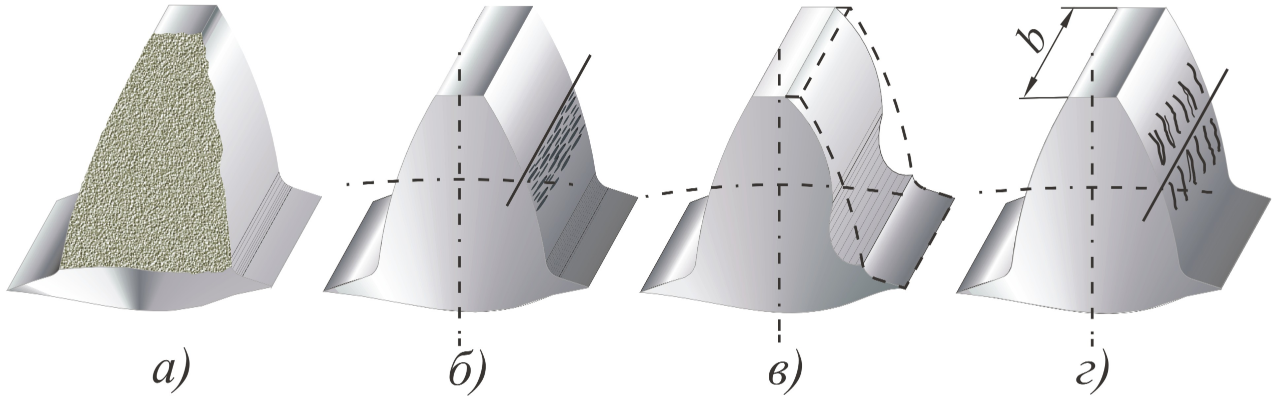


Рис. 4.43. Виды разрушения зубьев

Износ зубьев чаще всего наблюдается в открытых передачах, в которых не предусмотрен закрытый корпус.

Износ зубьев заключается в истирании рабочих поверхностей вследствие попадания в зону зацепления металлических частиц, пыли, грязи (абразивный износ), см. рис. 4.43, *в*.

Заедание наблюдается в тихоходных, тяжело нагруженных передачах. Этот вид повреждения заключается в том, что под действием высоких давлений в зоне нарушенной масляной плёнки сопряжённые поверхности зубьев сцепляются одна с другой.

Частицы поверхности одного зуба отрываются и прихватываются к поверхности зуба парного колеса; при последующем относительном движении зубьев эти частицы отрываются и делают на поверхности борозды, задиры, см. рис. 4.43, *г*.

Для исключения повреждения зубьев, в первую очередь, выкрашивания и поломки расчётным путём проверяют выносливость рабочих поверхностей зубьев (контактная и изгибная прочность зубьев).

4.34. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ПРЯМОЗУБОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ

На рис. 4.44 показана схема зацепления двух эвольвентных зубьев в полюсе и силы, действующие со стороны зуба ведущего колеса (шестерни) на зуб ведомого колеса: F_n - нормальная сила; F_t - окружная сила; F_r - радиальная сила.

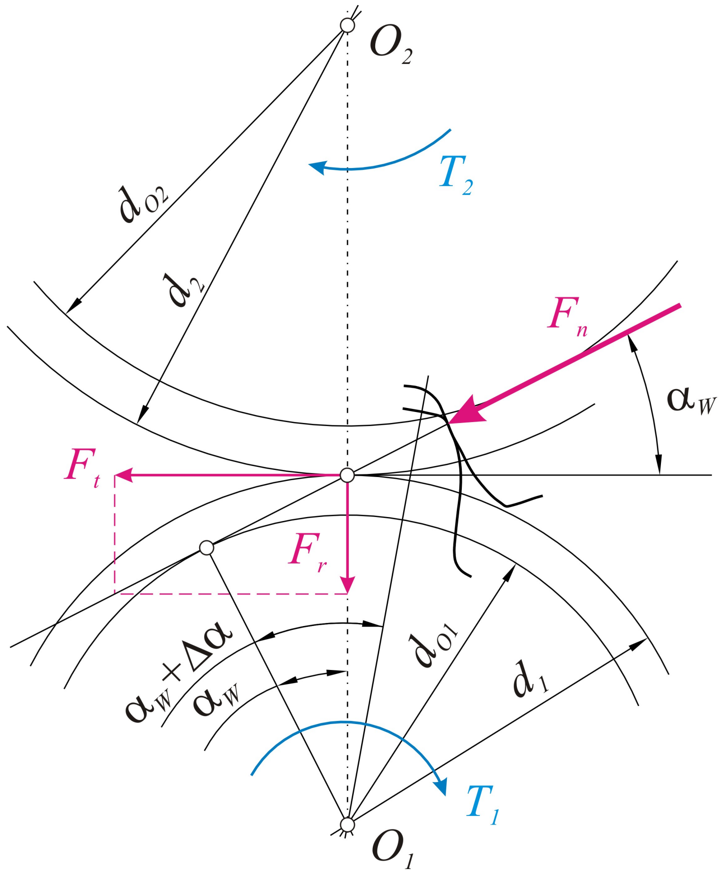


Рис. 4.44. Схема зацепления эвольвентных колёс

Их можно определить по формулам:

$$F_t=\frac{2T_1}{d_1}=\frac{2T_2}{d_2}; \tag{4.108}$$

$$F_r=F_t\cdot tg\,\alpha_W; \tag{4.109}$$

$$F_n=\frac{F_t}{\cos\alpha_W}=\frac{2T_2}{d_2\cdot\cos\alpha_W}. \tag{4.110}$$

4.35. РАСЧЁТ ЗУБЬЕВ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Условие контактной прочности зубьев имеет следующий вид:

$$\sigma_H=\sqrt{\frac{q\cdot E}{2\pi\left(1-\mu^2\right)\rho}}\leqslant\left[\sigma_H\right], \tag{4.111}$$

где σ_H - расчётное контактное напряжение, $H/мм^2$;
q - удельная контактная нагрузка, $H/мм$;
E - модуль упругости материала зубьев, $H/мм^2$; (для стальных колёс $E=2{,}15\cdot10^5\,H/мм^2$);

μ - коэффициент Пуассона (для стали $\mu = 0{,}3$);
ρ - приведённый радиус кривизны зубьев, *мм*; определяемый по формуле:

$$\rho = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \qquad (4.112)$$

$[\sigma_H]$ - допускаемое контактное напряжение (для стальных колёс при $HB \leqslant 350$ $[\sigma_H] \approx 2\,HB + 70$, $Н/мм^2$).

Удельная контактная нагрузка определяется следующим образом:

$$q = \frac{F_n \cdot K_H}{b \cdot K_\varepsilon} = \frac{2\,T_2 \cdot K_H}{d_2 \cdot b \cdot K_\varepsilon \cdot \cos\alpha_W}, \qquad (4.113)$$

где K_H - коэффициент нагрузки;
K_ε - коэффициент степени перекрытия зубьев.
Коэффициенты K_H и K_ε принимаются по справочнику.

На основании условия контактной прочности (4.111) можно получить формулу проектного расчёта закрытых цилиндрических прямозубых стальных передач

$$a_W = (u+1)\sqrt[3]{\left(\frac{310}{[\sigma_H]\cdot u}\right)^2 \cdot \frac{T_2 \cdot K_H}{\psi_{ba}}}, \qquad (4.114)$$

где ψ_{ba} - коэффициент ширины колёс (для прямозубых колёс $\psi_{ba} = \frac{b}{a_W}$; $\psi_{ba} = 0{,}125 \ldots 0{,}25$). Определив межосевое расстояние, находят модуль зацепления по ГОСТ 9563-80:

$$m_n = (0{,}01 \ldots 0{,}02)\,a_W \qquad (4.115)$$

и числа зубьев колёс z_1, z_2.

Затем определяют геометрические размеры передачи, необходимые для нарезания зубьев и изготовления зубчатых колёс.

4.36. РАСЧЁТ ЗУБЬЕВ НА ИЗГИБНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Зуб рассматривают как консольную балку, нагруженную сосредоточенной силой F_n, приложенную к зубу в его вершине под углом α (см. схему на рис. 4.45).

Эта сила, действующая под углом α к оси зуба, вызывает в его сечениях напряжения изгиба и сжатия. Силу F_n переносят по линии зацепления до оси зуба, и полученную точку O принимают за вершину параболы, которая определяет контур балки равного сопротивления изгибу.

Точки A и B касания ветвей параболы и профиля зуба определяют положение опасного сечения зуба.

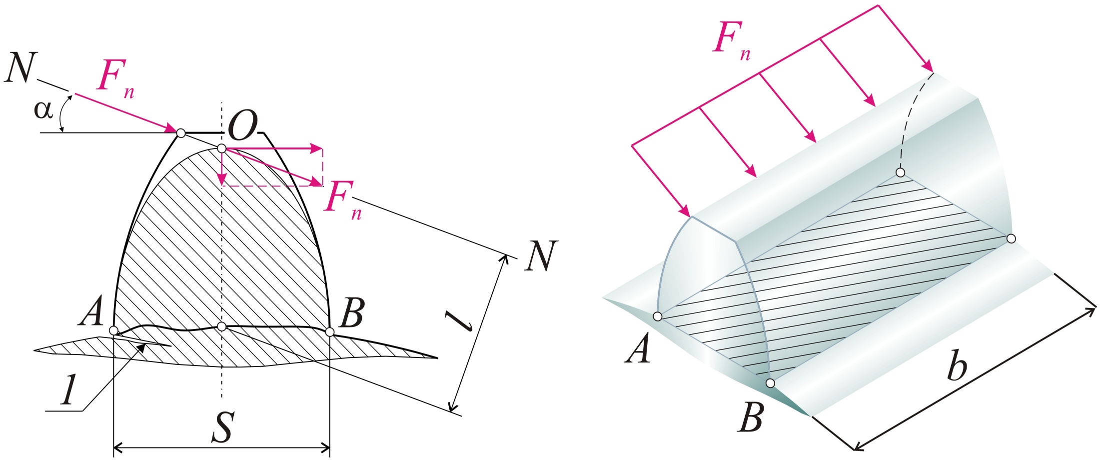


Рис. 4.45. Схема расчёта на изгиб (*1* – усталостная трещина)

Условие изгибной прочности зубьев имеет следующий вид:

$$\sigma_F = \frac{F_t \cdot K_F \cdot Y_F}{b \cdot m_n} \leqslant [\sigma_F], \qquad (4.116)$$

где σ_F - расчётное напряжение в опасном сечении зуба, $Н/мм^2$;
K_F - коэффициент нагрузки (принимается по справочникам);
Y_F - коэффициент формы зуба $(Y_F = f(z))$;
$[\sigma_F]$ - допускаемое изгибное напряжение, определяемое по формуле:

$$[\sigma_F] \approx (1{,}4 \ldots 1{,}6)\sigma_{-1}, \qquad (4.117)$$

где σ_{-1} - предел выносливости материала зубчатого колеса, $Н/мм^2$.

4.37. РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Резьбовыми называют такие соединения, которые осуществляются крепежными деталями посредством резьбы. Резьба получается образованием на цилиндрическом или коническом стержне канавок с поперечным сечением определённого профиля (в виде треугольника, трапеции и т.д.).

Резьбовые соединения являются наиболее распространенными разъёмными соединениями. Они надёжны и удобны по форме для сборки и разборки, имеют небольшие габариты, просты в изготовлении.

Недостаток резьбовых соединений состоит в наличии концентраторов напряжений в резьбовых деталях, понижающих их прочность.

Основными крепёжными деталями резьбовых соединений являются болты, винты, шпильки и гайки (рис. 4.46).

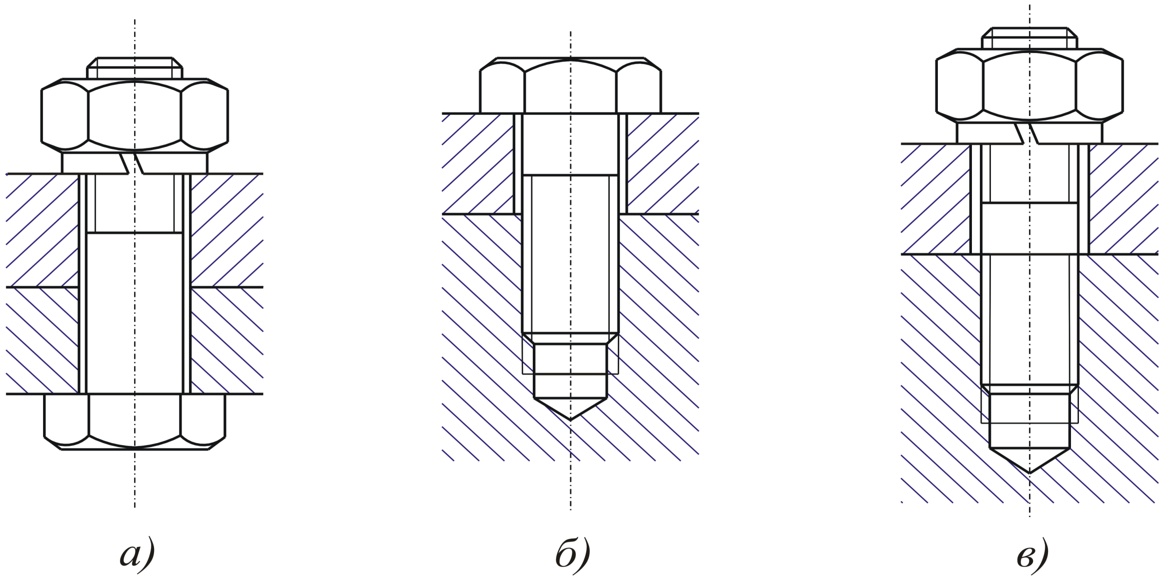


Рис. 4.46. Крепёжные детали в соединениях: *а)* болтовом; *б)* винтовом; *в)* при помощи шпильки

4.38. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РЕЗЬБ

В зависимости от формы поверхности, на которой образуется резьба, различают *цилиндрические* и *конические* резьбы (рис. 4.47). В зависимости от формы профиля резьбы делятся на пять основных типов: *треугольные*, *упорные*, *трапецеидальные, прямоугольные* и *круглые* (рис.4.48).

В зависимости от направления винтовой линии различают *правые* и *левые* резьбы. В зависимости от числа заходов резьбы делятся на *однозаходные* и *многозаходные*. В зависимости от назначения резьбы делятся на *крепёжные* и для передачи движения (*ходовые*).

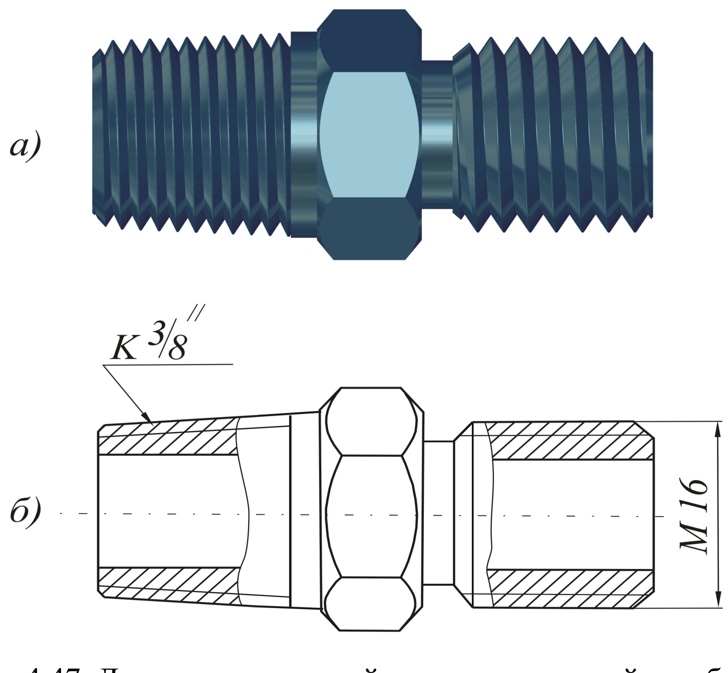


Рис. 4.47. Деталь с конической и цилиндрической резьбой: *а*) в натуральном виде; *б*) на эскизе

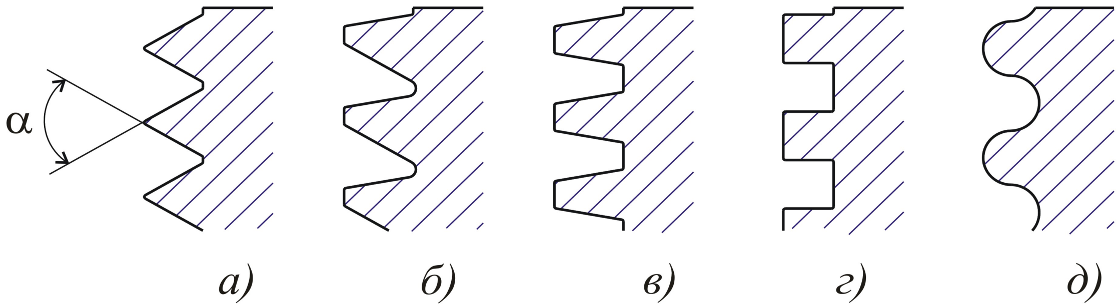


Рис. 4.48. Профили резьб: *а)* треугольный; *б)* упорный; *в)* трапецеидальный; *г)* прямоугольный; *д)* круглый

Основными типами резьб являются:

1) метрическая резьба с профилем в виде равностороннего треугольника с углом профиля $\alpha = 60^\circ$;

2) дюймовая резьба, профилем в виде равнобедренного треугольника и углом профиля $\alpha = 55^\circ$;

3) трапецеидальная резьба, с профилем в виде равнобочной трапеции и углом профиля $\alpha = 30^\circ$;

4) прямоугольная резьба, с профилем в виде квадрата и углом профиля $\alpha = 0^\circ$;

5) трубная резьба, являющаяся мелкой дюймовой резьбой, но с закруглёнными выступами и впадинами.

Отсутствие радиальных зазоров в трубной резьбе делает такое резьбовое соединение герметичным.

Резьбы, получившие широкое распространение, стандартизированы. Размеры стандартной резьбы (рис. 4.49) принимают по соответствующему ГОСТу, в зависимости от наружнего диаметра d резьбы.

Параметры, определяющие форму и профиль резьбы (см. рис. 4.49):

1) высота теоретического профиля H;

2) рабочая высота профиля h;

3) угол профиля α;

4) наружный диаметр резьбы $d\,(D)$;

5) внутренний диаметр резьбы $d_1(D_1)$;

6) средний диаметр резьбы $d_2(D_2)$;

7) угол подъёма резьбы ψ;

8) шаг резьбы p;

9) ход резьбы S.

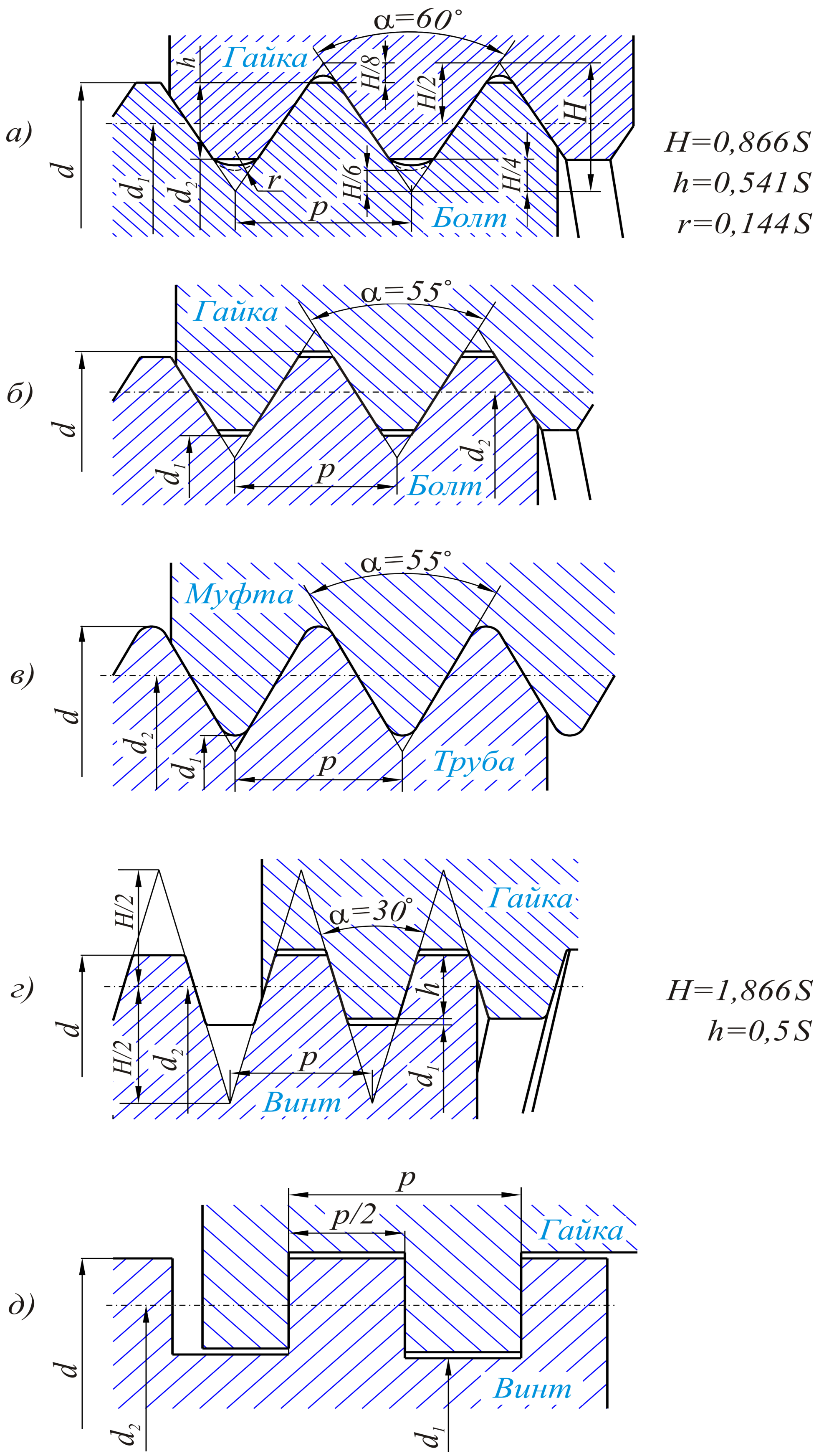


Рис. 4.49. Виды резьб: *а)* метрическая; *б)* дюймовая; *в)* трубная; *г)* трапецеидальная; *д)* прямоугольная

4.39. РАСЧЁТ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ПРОЧНОСТЬ

Основным критерием работоспособности и расчёта крепёжных резьбовых деталей является прочность.

Опыт показывает, что разрушение резьбовых соединений происходит, как правило, из-за среза витков резьбы, а также из-за разрушения болтов и шпилек по резьбовой части. Из расчёта резьбового стержня на прочность определяют номинальный диаметр резьбы. Остальные размеры болта, а также гайки и шайбы принимают в зависимости от диаметра резьбы по соответствующим ГОСТам.

Основные случаи расчёта резьбовых соединений:

1) болт нагружен осевой силой;
2) резьбовый стержень нагружен осевой растягивающей (или сжимающей) силой Q и крутящим моментом M_K;
3) резьбовое соединение нагружено поперечной силой R;
4) резьбовое соединение предварительно затянуто при сборке и нагружено внешней растягивающей силой;
5) резьбовое соединение предварительно затянуто при сборке и нагружено внецентренной растягивающей силой F.

В групповом соединении определяют нагрузку на максимально нагруженный болт, рассчитывают последний как одиночный и все болты в соединении берут одинаковыми.

Рассмотрим первый случай нагружения. На рис. 4.50 изображено болтовое соединение грузовой скобы. Расчёт сводится к определению внутреннего диаметра резьбы d_1 из условия прочности на растяжение

$$\sigma_p = \frac{4F}{\pi \cdot d_1^2} \leqslant [\sigma_p], \tag{4.118}$$

откуда

$$d_1 \geqslant \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot [\sigma_p]}}, \tag{4.119}$$

где $[\sigma_p]$ - допускаемое напряжение на растяжение для материала болта.

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T}{[S]}, \tag{4.120}$$

здесь σ_T - предел текучести материала болта; $[S]$ - допускаемый коэффициент запаса прочности, принимаемый по таблицам.

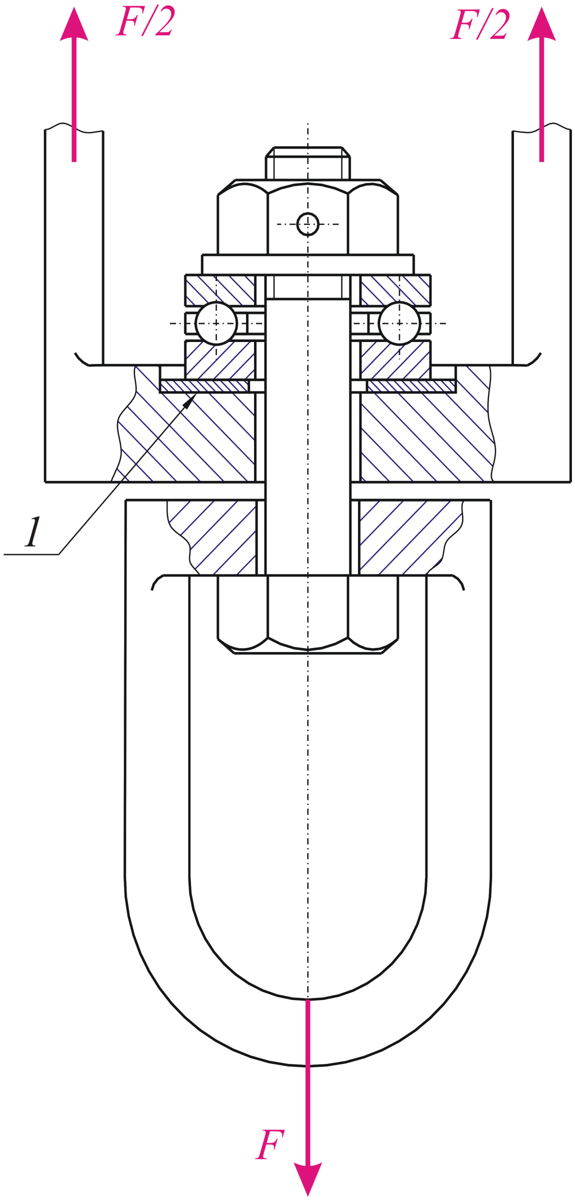


Рис. 4.50. Болтовое соединение грузовой скобы

Для болтов из углеродистой стали принимают $[S]=1{,}5\ldots3{,}0$.

Рассмотрим второй случай загружения. Примером этого случая нагружения является резьбовое соединение винтовой стяжки (рис. 4.51).

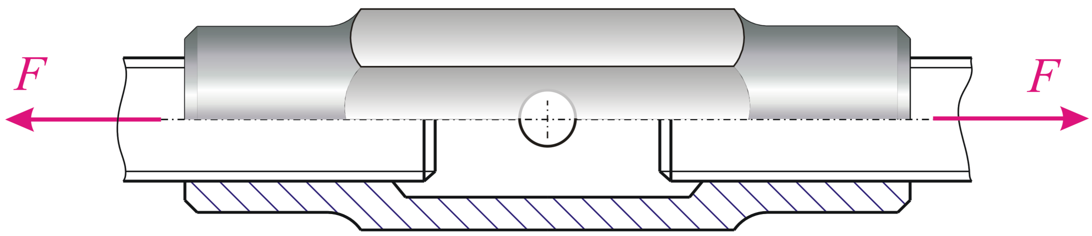


Рис. 4.51. Винтовая стяжка

В период подтягивания под нагрузкой стержень испытывает растяжение и кручение. Напряжение растяжения от силы F

$$\sigma_p=\frac{4F}{\pi d_1^2}. \qquad (4.121)$$

Напряжение кручения от момента трения в резьбе

$$\tau_K=\frac{M_p}{W_p}=\frac{F\cdot 0{,}5\, d_2 tg\,(\psi+\rho^/)}{0{,}2\, d_1^3}. \qquad (4.122)$$

Отношение напряжений

$$\frac{\tau_p}{\sigma_p}=\frac{F\cdot 0{,}5\, d_2\cdot tg\,(\psi+\rho^/)}{0{,}2\, d_1^3\cdot 4F}=2\cdot\frac{d_2}{d_1}tg\left(\psi+\rho^/\right). \qquad (4.123)$$

Для метрической резьбы $d_2\approx 1{,}1\, d_1$, $\psi=2^\circ 30^/$ и $\rho^/=9^\circ 45^/$, получим $\frac{\tau_p}{\sigma_p}\approx 0{,}5$. Эквивалентное напряжение для стержня по гипотезе энергии формоизменения (четвёртой теории прочности):

$$\sigma_{экв}=\sqrt{\sigma_p^2+3\tau_k^2}=\sqrt{\sigma_p^2+3(0{,}5\sigma_p)^2}\approx 1{,}3\,\sigma_p. \qquad (4.124)$$

Из формулы (4.124) следует, что расчёт стержня на совместное действие растяжения и кручения можно заменить расчётом на растяжение, принимая для расчёта увеличенную нагрузку (с учётом кручения) $F_{расч}=1{,}3\,F$.

Внутренний диаметр резьбы стержня определяется из условия прочности

$$\sigma_{экв}=\frac{4F_{расч}}{\pi d_1^2}\leqslant\left[\sigma_p\right], \qquad (4.125)$$

откуда

$$d_1\geqslant\sqrt{\frac{4F_{расч}}{\pi\cdot\left[\sigma_p\right]}}. \qquad (4.126)$$

Расчёты резьбовых соединений применительно к другим случаям нагружения приведены, в частности, в учебниках для вузов [26, 27, 28].

4.40. ШЕРОХОВАТОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ

Реальные поверхности деталей, полученные механической обработкой (строганием, точением, шлифованием и т.п.), представляют собой ряды чередующихся выступов и впадин разной высоты и формы (микронеровности).

Совокупность микронеровностей с относительно малыми шагами называется *шероховатостью поверхности*.

Причинами образования шероховатости являются: пластические деформации поверхностного слоя детали при обработке; копирование неровностей режущих кромок инструмента и трение его о деталь; адгезионные явления при обработке (вырывы с поверхности обрабатываемой детали или шаржирование инструментального материала, а также материала снятого припуска в тело детали); вибрации детали и инструмента и др.

Шероховатость поверхности является одной из основных геометрических характеристик качества поверхности. От шероховатости обрабатываемой поверхности зависят: эксплуатационные характеристики детали; износостойкость; усталостная прочность; антикоррозийность; величины зазоров и натягов в соединениях деталей; плотность и герметичность соединения и т.п. По ГОСТ 2789-73 установлено шесть параметров шероховатости, которые подразделяются на три группы: высотные, шаговые и опорные. На рис. 4.52 показана профилограмма обработанной поверхности и параметры, характеризующие шероховатость.

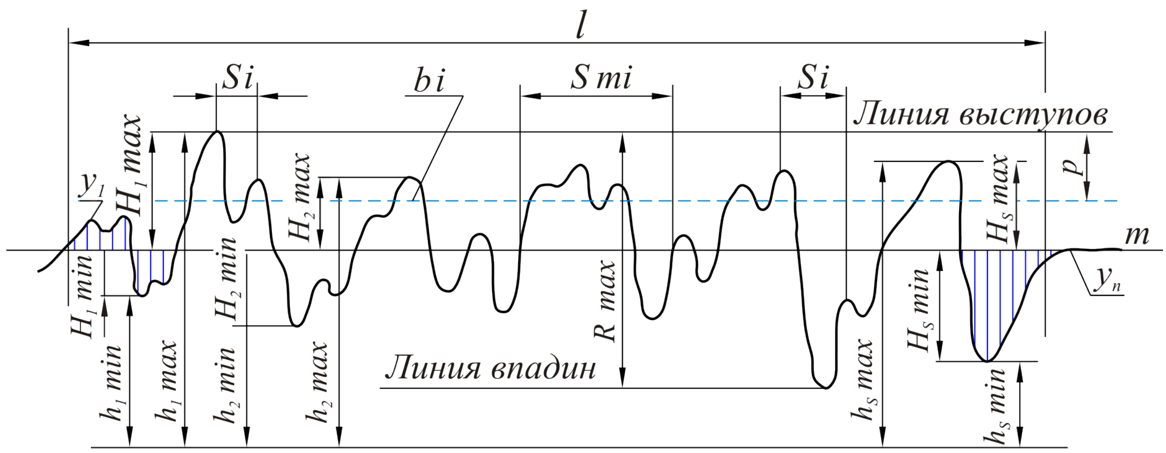


Рис. 4.52. Профилограмма поверхности детали

На рисунке:

1. Ra - среднее арифметическое отклонение профиля, определяется как среднее арифметическое абсолютных значений отклонений от средней линии профиля в пределах базовой длины l (в *мкм*).

$$R_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{4.127}$$

где $y_1, y_2, \dots y_n$ - расстояния точек действительного (измеренного) профиля до его средней линии; n - количество измеренных расстояний.

2. Rz - высота неровностей профиля по десяти точкам.

Определяется как среднее расстояние (в *мкм*) между пятью высшими и пятью низшими точками измеряемого профиля в пределах базовой длины l.

$$R_z = \frac{\sum h_{i_{max}} - \sum h_{i_{min}}}{5}. \tag{4.128}$$

3. R_{max} - наибольшая высота неровностей профиля – расстояние между линией выступов профиля и линией впадин профиля в пределах базовой длины l (в *мкм*).

4. S_m - средний шаг неровностей – среднее арифметическое значение шага неровностей профиля в пределах базовой длины, измеренное по средней линии (в *мм*).

5. S - средний шаг неровностей по вершинам – среднее арифметическое значение шага неровностей профиля по вершинам в пределах базовой длины (в *мм*).

6. t_p - относительная опорная длина профиля

$$t_p = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot 100\,\%, \tag{4.129}$$

где $\sum_{i=1}^{n} b_i$ - сумма длин отрезков b_i, отсекаемых на заданном уровне p от линии выступов профиля (рис.4.53).

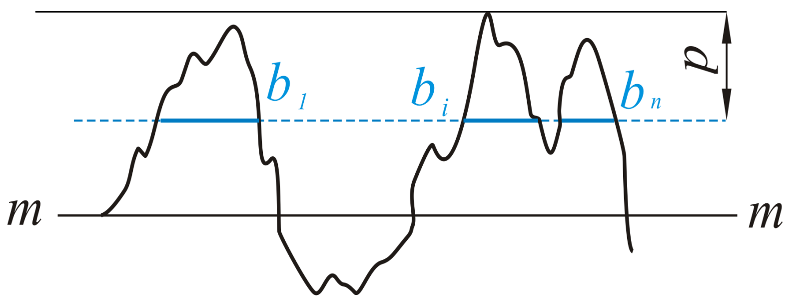


Рис. 4.53. Схема к определению опорной длины профиля

Значение уровня p - выбирают из ряда: 5; 10; 15; 20; 25; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90% от R_{max}. Шероховатость поверхности на чертежах обозначают по ГОСТ 2.309 -73. Структура обозначения шероховатости приведена на рис. 4.54.

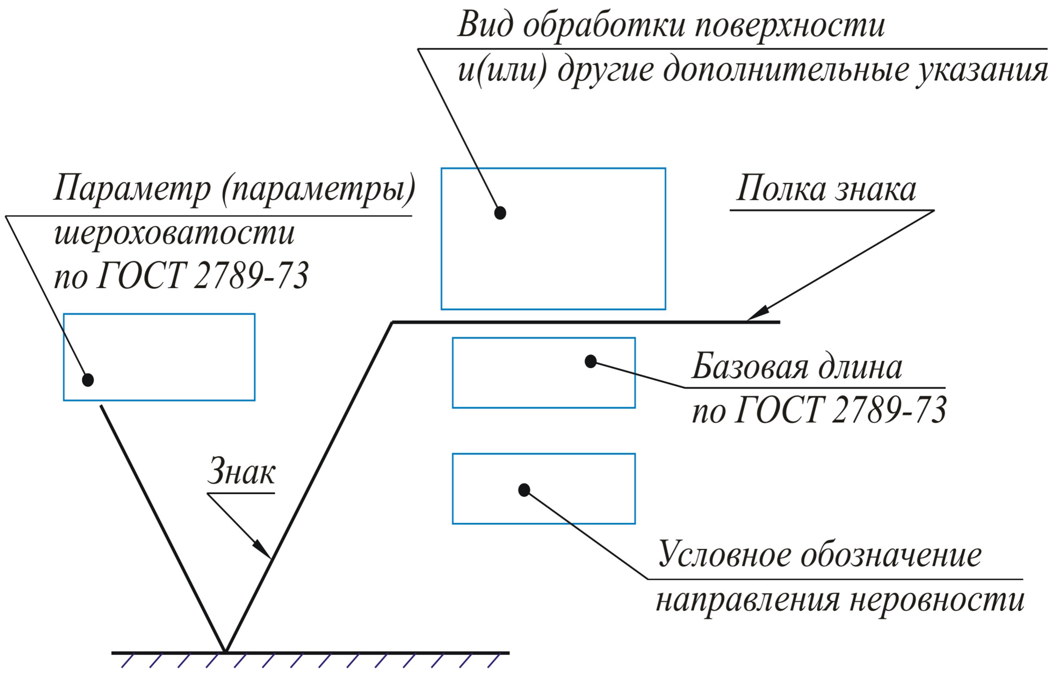


Рис. 4.54. Структура обозначения шероховатости поверхности

На чертежах шероховатость поверхностей обозначают одним из знаков, показанных на рис. 4.55.

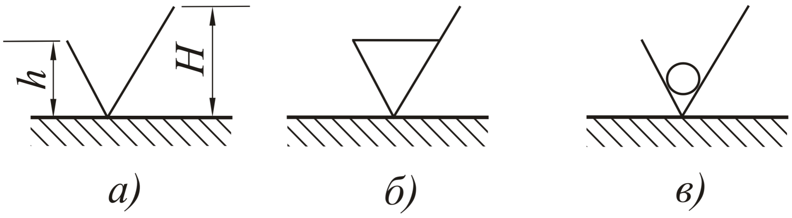


Рис. 4.55. Условные графические знаки для обозначения шероховатости поверхности

При наличии в обозначении шероховатости только значения параметра (параметров) применяют знак без полки (см. рис. 4.55, *а*). Как правило, это соответствует поверхности, вид обработки которой конструктором не устанавливается. Высота h должна быть в приблизительно равна применяемой на чертеже высоте цифр размерных чисел, а высота $H = (1{,}5 \ldots 3)\,h$. Толщина линий знаков должна быть приблизительно равна половине толщины сплошной основной линии, применяемой на чертеже.

В обозначении шероховатости поверхности, которая должна быть образована удалением слоя материала (точением, фрезерованием, сверлением, шлифованием, полированием, травлением и т.п.), применяют знак, показанный на рисунке 4.55, *б*. В обозначении шероховатости поверхности, образуемой без удаления слоя материала (литьём, ковкой, объёмной штамповкой, прокатом, волочением и т.п.), применяют знак, изображённый на рисунке 4.55, *в*. Поверхности, не обрабатываемые по данному чертежу, обозначают этим же знаком. Обозначения шероховатости поверхности на чертежах изделия располагают на линиях контура, выносных линиях (по возможности ближе к размерной линии) или на полках линий-выносок (рис. 4.56, *а*).

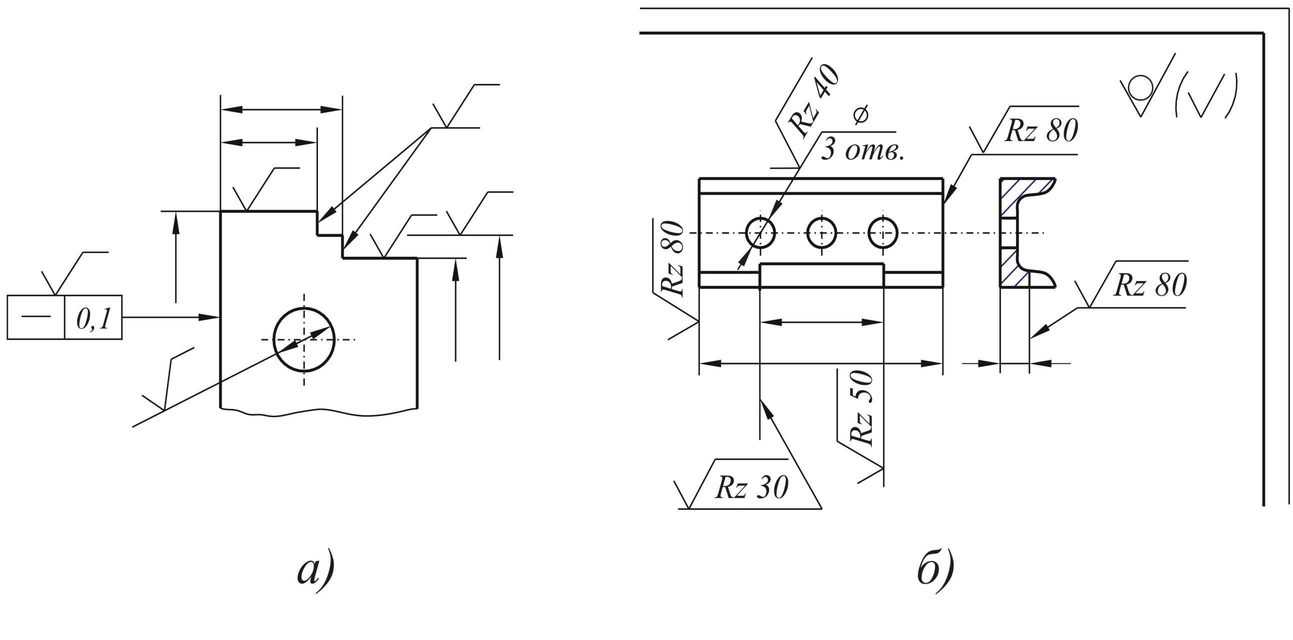


Рис. 4.56. Обозначение шероховатости на чертежах

Обозначение шероховатости поверхностей повторяющихся элементов изделия (отверстий, пазов, зубьев и т.п.), число которых указано на чертеже, а также одной и той же поверхности наносят один раз независимо от числа изображений.

К повторяющимся элементам не относят симметрично расположенные поверхности.

Значение параметра в обозначении шероховатости по ГОСТ 2789-73 указывают без символа для параметра Ra и после соответствующего символа для остальных параметров.

Если шероховатость всех поверхностей изделия одинаковая, то обозначение шероховатости помещают в правом верхнем углу чертежа и на изображение не наносят (см. рис. 4.56, *б*).

Размеры и толщина линий знака в обозначении шероховатости, вынесенные в правый верхний угол чертежа, должны быть приблизительно в 1,5 раза больше, чем в обозначениях, нанесённых на изображении.

Если часть поверхностей изделия изготавливают одинаковой шероховатости, то на этих поверхностях шероховатость не указывают, а выносят в правый верхний угол чертежа и после обозначения ставят знак в скобках.

Это значит, что шероховатость поверхностей, не указанных на изображении, имеет значение, например, $Rz\ 32$.

Размеры знака, взятого в скобки, должны быть одинаковыми с размерами знаков, нанесённых на изображении.

Если шероховатость одной и той же поверхности различна на отдельных участках, например поверхность вала, соприкасающаяся с сальником, то эти участки разграничивают сплошной тонкой линией и указывают соответствующие размеры и шероховатость.

Требования к шероховатости устанавливаются стандартами.

Согласно ГОСТ 2789-73 принято 14 классов шероховатости.

Высший класс шероховатости 14-й, самый низший – 1-й.

В таблице 4.4 приведены максимальные числовые значения параметров шероховатости для различных классов шероховатости.

При нормировании требований к шероховатости поверхности указанием двух и более параметров значения параметров записывают в следующем порядке:

1) параметр высоты неровности профиля;
2) параметр шага;
3) относительная длина профиля.

В таблице 4.5 даны значения параметров шероховатости при различных видах обработки деталей из стали.

Таблица 4.4

Параметры классов шероховатости

Класс шероховатости	Среднее арифметическое отклонение профиля Ra, *мкм*	Высота неровностей Rz, *мкм*	Базовая длина l, *мкм*
1 2 3	80 40 20	320 160 80	8,0
4 5	10 5	40 20	2,5
6 7 8	2,5 1,25 0,63	10 6,3 3,2	0,8
9 10 11 12	0,32 0,16 0,08 0,04	1,6 0,8 0,4 0,2	0,08
13 14	0,02 0,01	0,1 0,05	0,08

Таблица 4.5

Шероховатость поверхности, в *мкм*, после различных видов и методов обработки стали

Вид и метод обработки	*Ra*	*Rz*	Класс шероховатости по ГОСТ 2789-73
Обработка наружних цилиндрических поверхностей			
Отрезка резцом Подрезание торцов	80...25 12,5...3,2	320...60 50...15	1...3 3...5
Обтачивание: черновое чистовое	 40...20 10...1,25	 160...80 40...6,3	 2; 3 4...7
Вид и метод обработки	*Ra*	*Rz*	Класс шероховатости по ГОСТ 2789-73
Нарезание резьбы: плашкой резцом, фрезой	 10...5 5,0...1,25	 40...20 20...6,3	 4; 5 5...7
Шлифование: предварительное чистовое тонкое	 2,5...1,25 1,25...0,63 0,63...0,16	 10...6,3 6,3...3,2 3,2...0,8	 6; 7 7; 8 8...10
Суперфиниширование: чистовое отделочное	 0,16...0,08 0,04...0,01	 0,8...0,4 0,2...0,05	 10; 11 12...14
Притирка, доводка	0,08...0,01	0,4...0,05	11...14

Пример 4.2. Определить параметры шероховатой поверхности по условным обозначениям на чертеже (рис. 4.57).

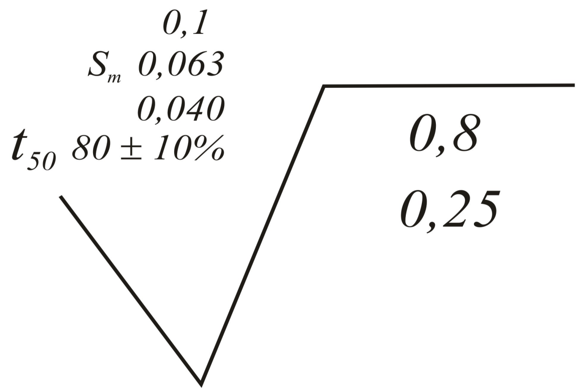


Рис. 4.57. К примеру 4.2 (увеличено)

Решение:
0,1 – среднее арифметическое отклонение профиля Ra, (в *мкм*);
$\begin{matrix}0{,}063\\0{,}040\end{matrix}$ - параметры среднего шага S_m (в *мм*) неровностей профиля;
0,8 – базовая длина l (в *мм*);
$t_{50}\ 80 \pm 10\%$ - относительная опорная длина профиля на базовой длине 0,25 *мм*.

4.41. ДОПУСКИ И ПОСАДКИ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Для изготовления деталей на чертежах проставляются необходимые размеры, которые назначаются на основе расчёта деталей на прочность, жесткость или конструктивных соображений.

Эти размеры d для вала и D для отверстий являются номинальными и согласовываются с ГОСТом 6636-69.

Любую деталь невозможно изготовить точно по чертежу. Объясняется это многими причинами: неточностью производственного оборудования; неточностью режущего инструмента; неточностью установки и базирования деталей; неточностью измерений обрабатываемых деталей и т.д.

В результате большого числа погрешностей действительный размер детали всегда будет отличаться от указанных в чертеже. Необходимо знать, какой наибольший и какой наименьший размеры могут быть допущены при обработке детали с тем, чтобы она не была забракована.

В процессе изготовления деталей контроль предельных размеров осуществляется мерительным инструментом.

В условиях массового производства контроль выполняется предельными калибрами: отверстия контролируются пробками (рис. 4.58, *а*), валы контролируются скобами (см. рис. 4.58, *б*). Каждый предельный калибр имеет проходную (ПР) и непроходную (НЕ) сторону.

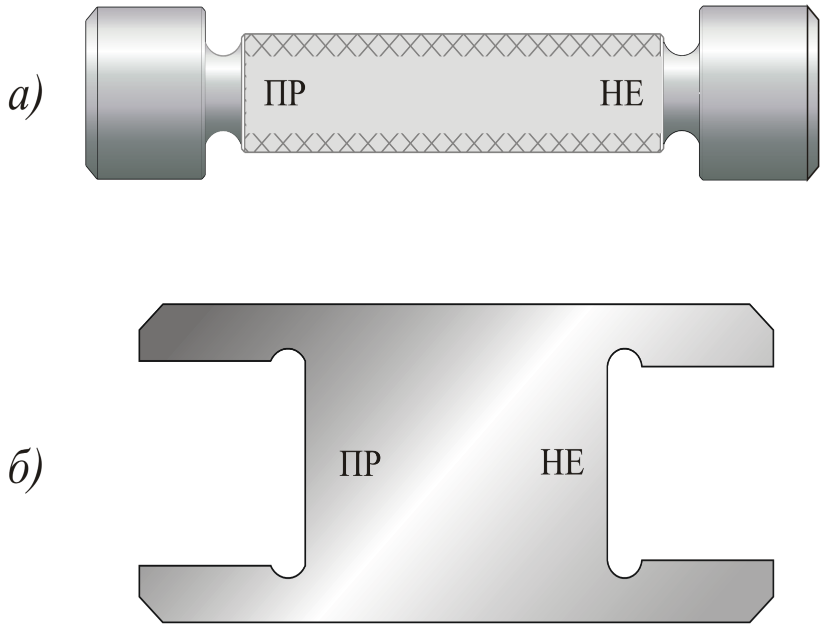


Рис. 4.58. Мерительный инструмент: *а)* калибр - пробка; *б)* калибр – скоба

4.42. ДОПУСКИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ

Предельные размеры вала d_{max}, d_{min} и отверстия D_{max}, D_{min} - это два предельных значения размера, между которыми должен находиться действительный размер вала $d_д$ и отверстия $D_д$, т.е.:

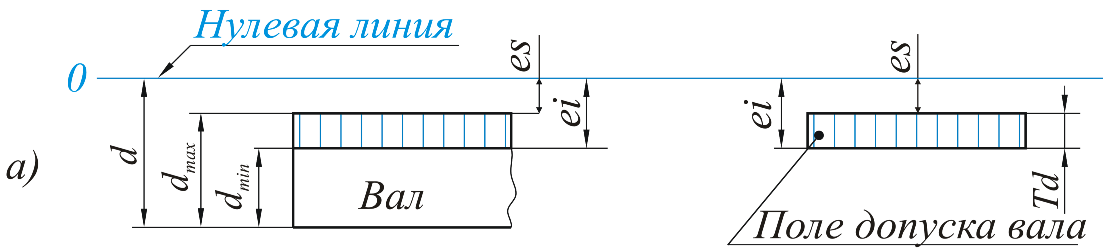
$$d_{min} \leqslant d_д \leqslant d_{max}; \quad D_{min} \leqslant D_д \leqslant D_{max}. \tag{4.130}$$

Верхним предельным отклонением вала es и отверстия ES называется алгебраическая разность между наибольшим предельным размером и номинальным:

$$es = d_{max} - d; \quad ES = D_{max} - D. \tag{4.131}$$

Нижним предельным отклонением вала ei и отверстия EI называется разность между наименьшим предельным размером и номинальным:

$$ei = d_{min} - d; \quad EI = D_{min} - D. \tag{4.132}$$



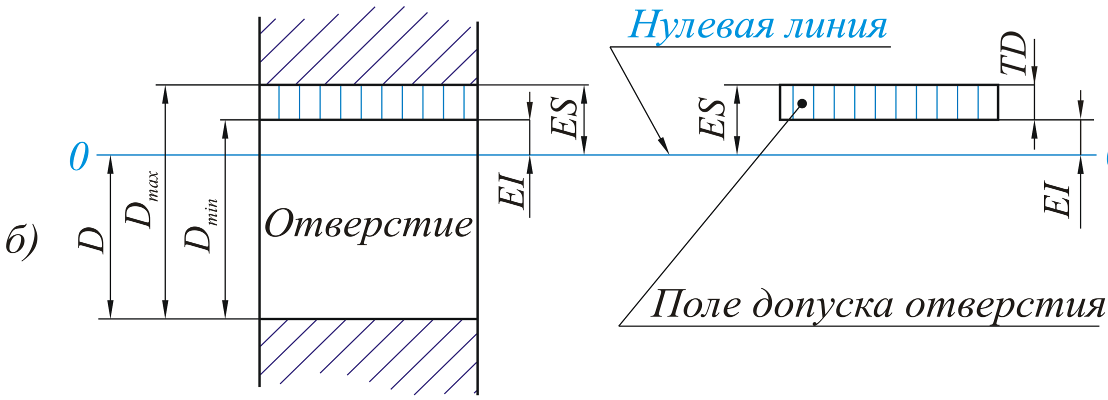


Рис. 4.59. Предельные размеры и предельные отклонения: *а)* вала; *б)* отверстия

Допуском размера вала T_d и отверстия T_D называется разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами:

$$T_d = d_{max} - d_{min};$$
$$T_D = D_{max} - D_{min}. \tag{4.133}$$

Допуск на неточность изготовления размеров детали можно также определить как алгебраическую разность между верхним и нижним отклонениями:

$$T_d = es - ei;$$
$$T_D = ES - EI. \tag{4.134}$$

Для удобства изучения и большей наглядности допуски на размеры деталей можно изобразить в виде полей допусков.

4.43. ПОСАДКИ

При сборке двух деталей, входящих одна в другую, различают наружную - *охватываемую поверхность* и внутреннюю - *охватывающую поверхность*. Охватывающую поверхность считают отверстием, а охватываемую -валом.

Соединяемые детали имеют один и тот же (общий) номинальный размер. Соединение деталей друг с другом могут иметь различный характер: соединение может быть подвижным (с зазором) или неподвижным (с натягом).

Характер соединения деталей, определяемый величиной получающихся в нем зазоров или натягов, называется *посадкой*.

Посадки с зазором.

Зазором называется положительная разность между размерами отверстий и вала, когда размер отверстия больше размера вала.

Наибольший зазор S_{max} - положительная разность между наибольшим предельным размером отверстия и наименьшим предельным размером вала:

$$S_{max} = D_{max} - d_{min}. \tag{4.135}$$

Через предельные отклонения отверстия и вала S_{max} можно определить следующим образом:

$$S_{max} = ES - ei. \tag{4.136}$$

Наименьший зазор S_{min} соответственно определяется так:

$$\begin{aligned} S_{min} &= D_{min} - d_{max}; \\ S_{min} &= EI - es. \end{aligned} \tag{4.137}$$

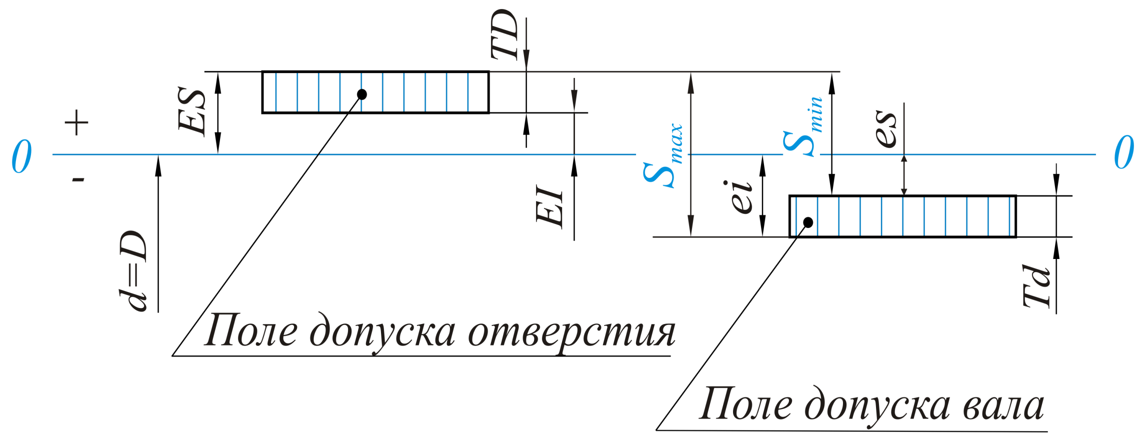


Рис. 4.60. Схема расположения допусков для подвижной посадки(с зазором)

Посадки с натягом.

Натягом называется положительная разность между размерами вала и отверстия до сборки деталей, когда размер вала больше размера отверстия.

Наибольший натяг – положительная разность между наибольшим предельным размером вала и наименьшим предельным размером отверстия:

$$N_{max} = d_{max} - D_{min}. \tag{4.138}$$

Через предельные отклонения вала es и отверстия EI наибольший натяг можно выразить как

$$N_{max} = es - EI\,. \qquad (4.139)$$

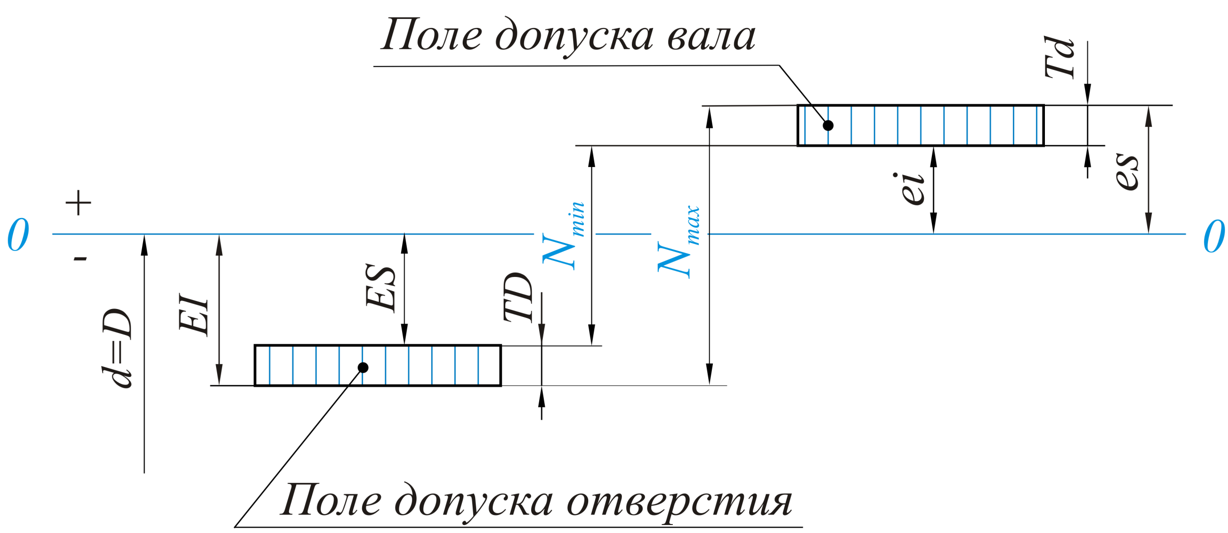


Рис. 4.61. Схема расположения полей допусков для подвижной посадки (с зазором)

Наименьший натяг – положительная разность между наименьшим предельным размером вала и наибольшим предельным размером отверстия:

$$N_{min} = d_{min} - D_{max}\,. \qquad (4.140)$$

Через предельные отклонения вала ei и отверстия ES наименьший натяг:

$$N_{min} = ei - ES\,. \qquad (4.141)$$

Переходными посадками называются такие посадки, в которых могут получаться как натяги, так и зазоры.

В этих посадках поля допусков отверстия и вала перекрываются.

4.44. ДВЕ СИСТЕМЫ ПОСАДОК

Системой отверстия называется совокупность посадок, в которых различные посадки достигаются путём изменения предельных отклонений валов при одинаковых предельных отклонениях отверстий.

Во всех стандартных посадках системы отверстия нижнее отклонение отверстия равно нулю.

Такое отверстие называется основным отверстием.

Верхнее отклонение отверстия направлено в «плюс», т.е. в тело детали.

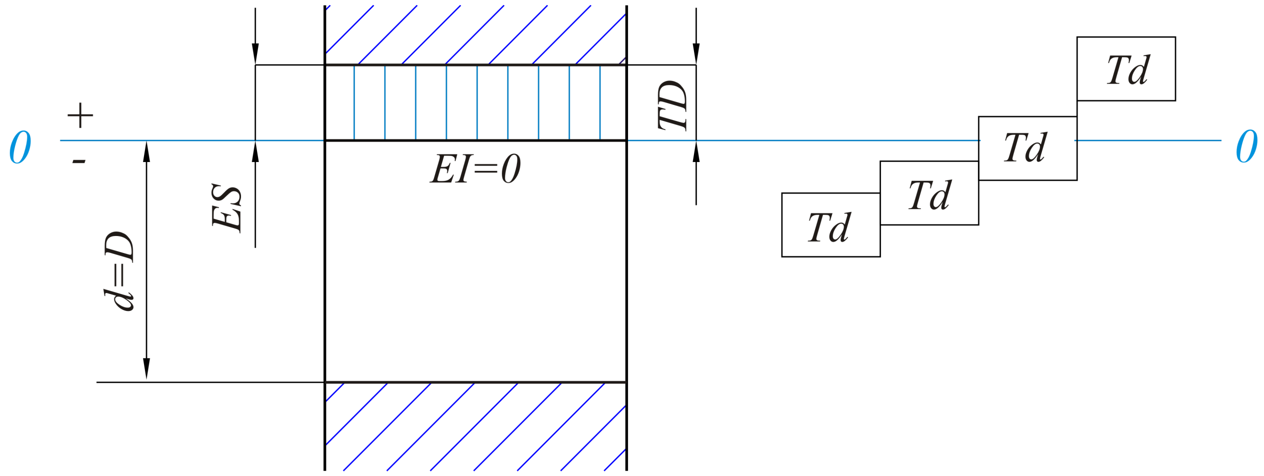


Рис. 4.62. Графическое изображение системы отверстия

Системой вала называется совокупность посадок, в которых предельные отклонения валов одинаковы, а различные посадки достигаются путём изменения предельных отклонений отверстий.

Во всех стандартных посадках системы вала верхнее отклонение вала равно нулю.

Такой вал называется основным валом.

Нижнее отклонение направлено в «минус», т.е. в тело детали.

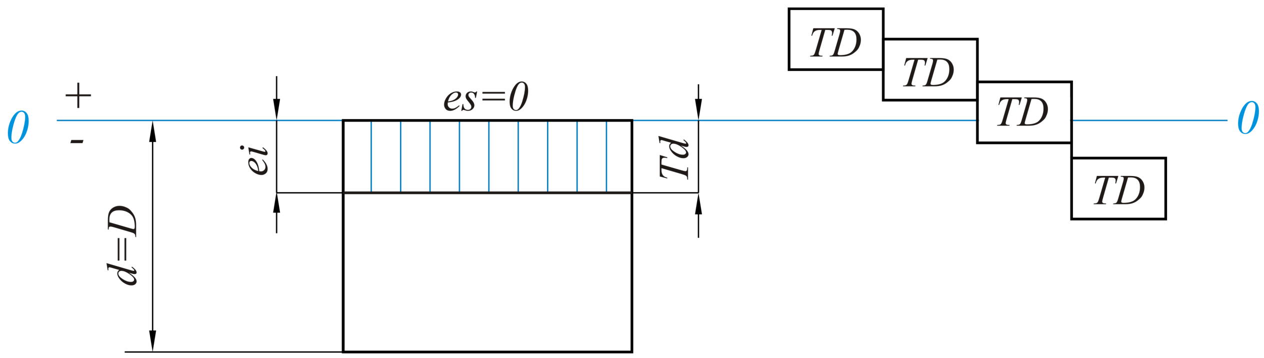


Рис. 4.63. Графическое изображение системы вала

Наибольшее распространение получила система отверстия, так как при её использовании в производстве требуется меньше различных размерных режущих и измерительных инструментов (сверл, зенкеров, протяжек, разверток, оправок и калибров).

4.45. КВАЛИТЕТЫ ТОЧНОСТИ

В единой системе допусков и посадок (ЕСДП) предусмотрены 19 квалитетов точности, обозначаемых порядковым номером: *01; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16;* и *17*. Наивысшей точности соответствует квалитет *01*, а наинизшей - *17* квалитет. Точность убывает от квалитета *01* к квалитету *17*.

Наиболее распространёнными квалитетами точности являются *7* и *8*. Они предусмотрены для размеров точных ответственных соединений в приборостроении и машиностроении.

4.46. ОСНОВНЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ. ОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДОПУСКОВ

Основное отклонение - одно из двух отклонений (верхнее или нижнее), используемое для определения положения поля допуска относительно нулевой линии (рис. 4.64). Для полей допусков вала (отверстия), расположенных выше нулевой линии, основное отклонение является нижним отклонением вала ei (для отверстия EI) со знаком «плюс», а для полей допусков, расположенных ниже нулевой линии, основное отклонение – верхнее отклонение вала es (для отверстия ES) со знаком «минус». Значения основных отклонений валов и отверстий приведены в таблицах (ГОСТ 25346-82).

Для валов установлены 28 основных отклонений и столько же основных отклонений для отверстий. Основные отклонения обозначают одной или двумя буквами латинского алфавита: для вала – строчными буквами от a до zc, а для отверстия – прописными буквами от A до ZC. От границы основного отклонения начинается поле допуска. Положение второй границы допуска (т.е. второе предельное отклонение) определяется как алгебраическая сумма значения основного отклонения и допуска квалитета точности.

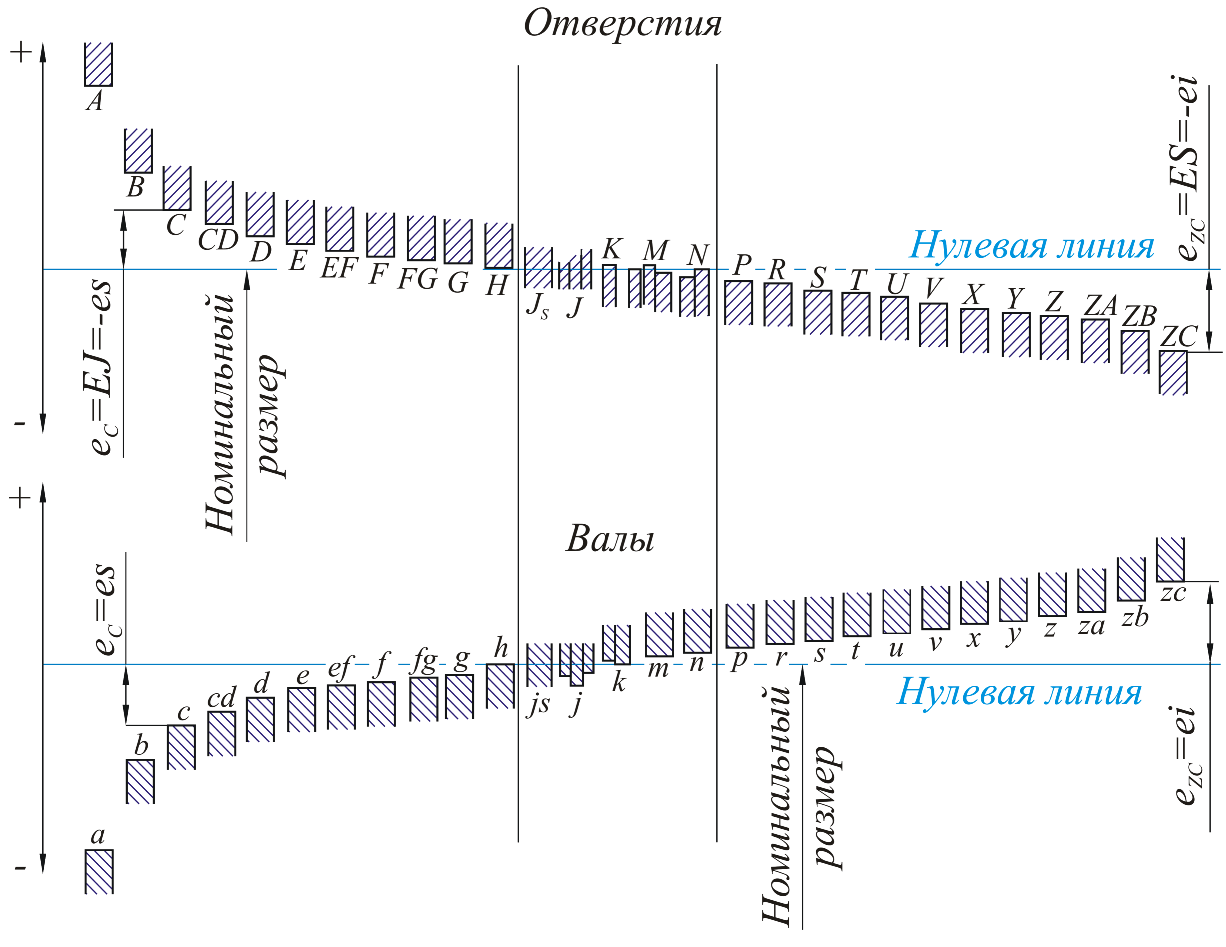


Рис. 4.64. Относительные положения полей допусков в системе ЕСДП

Поля допусков в ЕСДП образуются сочетанием основного отклонения (характеристика расположения) и квалитета (характеристика допуска). Поле допуска вала или отверстия обозначают после номинального размера буквой основного отклонения и номером квалитета. Например, $40\,e8$ обозначает вал диаметром $40\,мм$, 8-го квалитета с основным отклонением e. На чертеже вала это обозначение указывают на размерной линии (рис. 4.65, *а*).

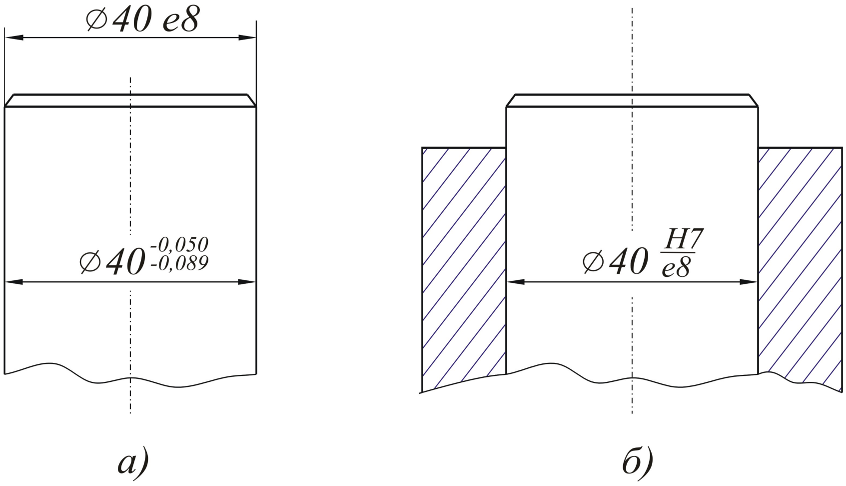


Рис. 4.65. Обозначение: *а)* поля допуска вала; *б*) посадки

4.47. ВЫБОР ПОСАДОК

В учебниках [28, 29] приводятся рекомендуемые посадки в системе отверстия и системе вала для подвижных соединений (с зазором) и для неподвижных соединений (с натягом) (табл. 4.6).

На чертежах общего вида и сборочных посадки указываются в виде дроби (например, $\varnothing 40\,\dfrac{H7}{e8}$ (см. рис. 4.65, *б*).

Таблица 4.6

Посадки и примерное их применение

Рекомендуемые посадки	Пример соединения
$\dfrac{H7}{r6}$; $\dfrac{H7}{s6}$	Зубчатые и червячные колёса на валы при тяжёлых ударных нагрузках
$\dfrac{H7}{p6}$; $\dfrac{H7}{s6}$	Зубчатые и червячные колёса и зубчатые муфты на валы; венцы червячных колёс на центр
$\dfrac{H7}{n6}$; $\dfrac{H7}{m6}$; $\dfrac{H7}{k6}$	Зубчатые колёса при частом демонтаже; шестерни на валах электродвигателей; муфты; мазеудерживающие кольца
$\dfrac{H7}{j_s6}$; $\dfrac{H7}{h6}$; $\dfrac{H7}{h7}$	Стаканы под подшипники качения в корпус; распорные втулки

Продолжение таблицы 4.6

$\frac{H7}{r6}$	Муфты при тяжёлых ударных нагрузках
$\frac{H7}{j_s6}$; $\frac{H7}{h6}$	Шкивы и звёздочки
$\frac{H8}{h8}$	Распорные кольца; сальники
Отклонение вала $k6$	Внутренние кольца подшипников качения на валы
Отклонение отверстия $H7$	Наружные кольца подшипников качения в корпусе
Отклонение вала $m6$, $n6$	Внутренние кольца подшипников качения свыше 100 мм при тяжёлых ударных нагрузках
Примечание. Для подшипников качения указаны отклонения валов и отверстий, а не обозначения полей допусков соединений, потому что подшипники являются готовыми изделиями, идущими на сборку без дополнительной обработки	

4.48. ОФОРМЛЕНИЕ КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ КУРСОВОГО ПРОЕКТА. СИСТЕМА ЕСКД

Содержание и оформление курсового проекта должно отвечать требованиям Единой системы конструкторской документации (ЕСКД).

В номенклатуру курсового проекта по деталям машин входят следующие конструкторские документы, регламентированные ГОСТ 2.102-68: текстовый документ -пояснительная записка (шифр ПЗ); графические документы – габаритный чертёж привода, сборочный чертёж редуктора, рабочие чертежы основных деталей редуктора.

4.49. СОДЕРЖАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ПОЯСНИТЕЛЬНОЙ ЗАПИСКИ

Пояснительную записку следует оформлять в соответствии с ГОСТ 2.106-96 как конструкторский документ, содержащий описание устройства и принципа действия разрабатываемого изделия, обоснование принятых при её разработке технических и технико-экономических решений, расчёты деталей на прочность, жесткость и работоспособность, расчеты посадок сопряжённых деталей.

Пояснительная записка в общем случае должна включать:

1) техническое задание на проектирование;
2) введение с кратким описанием устройства и назначения проектируемого привода;

3) особенности и сравнительную оценку проектируемого привода;
4) выбор электродвигателя и кинематический расчёт привода;
5) расчёт редукторной передачи;
6) эскизную компоновку;
7) предварительный расчёт валов редуктора, подбор подшипников качения и расчёт их на долговечность;
8) конструктивные проработки и определение основных размеров валов, зубчатых (червячных) зацеплений и подшипников;
9) выбор способа смазывания зубчатых(червячных) зацеплений и подшипников;
10) выбор посадок для сопряжения основных деталей редуктора;
11) уточнённый расчёт валов редуктора;
12) тепловой расчёт редуктора (только червячного);
13) подбор соединительных муфт;
14) краткое описание технологии сборки редуктора, регулирования подшипников и деталей зацепления;
15) перечень используемой литературы, нормативно-технической документации или других источников, использованных при выполнении задания;
16) содержание.

Пояснительная записка относится к текстовым конструкторским документам, её следует оформлять в соответствии с ГОСТ 2.105-95, на стандартных листах белой писчей бумаги формата $A4(297\times219\,мм)$.

Первый лист – титульный. На первом (заглавном) листе текстовой части ПЗ (техническое задание) выполняют основную надпись по форме 2, а на последующих по форме 2*а*. Основную надпись на титульном листе не выполняют. Содержание ПЗ разбивают на разделы и подразделы. Разделы должны иметь порядковые номера в пределах всей ПЗ, обозначенные арабскими цифрами с точкой. Подразделы должны иметь нумерацию в пределах каждого раздела. Номера подразделов состоят из номеров раздела и подраздела, разделённых точкой. Разделы и подразделы могут состоять из одного или нескольких пунктов. Наименование разделов должны быть краткими, соответствовать содержанию и записываться в виде заголовков прописными буквами. Каждый раздел ПЗ рекомендуется начинать с новой страницы.

Условные буквенные обозначения величин, а также условные графические обозначения должны соответствовать установленным государственным стандартам.

Оформление расчётов ПЗ необходимо выполнять по следующему плану:

1. Заголовок расчёта с указание, какая деталь рассчитывается и на какой вид работоспособности (прочность, жесткость и т.п.).
2. Эскиз детали и расчётная схема с указанием сил, эпюр моментов и всех размеров, используемых в расчёте.
3. Наименование выбранного материала с указанием его термообработки и характеристики механических свойств.
4. Записывают расчётную формулу.

5. Задаются значением величин, входящих в расчётную формулу, указывают источник, из которого они заимствованы.
6. Принятые обозначения величин подставляют в расчётную формулу в последовательности, соответствующей записи формулы.
7. Обобщают итоги расчётов в виде сводной таблицы или делают заключение по результатам расчёта.

Иллюстрации могут быть расположены как по тексту ПЗ, так и в конце его или даны в приложении. Иллюстрации должны быть выполнены в соответствии с требованиями ЕСКД.

Все иллюстрации нумеруют в пределах раздела арабскими цифрами, указывая номер раздела и порядковый номер иллюстрации.

Иллюстрации могут иметь наименование и подрисуночный текст, помещаемый под иллюстрацией следом за её номером.

Иллюстрационный материал, таблицы или текст вспомогательного характера допускается давать в виде приложения.

Приложение оформляют как продолжение ПЗ.

4.50. ОФОРМЛЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ПРОЕКТА

Графическую часть проекта (чертежи) выполняют карандашом на чертёжной бумаге с соблюдением требований ЕСКД.

1. Каждый чертёж оформляют на листах стандартного формата.
2. Каждый чертёж должен иметь основную надпись по обрамляющей линии в правом нижнем углу поля чертежа для формата А4 по короткой стороне, а для остальных форматов – по длинной стороне.
   Если все необходимые изображения не размещаются на одном листе, то допускается выполнять чертеж на двух и более с указанием в основной надписи каждого из них его порядкового номера, а на первом листе – общего количества листов, на которых выполнен чертёж.
3. Число изображений (видов, разрезов, сечений) на чертежах должно быть минимальным, но обеспечивающим полное представление об устройстве изделия, взаимодействии его составных частей, сборке и регулировании.
4. Изображение изделий следует рационально размещать на рабочем поле чертежа в масштабе, обеспечивающем чёткое представление формы, устройства и конструкции изделия.
5. Наименование, начертание, толщина и назначение линий чертежа регламентировать ГОСТ2.303-68.

Все конструкторские документы разделяют на проектные (техническое предложение, эскизный и технический проекты) и рабочие (чертёж детали, сборочный чертёж, спецификация и др.).

На сборочном чертеже изделия приводят следующие данные:

1. Размеры: габаритные; установочные и присоединительные; исполнительные (сборочные); справочные.
2. Техническую характеристику изделия (передаточное отношение,частоту вращения тихоходного вала и наибольший вращающий момент на нём).

3. Технические требования к изделию (требования к сборке, настройке и регулированию изделия).

Все составные части изделия на сборочном чертеже нумеруют. Номера позиций наносят на полках линий - выносок. Линии - выноски не должны пересекать размерные линии, а также не должны быть параллельны линиям штриховки. Полки номеров позиций надо располагать в колонку, их концы соединять сплошной тонкой линией.

Для сборочного чертежа обязательна спецификация. *Спецификация* – текстовый документ с перечислением состава сборочной единицы. Спецификацию составляют на каждую сборочную единицу и выполняют на отдельных листах формата А4.

Спецификация содержит семь граф: «Формат», «Зона», «Поз.», «Обозначение», «Наименование», «Кол.», «Примечание».

Содержание разделов и последовательность записей внутри каждого из них следующие: документация, сборочные единицы, детали, стандартные изделия.

Чертёж детали – документ, содержащий изображение детали и другие данные, необходимые для изготовления и контроля детали.

Основанием для суждения о размерах детали служат только цифровые значения, проставленные на чертеже, независимо от его масштаба. Количество размеров на чертеже должно быть минимальным, но достаточным для изготовления и контроля детали.

На рабочих чертежах обозначают шероховатость поверхности деталей; допустимые отклонения размеров; допустимые отклонения геометрических форм и расположения поверхностей деталей; указывают технические требования, предъявляемые к материалам, размерам и форме деталей.

При оформлении рабочих чертежей зубчатых(червячных) колёс и червяков в правом верхнем углу поля чертежа должна быть помещена таблица параметров из трёх частей: первая часть – основные данные; вторая – данные для контроля; третья – справочные данные.

В основных данных таблицы должны быть приведены:

1) модуль;
2) число зубьев колеса, число витков червяка;
3) тип зуба для конического зубчатого колеса;
4) вид червяка;
5) угол наклона зуба (кроме червячного колеса) и угол подъёма витков червяка;
6) направление линии зуба;
7) исходный контур зубчатого колеса, исходный червяк или исходный производящий червяк (для червячного колеса).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для вузов/ Н.С. Пискунов.-4-е изд., доп.-М.: Физматгиз, 1963. - 856 с.: ил.

2. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов/ И.М. Воронков.-13-е изд., испр.-М.: Наука, 1966.-596 с.: ил.

3. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1-2: Учеб. пособие/ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон.-М.: Наука., 1968. - 624 с.: ил.

4. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/ С.М. Тарг. -10-е изд., перераб. и доп.-М.: Высш.шк., 1986. - 415с.: ил.

5.Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие.-2-е изд., испр. и доп./ Под ред. К.С. Колесникова.-М.: Наука., 1989. - 448 с.

6. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. – М.: Наука. 1973. – 256с.

7. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов. – 4-е изд., перераб и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.– мат. лит., 1988. – 640 с.

8. Закабунин В.И. Теория механизмов и машин. Структура и анализ механизмов: Учебное пособие/ Алт. гос. техн. университет им. И.И. Ползунова. – Барнаул: Издательство АлтГТУ, 2004. – 406 с.

9. Кутумов А.А., Сорокина И.А. Структурный анализ механизма: Методические указания по курсу «Теория механизмов и машин» для студентов машиностроительных специальностей / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2006. - 30 с.

10. Сорокина И.А., Кутумов А.А., Кинематический анализ плоских рычажных и зубчатых механизмов: Методические указания по курсу «Теория механизмов и машин» для студентов машиностроительных специальностей / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2007. - 42с.

11. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов/ К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.: ил.

12. Курс теоретической механики: Учеб. для вузов/М.М. Гернет.-5-е изд., испр.-М.: Высш.шк., 1987. - 344 с.: ил.

13. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова.-3-е изд., испр.-М.: Высш. шк., 2003.-560 с.: ил.

14. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/Н.М. Беляев. -11-е изд., испр.-М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1958. -856 с.: ил.

15. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. -3-е изд. испр., - М.: Высш. шк., 1969. -734 с.: ил.

16. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов/ В.И. Феодосьев. - 2-е изд., испр.- М.: Физматгиз, 1962. -536 с.: ил.

17. Сборник задач по сопротивлению материалов/ Под ред. В.К. Качурина. -М.,1970.- 432с.: ил.

18. Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. -Киев.: Наукова думка, 1975.-704 с.

19. Сопротивление материалов: Лаб. практикум: Учеб. пособие/ М. Д. Подскребко, О. И. Мисуно, С.А. Легенький.-Минск.: Амалфея, 2001.-272 с.

20. Детали машин: Учеб. для вузов/ Д.Н. Решетов. - М.: Высш.шк., 1989.-469с.

21. Детали машин: Учеб. для вузов/ М.Н. Иванов. - М.: Высш.шк., 1998. - 383 с.

22. Детали машин: Учеб. для вузов/ Г.Б. Иосилевич. - М.: Высш.шк., 1989. - 368 с.

23. Детали машин: Учеб. для вузов/ П.Г. Гузенков. - М.: Высш.шк., 1982. - 351 с.

24. Курсовое проектирование деталей машин: Учеб. пособие. -/ Под ред. В.Н. Кудрявцева. - Л., 1984. - 395 с.

25. Детали машин: Учеб. для вузов/ Н.Г. Куклин, Г.С. Куклина. - М.: 1979. - 309 с.

26. Сб. задач и примеров расчёта по курсу деталей машин/ Г.М. Ицкевич, С.А. Чернавский, В.А. Киселёв и др. - М., 1975. - 284с.

27. Допуски и посадки: Учеб.пособие/ И.М. Белкин. - М., 1992.

28. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения: Учеб. пособие/ А.И. Якушев, Л.Н. Воронцов, Н.М. Федоров. - М., 1986.

29. Сборник примеров и задач по курсу основы стандартизации, допуски, посадки и технические измерения/ Н.С. Козловский, В.М. Ключников. - М.,1983.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Международная система единиц (СИ)

Таблица П 1

Выписка из таблиц Международной системы единиц (СИ)

Наименование величины	Единица измерения	Сокращённые обозначения единиц	
		русские	латинские или греческие
Основные единицы			
Длина	Метр	*м*	*m*
Масса	Килограмм	*кг*	*kg*
Время	Секунда	*сек*	*s*
Сила электрического тока	Ампер	*а*	*A*
Дополнительные единицы			
Плоский угол	Радиан	*рад*	*rad*
Телесный угол	Стерадиан	*стер*	*sr*
Производные единицы			
Площадь	Квадратный метр	$м^2$	m^2
Объём	Кубический метр	$м^3$	m^3
Частота	Герц (1/*сек*)	*гц*	*Hz*
Объёмная масса (плотность)	Килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	kg/m^3
Скорость	Метр в секунду	*м/сек*	*m/s*
Угловая скорость	Радиан в секунду	*рад/сек*	*rad/s*
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	$м/сек^2$	m/s^2
Угловое ускорение	Радиан на секунду в квадрате	$рад/сек^2$	rad/s^2
Сила	Ньютон $(кг \cdot м / сек^2)$	*н*	*N*
Давление (механическое напряжение)	Ньютон на квадратный метр	$н/м^2$	N/m^2
Динамическая вязкость	Ньютон-секунда на кв. метр	$н \cdot сек / м^2$	Ns/m^2
Кинематическая вязкость	Кв. метр в секунду	$м^2/сек$	m^2/s
Работа, энергия, количество теплоты	Джоуль $(н \cdot м)$	*дж*	*J*
Мощность	Ватт (*дж/сек*)	*вт*	*W*
Количество электричества	Кулон $(а \cdot сек)$	*к*	*C*
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	Вольт (*вт/а*)	*в*	*V*
Напряжённость электрического поля	Вольт на метр	*в/м*	*V/m*
Электрическое сопротивление	Ом (*в/м*)	*ом*	*Ω*
Электрическая ёмкость	Фарада (*к/в*)	*ф*	*F*
Поток магнитной индукции	Вебер (*к/ом*)	*вб*	*Wb*
Индуктивность	Генри (*вб/а*)	*гн*	*H*
Магнитная индукция	Тесла ($вб/м^2$)	*тл*	*T*
Напряжённость магнитного поля	Ампер на метр	*а/м*	*A/m*

2. Краткие сведения из математики

Таблица П 2

Таблица неопределённых интегралов от простейших функций

п/п	Функция и её интеграл (C=$const$)
1	$\int x^{\alpha}\,dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$
2	$\int \dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
3	$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
4	$\int \cos x\,dx=\sin x+C$
5	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tg\,x+C$
6	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctg\,x+C$
7	$\int tg\,x\,dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$
8	$\int ctg\,x\,dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$
9	$\int e^x\,dx=e^x+C$
10	$\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
11	$\int \dfrac{dx}{1+x^2}=arctg\,x+C$
12	$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\,arctg\,\dfrac{x}{a}+C$
13	$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x}+C$
14	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
15	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$
16	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$

Эвольвентные углы $inv\alpha = tg - \alpha$ для углов α
в градусах и сотых долях градуса

Таблица П 3

Таблица для расчёта профиля зуба

α°	,00	,10	,20	,30	,40
20	0,014904	0,015137	0,015372	0,015609	0,015849
21	0,017345	0,017603	0,017865	0,018129	0,018395
22	0,020054	0,020340	0,020629	0,020921	0,021217
23	0,023049	0,023365	0,023684	0,024006	0,024332
24	0,026350	0,026697	0,027048	0,027402	0,027760
25	0,029975	0,030357	0,030741	0,031130	0,031521
26	0,033947	0,034364	0,034785	0,035209	0,035637
27	0,038287	0,038742	0,039201	0,039664	0,040131
28	0,043017	0,043513	0,044012	0,044516	0,045024
29	0,048164	0,048702	0,049245	0,049792	0,050344
30	0,053751	0,054336	0,054924	0,055518	0,056116
31	0,058809	0,060441	0,061079	0,061721	0,062369
32	0,066364	0,067048	0,067738	0,068432	0,069133
33	0,073449	0,074188	0,074932	0,075683	0,076439
34	0,081097	0,081894	0,082697	0,083506	0,084321
35	0,089342	0,090201	0,091066	0,091938	0,092816
36	0,098224	0,099149	0,100080	0,101019	0,101964
37	0,107782	0,108777	0,109779	0,110788	0,111805
38	0,118061	0,119130	0,120207	0,121291	0,122384
39	0,129106	0,130254	0,131411	0,132576	0,133750
40	0,140968	0,142201	0,143443	0,144694	0,145954
41	0,153702	0,155025	0,156358	0,157700	0,159052
42	0,167366	0,168786	0,170216	0,171656	0,173106
43	0,182024	0,183547	0,185080	0,186780	0,188180
44	0,197744	0,199377	0,201022	0,202678	0,204346

Продолжение таблицы П 3

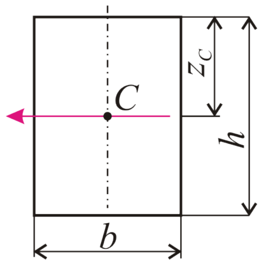
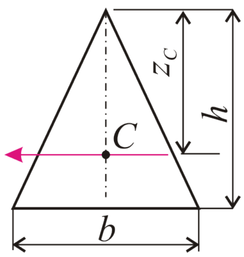
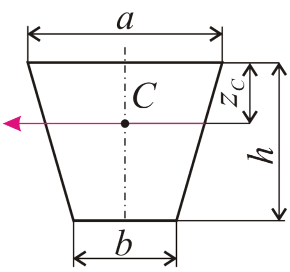
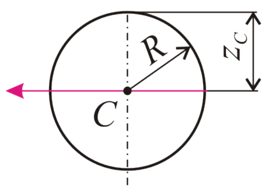
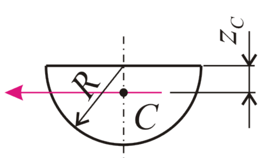
Таблица для расчёта профиля зуба

α°	,50	,60	,70	,80	,90
20	0,016092	0,016337	0,016585	0,016836	0,017089
21	0,018665	0,018937	0,019212	0,019490	0,019770
22	0,021514	0,021815	0,022119	0,022426	0,022736
23	0,024660	0,024992	0,025326	0,025664	0,026005
24	0,028121	0,028485	0,028852	0,029223	0,029598
25	0,031917	0,032315	0,032718	0,033124	0,033534
26	0,036069	0,036505	0,036945	0,037388	0,037835
27	0,040602	0,041076	0,041556	0,042039	0,042526
28	0,045537	0,046054	0,046575	0,047100	0,047629
29	0,050901	0,051462	0,052027	0,052597	0,053172
30	0,056720	0,057328	0,057940	0,058558	0,059181
31	0,063022	0,063680	0,064343	0,065012	0,065685
32	0,069838	0,070549	0,071266	0,071988	0,072716
33	0,077200	0,077968	0,078741	0,079520	0,080305
34	0,085142	0,085970	0,086804	0,087644	0,088490
35	0,093701	0,094592	0,095490	0,096395	0,097306
36	0,102916	0,103875	0,104841	0,105717	0,106795
37	0,112829	0,113860	0,114899	0,115945	0,116999
38	0,123484	0,124592	0,125709	0,126833	0,127965
39	0,134931	0,136122	0,137320	0,138528	0,139743
40	0,147222	0,148500	0,149787	0,151083	0,152387
41	0,160414	0,161785	0,163165	0,164556	0,165956
42	0,174556	0,176037	0,177518	0,179009	0,180511
43	0,189746	0,191324	0,192912	0,194511	0,196122
44	0,206026	0,207717	0,209420	0,211135	0,212863

3. Геометрические характеристики простейших плоских сечений

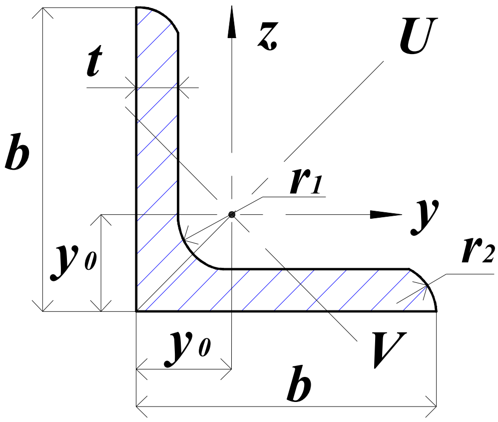
Таблица П 4

Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

Сечение	J_C, $м^4$	z_C, $м$	A, $м^2$
Прямоугольник 	$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{1}{2} h$	$b h$
Треугольник 	$\frac{1}{36} b h^3$	$\frac{2}{3} h$	$\frac{1}{2} b h$
Трапеция равнобедренная 	$\frac{1}{36} h^3 \times$ $\times \frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$	$\frac{1}{3} h \times$ $\times \frac{a+2b}{a+b}$	$\frac{1}{2} h \times$ $\times (a+b)$
Круг 	$\frac{1}{4} \pi R^4$	R	πR^2
Полукруг 	$\frac{9\pi^2-64}{72\pi} R^4$	$\frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$	$\frac{1}{2} \pi R^2$

4. Краткие сведения из сортамента

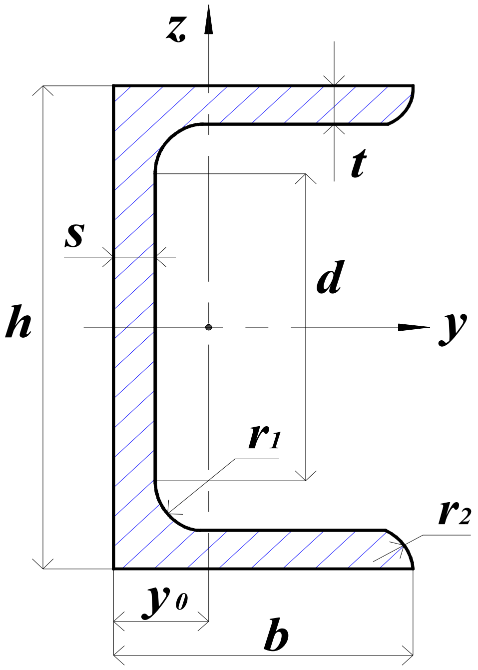
Тип: Уголок равнополочный по ГОСТ 8509-93



	b	t	r_1	r_2	A	$I_y=I_z$	W_y	i_y	I_u	i_u	I_v	W_{vo}	i_v	I_{yz}	y_o	P
	см	см	см	см	см^2	см^4	см^3	см	см^4	см	см^4	см^3	см	см^4	см	Т/м
L20x3	2.00	0.30	0.35	0.120	1.130	0.400	0.280	0.590	0.630	0.750	0.170	0.200	0.390	0.230	0.600	0.001
L20x4	2.00	0.40	0.35	0.120	1.460	0.500	0.370	0.580	0.780	0.730	0.220	0.240	0.380	0.280	0.640	0.001
L25x3	2.50	0.30	0.35	0.120	1.430	0.810	0.460	0.750	1.290	0.950	0.340	0.330	0.490	0.470	0.730	0.001
L25x4	2.50	0.40	0.35	0.120	1.860	1.030	0.590	0.740	1.620	0.930	0.440	0.410	0.480	0.590	0.760	0.001
L25x5	2.50	0.50	0.35	0.120	2.270	1.220	0.710	0.730	1.910	0.920	0.530	0.470	0.480	0.690	0.800	0.002
L28x3	2.80	0.30	0.40	0.130	1.620	1.160	0.580	0.850	1.840	1.070	0.480	0.420	0.550	0.680	0.800	0.001
L30x3	3.00	0.30	0.40	0.130	1.740	1.450	0.670	0.910	2.300	1.150	0.600	0.530	0.590	0.850	0.850	0.001
L30x4	3.00	0.40	0.40	0.130	2.270	1.840	0.870	0.800	2.920	1.130	0.770	0.610	0.580	1.080	0.890	0.002
L30x5	3.00	0.50	0.40	0.130	2.780	2.200	1.060	0.890	3.470	1.120	0.940	0.710	0.580	1.270	0.930	0.002
L32x3	3.20	0.30	0.45	0.150	1.860	1.770	0.770	0.970	2.800	1.230	0.740	0.590	0.630	1.030	0.890	0.001
L32x4	3.20	0.40	0.45	0.150	2.430	2.260	1.000	0.960	3.580	1.210	0.940	0.710	0.620	1.320	0.940	0.002
L35x3	3.50	0.30	0.45	0.150	2.040	2.350	0.930	1.070	3.720	1.350	0.970	0.710	0.690	1.370	0.970	0.002
L35x4	3.50	0.40	0.45	0.150	2.170	3.010	1.210	1.060	4.760	1.330	1.250	0.880	0.680	1.750	1.010	0.002
L35x5	3.50	0.50	0.45	0.150	3.280	3.610	1.470	1.050	5.710	1.320	1.520	1.020	0.680	2.100	1.050	0.003
L40x3	4.00	0.30	0.50	0.170	2.350	3.550	1.220	1.230	5.630	1.550	1.470	0.950	0.790	2.080	1.090	0.002
L40x4	4.00	0.40	0.50	0.170	3.080	4.580	1.600	1.220	7.260	1.530	1.900	1.190	0.780	2.680	1.130	0.002
L40x5	4.00	0.50	0.50	0.170	3.790	5.530	1.950	1.210	8.750	1.520	2.300	1.390	0.780	3.220	1.170	0.003
L40x6	4.00	0.60	0.50	0.170	4.480	6.410	2.300	1.200	10.130	1.500	2.700	1.580	0.780	3.720	1.210	0.004
L45x3	4.50	0.30	0.50	0.170	2.650	5.130	1.560	1.390	8.130	1.750	2.120	1.240	0.890	3.000	1.210	0.002
L45x4	4.50	0.40	0.50	0.170	3.480	6.630	2.040	1.380	10.520	1.740	2.740	1.540	0.890	3.890	1.260	0.003
L45x5	4.50	0.50	0.50	0.170	4.290	8.030	2.510	1.370	12.740	1.720	3.330	1.810	0.880	4.710	1.300	0.003
L45x6	4.50	0.60	0.50	0.170	5.080	9.350	2.950	1.360	14.800	1.710	3.900	2.060	0.880	5.450	1.340	0.004
L50x3	5.00	0.30	0.55	0.180	2.960	7.110	1.940	1.550	11.270	1.950	2.950	1.570	1.000	4.160	1.330	0.002
L50x4	5.00	0.40	0.55	0.180	3.890	9.210	2.540	1.540	14.630	1.940	3.800	1.950	0.990	5.420	1.380	0.003
L50x5	5.00	0.50	0.55	0.180	4.800	11.200	3.130	1.530	17.770	1.920	4.630	2.300	0.980	6.570	1.420	0.004
L50x6	5.00	0.60	0.55	0.180	5.690	13.070	3.690	1.520	20.720	1.910	5.430	2.630	0.980	7.650	1.460	0.004
L50x7	5.00	0.70	0.55	0.180	6.560	14.840	4.230	1.500	23.470	1.890	6.210	2.930	0.970	8.630	1.500	0.005
L50x8	5.00	0.80	0.55	0.180	7.410	16.510	4.760	1.490	26.030	1.870	6.980	3.220	0.970	9.520	1.530	0.006
L56x4	5.60	0.40	0.60	0.200	4.380	13.100	3.210	1.730	20.790	2.180	5.410	2.520	1.110	7.690	1.520	0.003
L56x5	5.60	0.50	0.60	0.200	5.410	15.970	3.960	1.720	25.360	2.160	6.590	2.970	1.100	9.410	1.570	0.004
L60x4	6.00	0.40	0.70	0.230	4.720	16.210	3.700	1.850	25.690	2.330	6.720	2.930	1.190	9.480	1.620	0.004
L60x5	6.00	0.50	0.70	0.230	5.830	19.790	4.560	1.840	31.400	2.320	8.180	3.490	1.180	11.610	1.660	0.005
L60x6	6.00	0.60	0.70	0.230	6.920	23.210	5.400	1.830	36.810	2.310	9.600	3.990	1.180	13.600	1.700	0.005
L60x8	6.00	0.80	0.70	0.230	9.040	29.550	7.000	1.810	46.770	2.270	12.340	4.900	1.170	17.220	1.780	0.007
L60x10	6.00	1.00	0.70	0.230	11.080	35.320	8.520	1.790	55.640	2.240	15.000	5.700	1.160	20.320	1.850	0.009
L63x4	6.30	0.40	0.70	0.230	4.960	18.860	4.090	1.950	29.900	2.450	7.810	3.260	1.250	11.000	1.690	0.004
L63x5	6.30	0.50	0.70	0.230	6.130	23.100	5.050	1.940	36.800	2.440	9.520	3.870	1.250	13.700	1.740	0.005
L63x6	6.30	0.60	0.70	0.230	7.280	27.060	5.980	1.930	42.910	2.430	11.180	4.440	1.240	15.900	1.780	0.006
L65x6	6.50	0.60	0.70	0.230	7.520	29.850	6.390	1.990	47.380	2.510	12.320	4.770	1.280	17.530	1.830	0.006
L65x8	6.50	0.80	0.70	0.230	9.840	38.130	8.300	1.970	60.420	1.270	15.850	13.150	2.480	22.290	1.900	0.008
L70x4	7.00	0.45	0.80	0.270	6.200	29.040	5.670	2.160	46.030	2.720	12.040	4.530	1.390	17.000	1.880	0.005
L70x5	7.00	0.50	0.80	0.270	6.860	31.940	6.270	2.160	50.670	2.720	13.220	4.920	1.390	18.700	1.900	0.005
L70x6	7.00	0.60	0.80	0.270	8.150	37.580	7.430	2.150	59.640	2.710	15.520	5.660	1.380	22.100	1.940	0.006
L70x7	7.00	0.70	0.80	0.270	9.420	42.980	8.570	2.140	68.190	2.690	17.770	6.310	1.370	25.200	1.990	0.007
L70x8	7.00	0.80	0.80	0.270	10.670	48.160	9.680	2.120	76.350	2.680	19.970	6.990	1.370	28.200	2.020	0.008
L70x10	7.00	1.00	0.80	0.270	13.110	57.900	11.820	2.100	91.520	2.640	24.270	8.170	1.360	33.600	2.100	0.010
L75x5	7.50	0.50	0.90	0.300	7.390	39.530	7.210	2.310	62.650	2.910	16.410	5.740	1.490	23.100	2.020	0.006
L75x6	7.50	0.60	0.90	0.300	8.780	46.570	8.570	2.300	73.870	2.900	19.280	6.620	1.480	27.300	2.060	0.007
L75x7	7.50	0.70	0.90	0.300	10.150	53.340	9.890	2.290	84.610	2.890	22.070	7.430	1.470	31.200	2.100	0.008
L75x8	7.50	0.80	0.90	0.300	11.500	59.840	11.180	2.280	94.890	2.870	24.800	8.160	1.470	35.000	2.150	0.009
L75x9	7.50	0.90	0.90	0.300	12.830	66.100	12.430	2.270	104.720	2.860	27.480	8.910	1.460	38.600	2.180	0.010

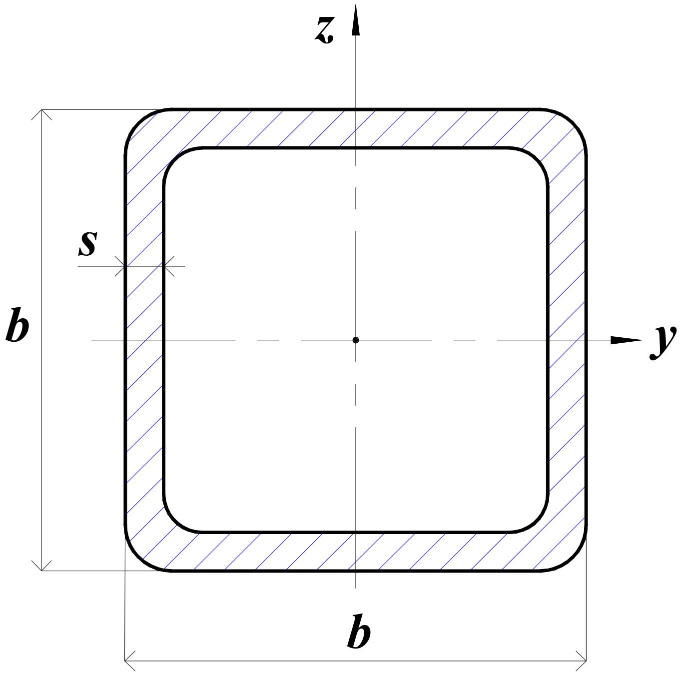
	b	t	r_1	r_2	A	I_y=I_z	W_y	i_y	I_u	i_u	I_v	W_{vo}	i_v	I_{yz}	y_o	P
L80x5	8.00	0.55	0.90	0.300	8.630	52.680	9.030	2.470	83.560	3.110	21.800	7.100	1.590	30.900	2.170	0.007
L80x6	8.00	0.60	0.90	0.300	9.380	56.970	9.800	2.470	90.400	3.110	23.540	7.600	1.580	33.400	2.190	0.007
L80x7	8.00	0.70	0.90	0.300	10.850	65.310	11.320	2.450	103.600	3.090	26.970	8.550	1.580	38.300	2.230	0.009
L80x8	8.00	0.80	0.90	0.300	12.300	73.360	12.800	2.440	116.390	3.080	30.320	9.440	1.570	43.000	2.270	0.010
L80x10	8.00	1.00	0.90	0.300	15.140	83.580	15.670	2.420	140.310	3.040	36.850	11.090	1.560	56.700	2.350	0.012
L80x12	8.00	1.20	0.90	0.300	17.900	102.740	18.420	2.400	162.270	3.010	43.210	12.620	1.550	59.500	2.420	0.014
L90x6	9.00	0.60	1.00	0.330	10.610	82.100	12.490	2.780	130.000	3.500	33.970	9.880	1.790	48.100	2.430	0.008
L90x7	9.00	0.70	1.00	0.330	12.280	94.300	14.450	2.770	149.670	3.490	38.940	11.150	1.780	55.400	2.470	0.010
L90x8	9.00	0.80	1.00	0.330	13.930	106.110	16.360	2.760	168.420	3.480	43.800	12.340	1.770	62.300	2.510	0.011
L90x9	9.00	0.90	1.00	0.330	15.600	118.000	18.290	2.750	186.000	3.460	48.600	13.480	1.770	68.000	2.550	0.012
L90x10	9.00	1.00	1.00	0.330	17.170	128.600	20.070	2.740	203.930	3.450	53.270	14.540	1.760	75.300	2.590	0.013
L90x12	9.00	1.20	1.00	0.330	20.330	149.670	23.850	2.710	235.880	3.410	62.400	16.530	1.750	86.200	2.670	0.016
L100x6.5	10.0	0.65	1.20	0.400	12.820	122.100	16.690	3.090	193.460	3.890	50.730	13.380	1.990	71.400	2.680	0.010
L100x7	10.0	0.70	1.20	0.400	13.750	130.590	17.900	3.080	207.010	3.880	54.160	14.130	1.980	76.400	2.710	0.011
L100x8	10.0	0.80	1.20	0.400	15.600	147.190	20.300	3.070	233.460	3.870	60.920	15.660	1.980	86.300	2.750	0.012
L100x10	10.0	1.00	1.20	0.400	19.240	178.950	24.970	3.050	283.830	3.840	74.080	18.510	1.960	110.000	2.830	0.015
L100x12	10.0	1.20	1.20	0.400	22.800	208.900	29.470	3.030	330.950	3.810	86.840	21.100	1.950	122.000	2.910	0.018
L100x14	10.0	1.40	1.20	0.400	26.280	237.150	33.830	3.000	374.980	3.780	99.320	23.490	1.940	138.000	2.990	0.021
L100x15	10.0	1.50	1.20	0.400	27.990	250.680	35.950	2.990	395.870	3.760	105.480	24.620	1.940	145.000	3.030	0.022
L100x16	10.0	1.60	1.20	0.400	29.680	263.820	38.040	2.980	416.040	3.740	111.610	25.790	1.940	152.000	3.060	0.023
L110x7	11.0	0.70	1.20	0.400	15.150	175.610	21.830	3.400	278.540	4.290	72.680	17.360	2.190	106.000	2.960	0.012
L110x8	11.0	0.80	1.20	0.400	17.200	198.170	24.770	3.390	314.510	4.280	81.830	19.290	2.180	116.000	3.000	0.013
L120x8	12.0	0.80	1.20	0.400	18.800	259.750	29.680	3.720	412.450	4.680	107.040	23.290	2.390	153.000	3.250	0.015
L120x10	12.0	1.00	1.20	0.400	23.240	317.160	36.590	3.690	503.790	4.660	130.540	27.720	2.370	187.000	3.330	0.018
L120x12	12.0	1.20	1.20	0.400	27.600	371.800	43.300	3.670	590.280	4.620	153.330	31.790	2.360	218.000	3.410	0.022
L120x15	12.0	1.50	1.20	0.400	33.990	448.900	52.960	3.630	711.320	4.570	186.480	37.350	2.340	262.000	3.530	0.027
L125x8	12.5	0.80	1.40	0.460	19.690	294.360	32.200	3.870	466.760	4.870	121.980	25.670	2.490	172.000	3.360	0.015
L125x9	12.5	0.90	1.40	0.460	22.000	327.480	36.000	3.860	520.000	4.860	135.880	28.260	2.480	192.000	3.400	0.017
L125x10	12.5	1.00	1.40	0.460	24.330	359.820	39.740	3.850	571.040	4.840	148.590	30.450	2.470	211.000	3.450	0.019
L125x12	12.5	1.20	1.40	0.460	28.890	422.320	47.060	3.820	670.020	4.820	174.430	34.940	2.460	248.000	3.530	0.023
L125x14	12.5	1.40	1.40	0.460	33.370	481.760	54.170	3.800	763.900	4.780	199.620	39.100	2.450	282.000	3.610	0.026
L125x16	12.5	1.60	1.40	0.460	37.770	538.560	61.090	3.780	852.840	4.750	224.290	43.100	2.440	315.000	3.680	0.030
L140x9	14.0	0.90	1.40	0.460	24.720	465.720	45.550	4.340	739.420	5.470	192.030	35.920	2.790	274.000	3.780	0.019
L140x10	14.0	1.00	1.40	0.460	27.330	512.290	50.320	4.330	813.620	5.460	210.960	39.050	2.780	301.000	3.820	0.021
L140x12	14.0	1.20	1.40	0.460	32.490	602.490	59.660	4.310	956.980	5.430	248.010	44.970	2.760	354.000	3.900	0.025
L150x10	15.0	1.00	1.40	0.460	29.330	634.760	58.070	4.650	1008.560	5.860	260.970	45.340	2.980	374.000	4.070	0.023
L150x12	15.0	1.20	1.40	0.460	34.890	747.480	68.900	4.630	1187.860	5.830	307.090	52.320	2.970	440.000	4.150	0.027
L150x15	15.0	1.50	1.40	0.460	43.080	908.380	84.660	4.590	1442.600	5.790	347.170	61.960	2.950	534.000	4.270	0.034
L150x18	15.0	1.80	1.40	0.460	51.090	1060.080	99.860	4.560	1680.920	5.740	439.240	70.910	2.930	621.000	4.380	0.040
L160x10	16.0	1.00	1.60	0.530	31.430	774.240	66.190	4.960	1229.100	6.250	319.380	52.520	3.190	455.000	4.300	0.025
L160x11	16.0	1.10	1.60	0.530	34.420	844.210	72.440	4.950	1340.060	6.240	347.770	56.530	3.180	496.000	4.350	0.027
L160x12	16.0	1.20	1.60	0.530	37.390	912.890	78.620	4.940	1450.000	6.230	375.780	60.530	3.170	537.000	4.390	0.028
L160x14	16.0	1.40	1.60	0.530	43.570	1046.470	90.770	4.920	1662.130	6.200	430.810	68.150	3.160	615.000	4.470	0.034
L160x16	16.0	1.60	1.60	0.530	49.070	1175.190	102.640	4.890	1865.730	6.170	484.640	75.920	3.140	690.000	4.550	0.039
L160x18	16.0	1.80	1.60	0.530	54.790	1290.240	114.240	4.870	2061.030	6.130	537.460	82.080	3.130	771.000	4.630	0.043
L160x20	16.0	2.00	1.60	0.530	60.400	1418.850	125.600	4.850	2248.260	6.100	589.430	90.020	3.120	830.000	4.700	0.047
L180x11	18.0	1.10	1.60	0.530	38.800	1216.440	92.470	5.600	1933.100	7.060	499.780	72.860	3.590	716.000	4.850	0.030
L180x12	18.0	1.20	1.60	0.530	42.190	1316.620	100.410	5.590	2092.780	7.040	540.450	78.150	3.580	776.000	4.890	0.033
L180x15	18.0	1.50	1.60	0.530	52.180	1607.360	123.740	5.550	2554.990	7.000	659.730	93.110	3.560	948.000	5.010	0.041
L180x18	18.0	1.80	1.60	0.530	61.990	1884.070	146.360	5.510	2992.690	6.950	775.440	106.88	3.540	1108.000	5.130	0.049
L180x20	18.0	2.00	1.60	0.530	68.430	2061.110	161.070	5.490	3271.310	6.910	850.920	115.71	3.530	1210.000	5.200	0.054
L200x12	20.0	1.20	1.80	0.600	47.100	1822.780	124.610	6.220	2896.160	7.840	749.400	98.680	3.990	1073.000	5.370	0.037
L200x13	20.0	1.30	1.80	0.600	50.850	1960.770	134.440	6.210	3116.180	7.830	805.350	105.07	3.980	1156.000	5.420	0.040
L200x14	20.0	1.40	1.80	0.600	54.600	2097.000	144.170	6.200	3333.000	7.810	861.000	111.50	3.970	1236.000	5.460	0.043
L200x16	20.0	1.60	1.80	0.600	61.980	2362.570	163.370	6.170	3755.390	7.780	969.740	123.77	3.960	1393.000	5.540	0.049
L200x18	20.0	1.80	1.80	0.600	69.300	2620.640	182.220	6.150	4164.540	7.750	1076.740	135.48	3.940	1544.000	5.620	0.054
L200x20	20.0	2.00	1.80	0.600	76.540	2871.470	200.730	6.120	4560.420	7.720	1181.920	146.62	3.930	1689.000	5.700	0.060
L200x24	20.0	2.40	1.80	0.600	90.780	3350.660	236.770	6.080	5313.500	7.650	1387.730	167.74	3.910	1963.000	5.850	0.071
L200x25	20.0	2.50	1.80	0.600	94.290	3466.210	245.590	6.060	5494.040	7.630	1438.380	172.68	3.910	2028.000	5.890	0.074
L200x30	20.0	3.00	1.80	0.600	111.54	4019.600	288.570	6.000	6351.050	7.550	1698.160	193.06	3.890	2332.000	6.070	0.088
L220x14	22.0	1.40	2.10	0.700	60.380	2814.360	175.180	6.830	4470.150	8.600	1158.560	138.62	4.380	1655.000	5.910	0.047
L220x16	22.0	1.60	2.10	0.700	68.580	3175.440	198.710	6.800	5045.370	8.580	1305.520	153.34	4.360	1869.000	6.020	0.054
L250x16	25.0	1.60	2.40	0.800	78.400	4717.100	258.430	7.760	7492.100	9.780	1942.090	203.45	4.980	2775.000	6.750	0.062
L250x18	25.0	1.80	2.40	0.800	87.720	5247.240	288.820	7.730	8336.690	9.750	2157.780	223.39	4.960	3089.000	6.830	0.069
L250x20	25.0	2.00	2.40	0.800	96.960	5764.870	318.760	7.710	9159.730	9.720	2370.010	242.52	4.940	3395.000	6.910	0.076
L250x22	25.0	2.20	2.40	0.800	106.12	6270.320	348.260	7.090	9961.600	9.690	2579.040	260.52	4.930	3691.000	7.000	0.083
L250x25	25.0	2.50	2.40	0.800	119.71	7006.390	391.720	7.650	11125.520	9.640	2887.260	287.14	4.910	4119.000	7.110	0.094
L250x28	25.0	2.80	2.40	0.800	133.12	7716.860	434.250	7.610	12243.840	9.590	3189.890	311.98	4.900	4527.000	7.230	0.105
L250x30	25.0	3.00	2.40	0.800	141.96	8176.520	462.110	7.590	12964.660	9.560	3388.980	327.82	4.890	4788.000	7.310	0.111
L250x35	25.0	3.50	2.40	0.800	163.71	9281.050	530.110	7.530	14830.580	9.470	3879.370	366.13	4.870	5401.680	7.490	0.129

Тип: Швеллер с параллельными гранями полок по ГОСТ 8240-89



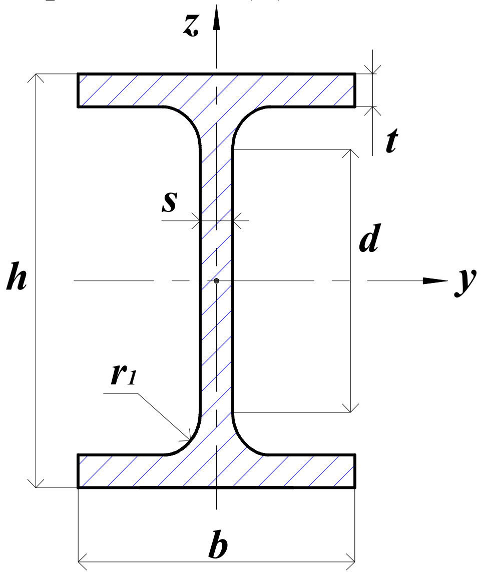
	h	b	s	t	r_1	r_2	A	P	I_y	W_y	i_y	S_y	I_z	W_z	i_z	y_o
	см	см	см	см	см	см	$см^2$	Т/м	$см^4$	$см^3$	см	$см^3$	$см^4$	$см^3$	см	см
5П	5.0	3.200	0.440	0.700	0.600	0.350	6.160	0.005	22.800	9.100	1.920	5.610	5.950	2.990	0.980	1.210
6.5П	6.5	3.600	0.440	0.720	0.600	0.350	7.510	0.006	48.800	15.000	2.550	9.020	9.350	4.060	1.120	1.290
8П	8.0	4.000	0.450	0.740	0.650	0.350	8.980	0.007	89.900	22.500	3.160	13.300	13.900	3.310	1.240	1.380
10П	10.0	4.600	0.450	0.760	0.700	0.400	10.900	0.009	175.000	34.900	3.990	20.500	22.600	7.370	1.440	1.530
12П	12.0	5.200	0.480	0.780	0.750	0.450	13.300	0.010	305.000	50.800	4.790	29.700	34.900	9.840	1.620	1.660
14П	14.0	5.800	0.490	0.810	0.800	0.450	15.600	0.012	493.000	70.400	5.610	40.900	51.500	12.900	1.810	1.820
16П	16.0	6.400	0.500	0.840	0.850	0.500	18.100	0.014	750.000	93.800	6.440	54.300	72.800	16.400	2.000	1.970
16аП	16.0	6.800	0.500	0.900	0.850	0.500	19.500	0.015	827.000	103.00	6.510	59.500	90.500	19.600	2.150	2.190
18П	18.0	7.000	0.510	0.870	0.900	0.500	20.700	0.016	1090.000	121.00	7.260	70.000	100.000	20.600	2.200	2.140
18аП	18.0	7.400	0.510	0.930	0.900	0.500	22.200	0.017	1200.000	133.00	7.340	76.300	123.000	24.300	2.350	2.360
20П	20.0	7.600	0.520	0.900	0.950	0.550	23.400	0.018	1530.000	153.00	8.080	88.000	134.000	25.200	2.390	2.300
22П	22.0	8.200	0.540	0.950	1.000	0.600	26.700	0.021	2120.000	193.00	8.900	111.00	178.000	31.000	2.580	2.470
24П	24.0	9.000	0.560	1.000	1.050	0.600	30.600	0.024	2910.000	243.00	9.750	139.00	248.000	39.500	2.850	2.720
27П	27.0	9.500	0.600	1.050	1.100	0.650	35.200	0.028	4180.000	310.00	10.900	178.00	314.000	46.700	2.990	2.780
30П	30.0	10.000	0.650	1.100	1.200	0.700	40.500	0.032	5830.000	389.00	12.000	224.00	393.000	54.800	3.120	2.830
33П	33.0	10.500	0.700	1.170	1.300	0.750	46.500	0.037	8010.800	486.00	13.100	281.00	491.000	64.600	3.250	2.900
36П	36.0	11.000	0.750	1.260	1.400	0.850	53.400	0.042	10850.00	603.00	14.300	350.00	611.000	76.300	3.380	2.990
40П	40.0	11.500	0.800	1.350	1.500	0.900	61.500	0.048	15260.00	763.00	15.800	445.00	760.000	89.900	3.510	3.050

Тип : Квадратные трубы по ТУ 36-2287-80



	b	s	A	$I_y=I_z$	$W_y=W_z$	$i_y=i_z$	P
	см	см	$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	Т/м
80x3	8.000	0.300	9.240	91.400	22.800	3.140	0.007
80x4	8.000	0.400	12.160	117.300	29.300	3.100	0.010
80x5	8.000	0.500	15.000	141.200	35.300	3.070	0.012
80x6	8.000	0.600	17.760	163.100	40.700	3.030	0.014
100x3	10.000	0.300	11.640	182.700	36.500	3.960	0.009
100x4	10.000	0.400	15.360	236.300	47.200	3.920	0.012
100x5	10.000	0.500	19.000	286.500	57.300	3.890	0.015
100x6	10.000	0.600	22.560	333.500	66.700	2.840	0.018
120x3	12.000	0.300	14.040	320.500	53.400	4.770	0.011
120x4	12.000	0.400	18.560	416.700	69.400	4.740	0.015
120x5	12.000	0.500	23.000	507.900	84.600	4.690	0.018
120x6	12.000	0.600	27.360	594.200	99.000	4.660	0.021
140x4	14.000	0.400	21.760	671.300	95.900	5.550	0.017
140x5	14.000	0.500	27.000	821.200	117.300	5.510	0.021
140x6	14.000	0.600	32.160	964.300	137.700	5.480	0.025
140x7	14.000	0.700	37.240	1100.900	157.200	5.440	0.029
140x8	14.000	0.800	42.240	1231.100	175.800	5.390	0.033
160x4	16.000	0.400	24.960	1013.000	126.600	6.370	0.020
160x5	16.000	0.500	31.000	1242.500	155.300	6.330	0.024
160x6	16.000	0.600	36.960	1463.100	182.800	6.290	0.029
160x7	16.000	0.700	42.840	1674.900	209.300	6.250	0.034
160x8	16.000	0.800	48.640	1878.100	234.700	6.210	0.038
180x5	18.000	0.500	35.000	1787.900	198.600	7.150	0.027
180x6	18.000	0.600	41.760	2109.700	234.400	7.110	0.033
180x7	18.000	0.700	48.440	2420.200	268.900	7.070	0.038
180x8	18.000	0.800	55.040	2719.700	302.100	7.030	0.043

Тип: Двутавр колонный (К) по ГОСТ 26020-83



	h	b	s	t	r_1	A	I_y	W_y	S_y	i_y	I_z	W_z	i_z	P
	см	см	см	см	см	см^2	см^4	см^3	см^3	см	см^4	см^3	см	Т/м
20К1	19.500	20.000	0.650	1.000	1.300	52.820	3820.0	392.000	216.000	8.500	1334.000	133.000	5.030	0.041
20К2	19.800	20.000	0.700	1.150	1.300	59.700	4422.0	447.000	247.000	8.610	1534.000	153.000	5.070	0.047
23К1	22.700	24.000	0.700	1.050	1.400	66.510	6589.0	580.000	318.000	9.950	2421.000	202.000	6.030	0.052
23К2	23.000	24.000	0.800	1.200	1.400	75.770	7601.0	661.000	365.000	10.020	2766.000	231.000	6.040	0.059
26К1	25.500	26.000	0.800	1.200	1.600	83.080	10300.0	809.000	445.000	11.140	3517.000	271.000	6.510	0.065
26К2	25.800	26.000	0.900	1.350	1.600	93.190	11700.0	907.000	501.000	11.210	3957.000	304.000	6.520	0.073
26К3	26.200	26.000	1.000	1.550	1.600	105.900	13560.0	1035.000	576.000	11.320	4544.000	349.000	6.550	0.083
30К1	29.600	30.000	0.900	1.350	1.800	108.000	18110.0	1223.000	672.000	12.950	6079.000	405.000	7.500	0.085
30К2	30.000	30.000	1.000	1.550	1.800	122.700	20930.0	1395.000	771.000	13.060	6980.000	465.000	7.540	0.096
30К3	30.400	30.000	1.150	1.750	1.800	138.720	23910.0	1573.000	874.000	13.120	7881.000	525.000	7.540	0.109
35К1	34.300	35.000	1.000	1.500	2.000	139.700	31610.0	1843.000	1010.000	15.040	10720.000	613.000	8.760	0.110
35К2	34.800	35.000	1.100	1.750	2.000	160.400	37090.0	2132.000	1173.000	15.210	12510.000	715.000	8.830	0.126
35К3	35.300	35.000	1.300	2.000	2.000	184.100	42970.0	2435.000	1351.000	15.280	14300.000	817.000	8.810	0.144
40К1	39.300	40.000	1.100	1.650	2.200	175.800	52400.0	2664.000	1457.000	17.260	17610.000	880.000	10.000	0.138
40К2	40.000	40.000	1.300	2.000	2.200	210.960	64140.0	3207.000	1767.000	17.440	21350.000	1067.000	10.060	0.166
40К3	40.900	40.000	1.600	2.450	2.200	257.800	80040.0	3914.000	2180.000	17.620	26150.000	1307.000	10.070	0.202
40К4	41.900	40.000	1.900	2.950	2.200	308.600	98340.0	4694.000	2642.000	17.850	31500.000	1575.000	10.100	0.242
40К5	43.100	40.000	2.300	3.550	2.200	371.000	121570.0	5642.000	3217.000	18.100	37910.000	1896.000	10.110	0.291

5. Модули продольной упругости некоторых твёрдых материалов E, $МПа$.

Сталь.............................. $(1{,}85\ldots2{,}15)\cdot10^5$;
Чугун.............................. $(0{,}7\ldots1{,}6)\cdot10^5$;
Алюминий..................... $(0{,}69\ldots0{,}72)\cdot10^5$;
Дюраль........................... $(0{,}71\ldots0{,}75)\cdot10^5$;
Медь.............................. $(0{,}84\ldots1{,}3)\cdot10^5$;
Латунь............................ $(0{,}91\ldots1{,}0)\cdot10^5$;
Бронза............................ $(1{,}05\ldots1{,}2)\cdot10^5$;
Цинк............................... $0{,}84\cdot10^5$;
Свинец........................... $0{,}17\cdot10^5$;
Титан.............................. $1{,}1\cdot10^5$;
Стекло........................... $0{,}56\cdot10^5$;
Лёд................................. $0{,}1\cdot10^5$;
Бетон............................. $(0{,}146\ldots0{,}232)\cdot10^5$;
Целлулоид..................... $(0{,}014\ldots0{,}028)\cdot10^5$.

6. Стандартные значения модулей, передаточных чисел и межосевых расстояний

Таблица П 5

Модуль $m\ (мм)$ ГОСТ 9563-80

Ряд 1	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20
Ряд 2	1,25	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18

Таблица П 6

Передаточное число u ГОСТ 2185-66

Ряд 1	1	1,25	1,6	2,0	2,5	3,15	4,0	5,0	6,3	8,0
Ряд 2	1,12	1,4	1,8	2,24	2,8	3,55	4,5	5,6	7,1	9,0

Таблица П 7

Межосевое расстояние $a_W\ (мм)$ ГОСТ 2185-66

Ряд 1	40	50	63	80	100	125	160	200	250	315	400	500
Ряд 2	71	90	112	140	180	224	280	355	450	560	710	900

7. Некоторые применяемые виды электродвигателей

Таблица П 8

Асинхронные электродвигатели (серия АО)

Тип электро-двигателя	Номинальная мощность, *кВт*	Частота вращения, $мин^{-1}$	Тип электро-двигателя	Номинальная мощность, *кВт*	Частота вращения, $мин^{-1}$
АОЛ2-11-1	0,8	2830	АО2-41-2	5,5	2910
АОЛ2-12-2	1,1	2830	АО2-42-2	7,5	2910
АОЛ2-11-4	1,6	1350	АО2-41-4	4,0	1450
АОЛ2-12-4	0,8	1350	АО2-42-4	5,5	1450
АОЛ2-11-6	0,4	910	АО2-41-6	3,0	960
АОЛ2-12-6	0,6	910	АО2-42-6	4,0	960
АОЛ2-21-2	1,5	2860	АО2-41-8	2,2	720
АОЛ2-22-2	2,2	2860	АО2-42-8	3,0	720
АОЛ2-21-4	1,1	1400	АО2-51-2	10	2920
АОЛ2-22-4	1,5	1420	АО2-52-2	13	2920
АОЛ2-21-6	0,8	930	АО2-51-4	7,5	1460
АОЛ2-22-6	1,1	930	АО2-52-4	10	1460
АОЛ2-31-2	3,0	2880	АО2-51-6	5,5	970
АОЛ-32-2	4,0	2880	АО2-52-6	7,5	970
АОЛ2-31-4	2,2	1430	АО2-51-8	4,0	730
АОЛ2-32-4	3,0	1430	АО2-52-8	5,5	730
АОЛ2-31-6	1,5	950	АО2-62-2	17	2890
АОЛ2-32-6	2,2	950	АО2-61-4	13	1460

Продолжение таблицы П 8

Тип электро-двигателя	Номинальная мощность, *кВт*	Частота вращения, *мин*$^{-1}$	Тип электро-двигателя	Номинальная мощность, *кВт*	Частота вращения, *мин*$^{-1}$
АО2-62-4	17	1450	АО2-81-2	40	2940
АО2-61-6	10	970	АО2-82-2	55	2940
АО2-62-6	13	960	АО2-81-4	40	1460
АО2-61-8	7,5	725	АО2-82-4	55	1460
АО2-62-8	10	725	АО2-91-6	30	980
А2-71-2	30	2900	АО2-82-6	40	980
А2-72-2	40	2900	АО2-81-8	22	735
А2-71-4	22	1460	АО2-82-8	30	735
А2-72-4	30	1460	АО2-81-10	17	585
А2-71-6	17	970	АО2-82-10	22	585
А2-72-6	22	970	АО2-91-2	75	2960
А2-71-8	13	730	АО2-92-2	100	2960
А2-72-8	17	730	АО2-91-4	75	1470
АО2-71-2	22	2900	АО2-92-4	100	1470
АО2-72-2	30	2900	АО2-91-6	55	980
АО2-71-4	22	1460	АО2-92-6	75	980
АО2-72-4	30	1460	АО2-91-8	50	740
АО2-71-6	17	970	АО2-92-8	55	740
АО-72-6	22	970	АО2-91-10	30	585
АО2-71-8	13	730	АО2-92-10	40	585
АО2-72-8	17	730			

8. Некоторые сведения о шпоночных соединениях

Шпонки призматические (ГОСТ 23369-78)

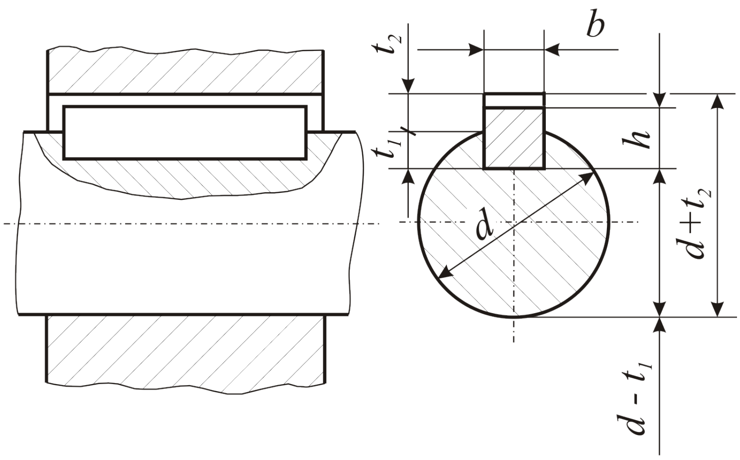


Таблица П 9

Шпонки призматические (по ГОСТ 23360-70, с сокращениями), размеры в *мм*

Диаметр вала, d	Сечение шпонки, $b \times h$	Глубина паза		Фаска $s \times 45^{\circ}$
		вала t_1	втулки t_2	
Св. 10 до 12	44	2,5	1,8	0,08...0,16
» 12 » 17 » 17 » 22 » 22 » 30	5×5 6×6 8×7	3,0 3,5 4,0	2,3 2,8 3,3	0,16...0,25
» 30 » 38 » 38 » 44 » 44 » 50 » 50 » 58 » 58 » 65	10×8 12×8 14×9 16×10 18×11	5,0 5,0 5,5 6,0 7,0	3,3 3,3 3,8 4,3 4,4	0,25...0,40
» 65 » 75 » 75 » 85 » 85 » 95 » 95 » 110	20×12 22×14 25×14 28×16	7,5 9,0 9,0 10,0	4,9 5,4 5,4 6,4	0,40...0,60

Примечания:

1. Длину шпонки выбирают из ряда: 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200...(до 500).
2. Материал шпонок - сталь чистотянутая с временным сопротивлением разрыву не менее 590 *МПа*.
3. Примеры условного обозначения шпонок:
   исполнение 1, сечение $b \times h = 20 \times 12$, длина 90 *мм*:

Шпонка 20×12×90 ГОСТ 23360-78

то же, исполнение 2:

Шпонка 2 - 20×12×90 ГОСТ 23360-78

9. Некоторые сведения о подшипниках качения

Шарикоподшипники радиальные однорядные (ГОСТ 8338-75)

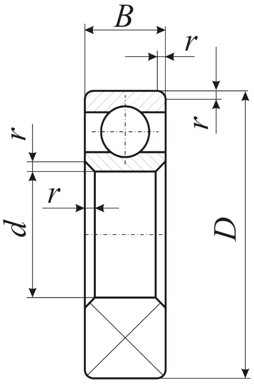
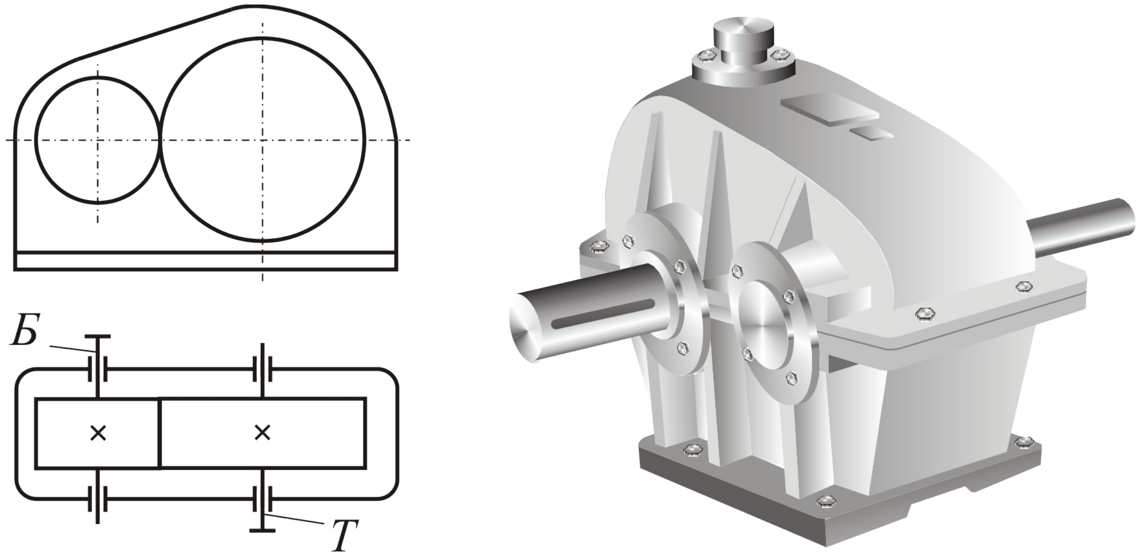


Таблица П 10

Шарикоподшипники радиальные однорядные (ГОСТ 8338-75)размеры в *мм*

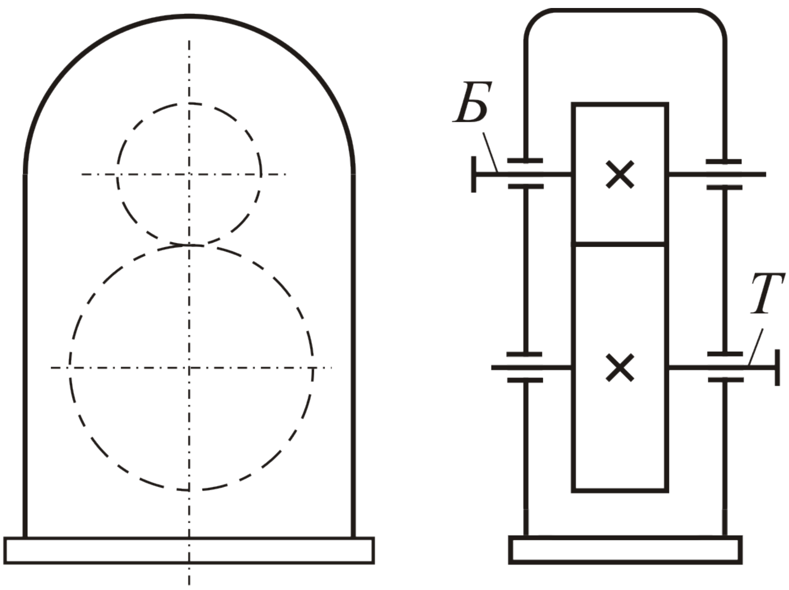
Условное обозначение		d	D	B	r	Грузоподъёмность, *кН*	
						Динамическая C	СтатическаяC_0
217	-	85	150	28	3	89,5	56,5
218	80218	90	160	30	3	95,6	62,0
219	-	95	170	32	3,5	108,0	69,5
219А	-	95	170	32	3,5	115,0	74,0
220	80220	100	180	34	3,5	124,0	79,0
Средняя серия							
300		10	35	11	1	8,06	3,75
301		12	37	12	1,5	9,75	4,65
302		15	42	13	1,5	11,4	5,4
303		17	47	14	1,5	13,5	6,65
304		20	52	15	2	15,9	7,8
305		25	62	17	2	22,5	11,4
306		30	72	19	2	28,1	14,6
307		35	80	21	2,5	33,2	18,0
308		40	90	23	2,5	41,0	22,4
309		45	100	25	2,5	52,7	30,0
310		50	110	27	3	65,8	36,0
311		55	120	29	3	71,5	41,5
312		60	130	31	3,5	81,9	48,0
313		65	140	33	3,5	92,3	56,0
314		70	150	35	3,5	104,0	63,0
315		75	160	37	3,5	112,0	72,5
316		80	170	39	3,5	124,0	80,0
316К5		80	170	39	3,5	130,0	89,0
317		85	180	41	4	133,0	90,0
318		90	190	43	4	143,0	99,0
319		95	200	45	4	153,0	110
319К5		95	200	45	4	161,0	120,0
320		100	215	47	4	174,0	132,0
Тяжёлая серия							
403		17	62	17	2	22,9	11,8
405		25	80	21	2,5	36,4	20,4
406		30	90	23	2,5	47,0	26,7
407		35	100	25	2,5	55,3	31,6
408		40	110	27	3	63,7	36,5
409		45	120	29	3	76,1	45,5
410		50	130	31	3,5	87,1	52,0
411		55	140	33	3,5	100,0	63,0
412		60	150	35	3,5	108,0	70,0

10. Краткие данные по компоновке основных типов зубчатых редукторов

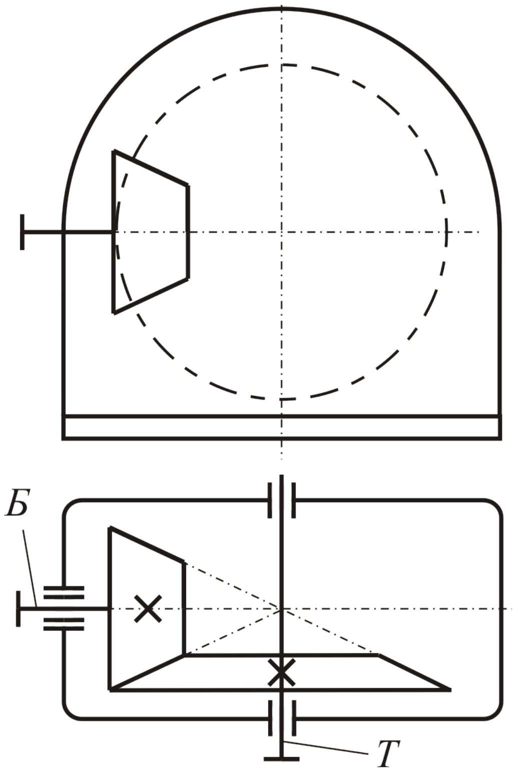


а) *б)*

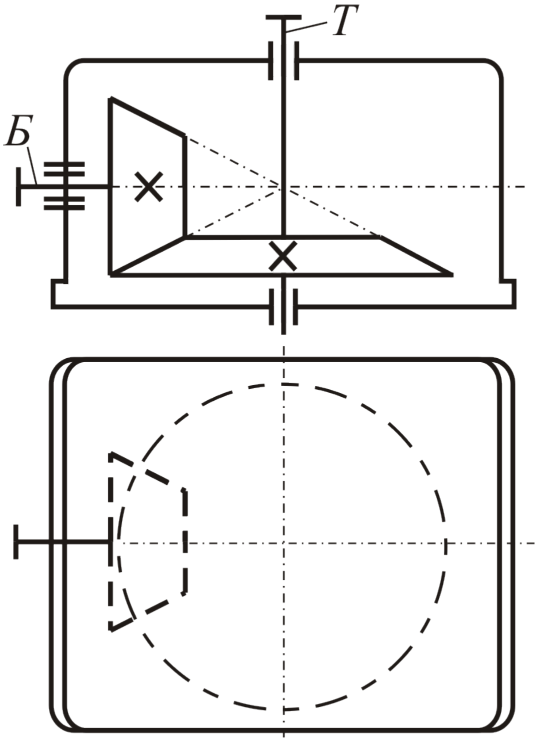
Одноступенчатый горизонтальный редуктор с цилиндрическими зубчатыми колёсами: *а*) кинематическая схема; *б*) общий вид



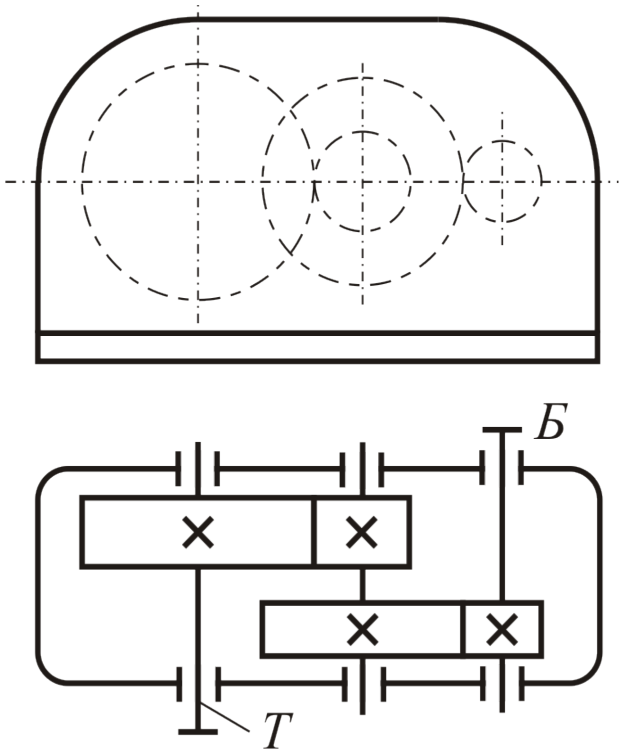
Кинематическая схема одноступенчатого вертикального редуктора с цилиндрическими колёсами



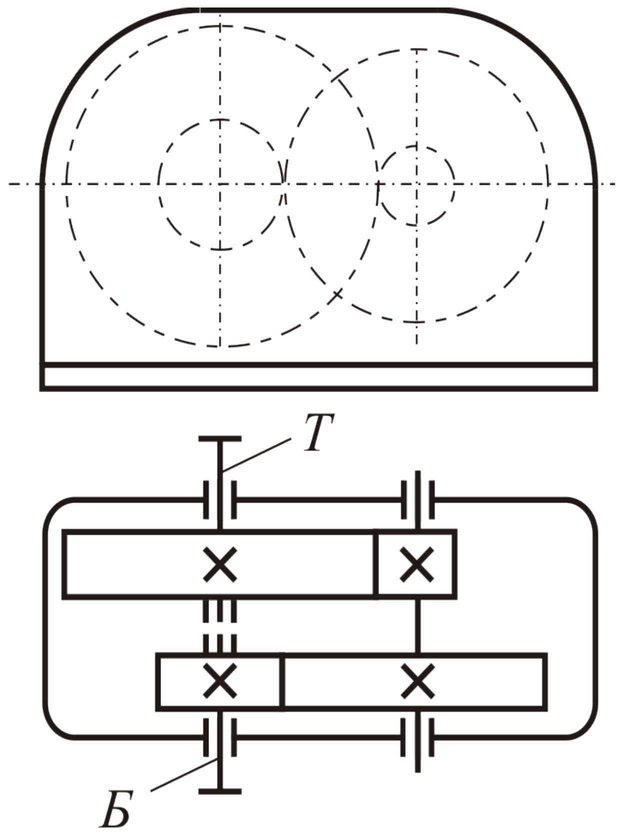
Кинематическая схема одноступенчатого редуктора
с коническими зубчатыми колёсами



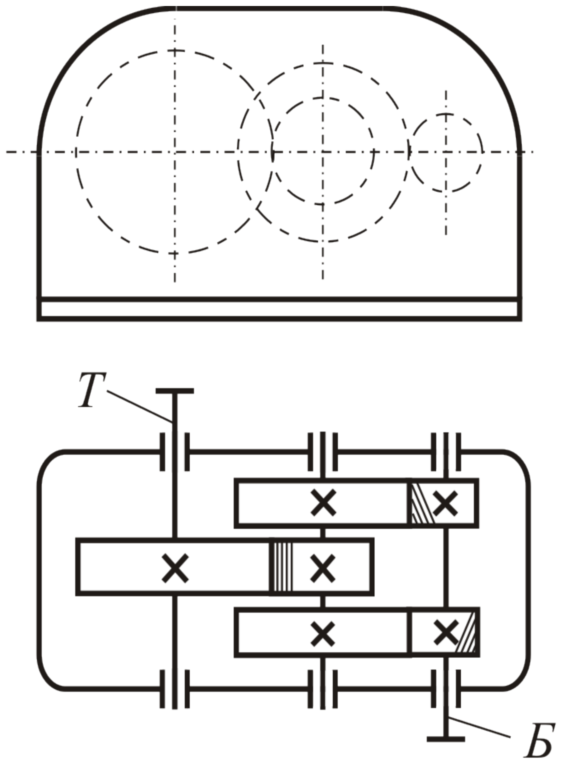
Кинематическая схема одноступенчатого конического
редуктора с вертикальным ведомым валом



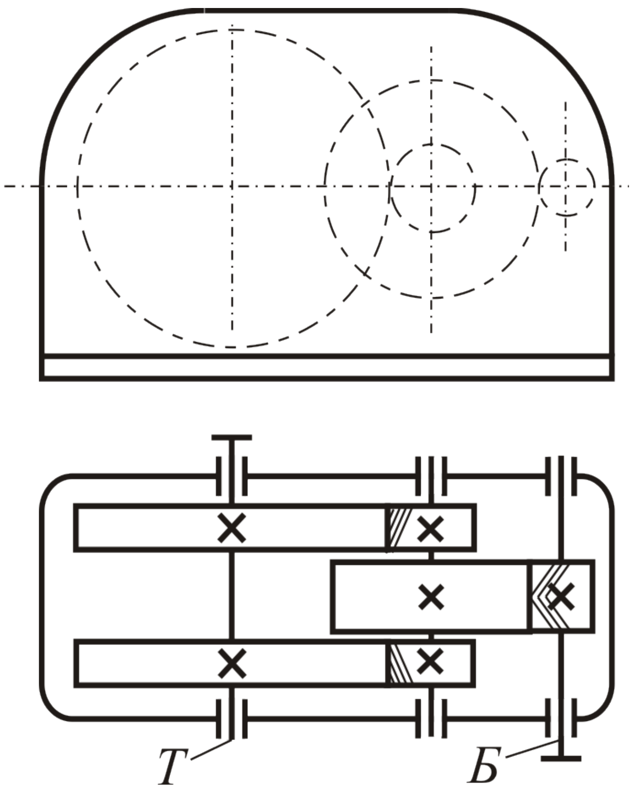
Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального редуктора с цилиндрическими колесами



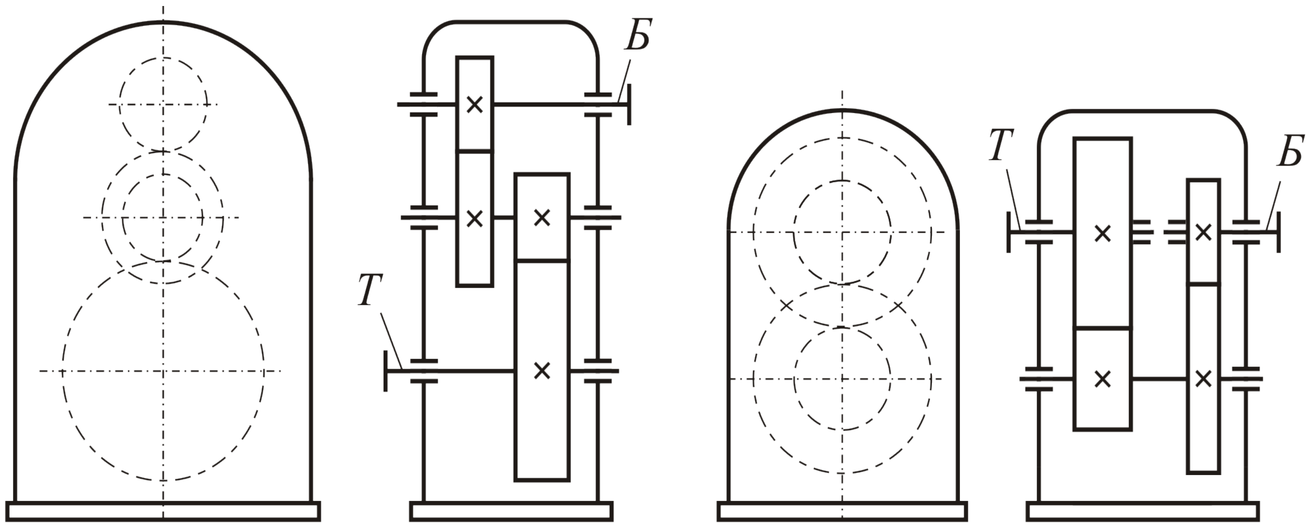
Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального соосного редуктора



Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального
редуктора с раздвоенной первой (быстроходной) ступенью

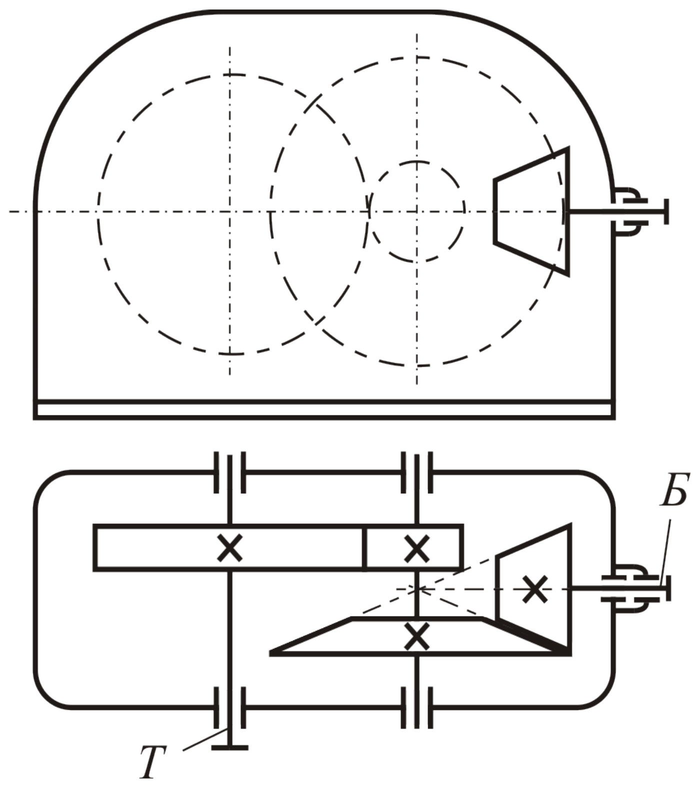


Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального
редуктора с раздвоенной второй (тихоходной) ступенью

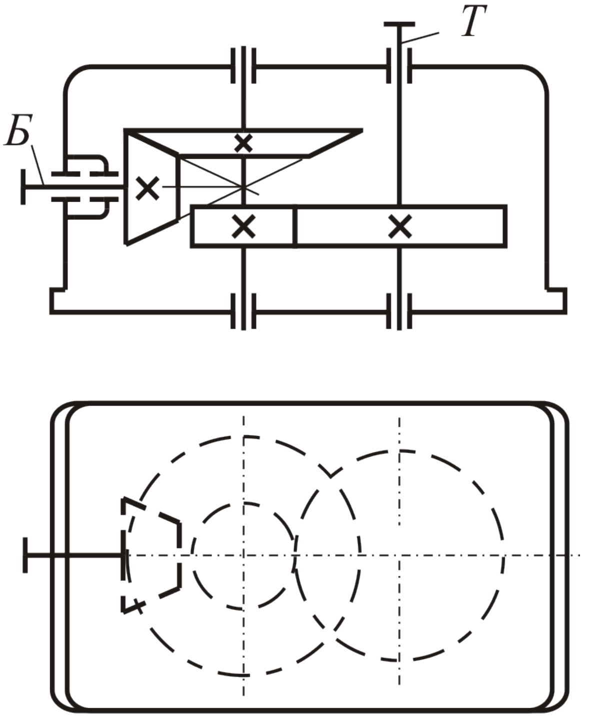


а) *б)*

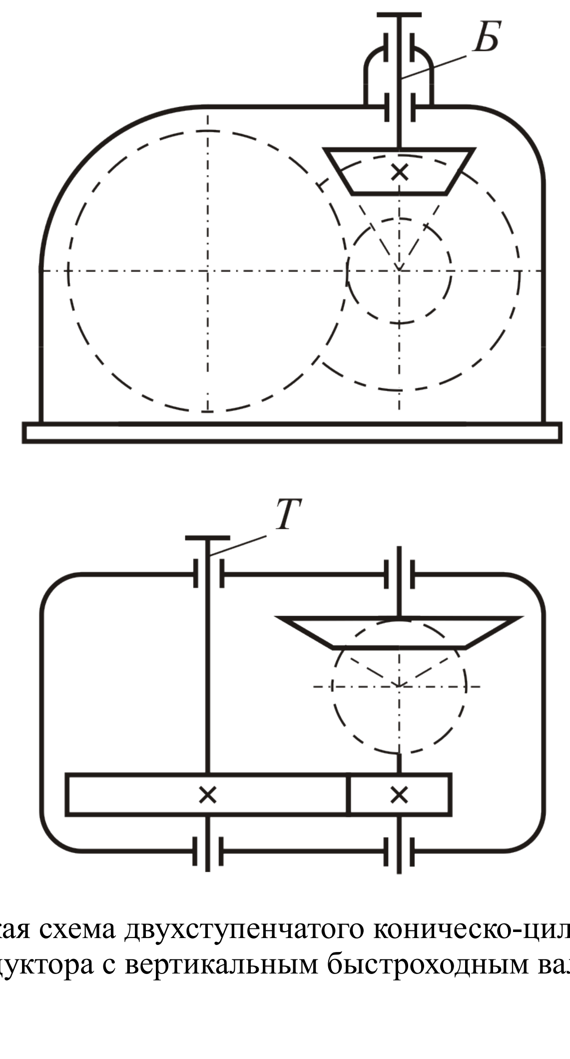
Кинематические схемы двухступенчатых цилиндрических вертикальных редукторов: *а*) развёрнутая схема; *б*) соосная схема



Кинематическая схема двухступенчатого горизонтального коническо-цилиндрического редуктора



Кинематическая схема двухступенчатого коническо-цилиндрического редуктора с вертикальным тихоходным валом



Кинематическая схема двухступенчатого коническо-цилиндрического редуктора с вертикальным быстроходным валом

Демидов Александр Станиславович
Дерюга Иван Фокович
Сорокина Ирина Алексеевна
Кутумов Алексей Анатольевич

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для студентов всех форм обучения
специальности 140211.65 «Электроснабжение»

Редактор Е.Ф. Изотова
Подготовка оригинала-макета А.С. Демидов

Подписано к печати 08.11.10. Формат 60Х84 1/16
Усл. печ. л. 26,68. Тираж 100 экз. Зак. 10-902. Рег № 126

Отпечатано в типографии ООО Фирма «Выбор»
658213, Рубцовск, Ленина, 41